Mascart
Phys. sp.
444 sc (1

<36632027040014

<36632027040014

Bayer. Staatsbibliothek

HANDBUCH

DER

STATISCHEN ELEKTRICITÄT.

VON

E. MASCART,

PROFESSOR AM COLLÈGE DE FRANCE, DIRECTOR DER METEOROLOGISCHEN CENTRALANSTALT IN PARIS.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. IGNAZ G. WALLENTIN,

K. K. PROFESSOR AM STAATSGYMNASIUM IM IX. BEZIRKE WIEN'S, EHEM. PRIVATDOCENT FÜR MATHEMATISCHE PHYSIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRÜNN.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

ERSTER BAND, II. ABTHEILUNG.

WIEN,

VERLAG VON A. PICHLER'S WITWE & SOHN.

1885.

218 D

Verlag von A. Pichler's Witwe & Sohn, Wien.

TABLEAU

der wichtigsten

meteorologisch-geographischen Verhältnisse

von **Emil Letoschek**, k. k. Oberlieutenant, Lehrer der Geographie an der k. k. Artillerie-Cadetenschule zu Wien. Ein Blatt in sechsfachem Farbendruck, Größe 125—100^{cm}. — Preis M. 7.— = fl. 3.50; mit Leinwandstreifen in Mappe M. 8.— = fl. 4.—; auf Leinwand mit Stäben M. 13.— = fl. 6.50.

Mit Erlass des hohen k. k. Unterrichts-Ministeriums vom 2. October 1881, Z. 1459, zum Lehrgebrauche zulässig erklärt.

Das vom Herrn Oberlieutenant Letoschek entworfene „Tableau der wichtigsten meteorologischen Verhältnisse“ kann als ein sehr nützliches Lehrmittel bezeichnet werden, welches sehr geeignet ist, die Hauptthatsachen der geographischen Meteorologie dem Gedächtnisse des Schülers einzuprägen. Die Darstellung beruht auf den besten und neuesten Quellenwerken und ist durchaus verlässlich.

Professor Dr. J. Hann,
Director der Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.

„Das von dem Oberlieutenant und Lehrer an der k. k. Artillerie-Cadetenschule in Wien, Herrn Emil Letoschek, ausgeführte „Tableau der wichtigsten meteorologisch-geographischen Verhältnisse“ gibt ein Bild der Wärmevertheilung, der Luft- und Meeresströmungen, des atmosphärischen Niederschlages und anderer damit zusammenhängender Phänomene in so anschaulicher und allgemein verständlicher Weise, dass dasselbe einen vorzüglichen Lehrbehelf bei dem physikalisch-geographischen Unterricht abzugeben geeignet ist und zur Benützung an allen Lehranstalten auf das beste empfohlen werden kann.“

Dr. Friedrich Simony,
k. k. Universitäts-Professor.

Vier große Darstellungen des Mittelfeldes veranschaulichen die Wärmeverhältnisse der Erde im Januar und Juli, die Isobaren und Luftströmungen derselben extremen Monate, die Meeresströmungen, Klimate und die Niederschläge auf der Erde.

Unterhalb befindet sich ein Diagramm der Luftströmungen, eine Erdkarte mit der thermischen Anomalie des Januar und eine solche mit der des Juli. Hier wurden auch die Bahnen der Sturmcentra und die äußerste Grenze des Treibeises aufgenommen.

Eine thermische und eine barische Windrose, eine Windrose für die Häufigkeit der Winde und eine solche für die Häufigkeit der Niederschläge — alle mit Bezug auf Mitteleuropa — veranschaulichen die Windverhältnisse und deren meteorologische Wirkungen auf die uns am meisten interessierende Erdgegend.

Eine Darstellung zeigt die jährliche Wärmeschwankung von fünf in verschiedenen Zonen gelegenen Orten; eine andere die tägliche Wärmeschwankung von drei Orten für Januar und Juli; es sind charakteristische Beispiele über die Temperaturverhältnisse der Erde.

Eine Wetterkarte Mitteleuropas, die cyklonale und anticyklonale Bewegung der Luft um ein Luftdruckminimum und Maximum unterstützen die Betrachtungen über Wind und Wetter.

Eine Darstellung der Abnahme der Lufttemperatur nach der Höhe in den Alpen und eine andere conforme Versinnlichung der Schneegrenze in Europa sowie drei Landschaften, — ein Gletscher, eine Wasserhose und eine Polarlandschaft mit Eisbergen — sollen gleichfalls zur Belebung und Veranschaulichung des Vortrages in der meteorologischen Geographie beitragen.

Viel, für ein Tableau fast zuviel, habe ich gebracht; aber die einzelnen Objecte sind durch berechnete Anordnung und Farbengebung gut von einander getrennt, so dass die Überfüllung kaum gemerkt wird. Zudem ist es, meiner Ansicht nach, gerade bei dieser Tafel nur von Vortheil, wenn alle die sich gegenseitig bedingenden und ergänzenden Verhältnisse nebeneinander gestellt sind. Der Lehrer macht Beziehungen unmittelbar, leitet den Schüler zur Vergleichung und somit zum verständnisvollen Eindringen in die Klimatologie an. *(Vorwort.)*

HANDBUCH

DER

STATISCHEN ELEKTRICITÄT.

VON

E. MASCART,

PROFESSOR AM COLLÈGE DE FRANCE, DIRECTOR DER METEOROLOGISCHEN CENTRALANSTALT IN PARIS.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. IGNAZ G. WALLENTIN,

K. K. PROFESSOR AM STAATSGYMNASIUM IM IX. BEZIRKE WIEN'S, EHEM. PRIVATDOCENT FÜR MATHEMATISCHE PHYSIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRÜNN.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

ERSTER BAND.

WIEN,

VERLAG VON A. PICHLER'S WITWE & SOHN.

1883.

Fr. Winiker & Schickardt, k. k. Hofbuchdrucker, Brünn.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede des Autors.

Ich halte es für nothwendig, dem Leser einige Erläuterungen bezüglich der Beschaffenheit jener Partien, welche in diesem Werke behandelt werden, und bezüglich der Wahl des Titels, zu welcher ich mich entschlossen habe, zu geben. Würde man sich an die strenge Bedeutung der Worte halten, so müsste ein Lehrbuch der statischen Elektricität nur die Gleichgewichtsbedingungen elektrisierter Körper umfassen, oder allgemeiner, das Studium jener Erscheinungen anbahnen, in welchen das elektrische Agens weder eine Arbeitsleistung noch einen äquivalenten calorischen Effect veranlasst, und sich beschränken auf die mathematischen Folgerungen aus dem Coulomb'schen Gesetze. Der Rahmen, den ich mir auszufüllen vornahm, ist viel weniger eng und es ist nothwendig, um den Grundzug der in demselben enthaltenen Untersuchungen zu präcisieren, in aller Kürze die Art und Weise des Entwicklungsganges der wissenschaftlichen Elektricitätslehre darzustellen.

Diese Wissenschaft ist eine durchwegs moderne; ungeachtet einiger schon den Alten bekannten Thatsachen ist ihr Ursprung in Wirklichkeit durch die Arbeiten von Gilbert zu Beginn des siebzehnten Jahrhundertes angezeigt. Von dieser Zeit an folgen die Entdeckungen in sehr rascher Aufeinanderfolge, aber lange Zeit bleiben sie ohne methodische Verknüpfung. Die Sichtung vollzieht sich erst im achtzehnten Jahrhunderte; es treten die allgemeinen Anschauungen zutage, welche eine bessere Auslegung der älteren Versuche gestatten und Anlass zur Anstellung von weiteren Versuchen geben. Auf diese Weise entdeckte man allmählig die elektrische Leitungsfähigkeit, die beiden Elektrisierungsarten der Körper, die gleichzeitige

Hervorrufung der beiden Elektricitäten, die Condensation und die Influenz. Eine allgemeine Theorie, welche die gesammten bekannten Thatsachen an eine kleine Anzahl Hypothesen knüpft, beginnt möglich zu werden und nach den wunderbaren Arbeiten von Coulomb konnte man sogar glauben, dass diese Wissenschaft in definitiver Form aufgestellt war. Den Erscheinungen wurden dieselben Gesetze zugrunde gelegt, wie der allgemeinen Massenanziehung, und die zu lösenden Probleme konnten in der Praxis nur analytische Schwierigkeiten bieten: Die Abhandlungen von Poisson, auf die Vertheilung der Elektricität auf zwei benachbarten Kugeln sich beziehend, wurden das glänzendste Beispiel dieser Art von Rechnungen.

Doch blieb noch ein wichtiger Schritt zu machen, sollte man die Elektricität von ihrer wahren Seite betrachten; und es ist hier wieder der Versuch, ausgeführt von einem genialen Manne, welcher lange Zeit der Theorie vorangieng. Zur selben Zeit, als Coulomb die Elementargesetze der elektrischen Wirkungen bestimmte, brachte Volta eine wichtige Eigenschaft derselben zur Kenntnis, welche er die elektrische Spannung bezeichnete, eine Eigenschaft, welche er durch den Calcül an kein einfaches Gesetz knüpfen konnte, die ihm aber gestattete, die elektrischen Capacitäten der Körper, die condensierende Kraft und den elektrischen Zustand der Luft zu bestimmen, ohne dass man bei diesen verschiedenen Anwendungen irgendeinen Erklärungsfehler angeben könnte.

Diese Arbeiten von Volta hätten hingereicht, um seinen Namen unsterblich zu machen, wenn die Entdeckung des galvanischen Elementes, welche nur die Weiterentwicklung und Verallgemeinerung seiner ersten Anschauungen war, den Ausgangspunkt seiner Forschungen nicht zu sehr in Vergessenheit gebracht hätte. Der neue Begriff der elektrischen Spannung, welche Volta nicht anders als ein Bestreben der Elektricität, in einer gewissen Richtung sich zu bewegen, definieren konnte, ist verworren geblieben und oft unrichtig ausgelegt worden, bis die Mathematiker von demselben eine präcise Definition, welche aus den Gesetzen von Coulomb selbst deduciert wurde, gegeben und die Grundeigenschaften der elektrischen Spannung nachgewiesen hatten. In diesem Augenblicke aber

wurde die Aufmerksamkeit von dem Gegenstande abgelenkt: Die Arbeiten von Oerstedt und Ampère über Elektromagnetismus und Elektrodynamik, die überraschende Entdeckung der Induction durch Faraday hatten Erscheinungen zur Kenntnis gebracht, welche man nicht mehr durch das Princip von Volta erklären konnte. Die Experimentatoren wurden an einen fruchtbringenderen Standpunkt gezogen und die Abhandlung von Georges Green blieb ganz in Vergessenheit, selbst in England. Es musste schließlich die mechanische Theorie der Wärme, welche die Wechselbeziehung zwischen den physikalischen Erscheinungen mittelst des allgemeinen Principes der Erhaltung der Arbeit unter allen ihren Formen darstellt, die vollständige Untersuchung wieder aufnehmen und die elektrischen Erscheinungen sich beiordnen, so dass diese unter einer ganz neuen Form sich zeigten.

Wollte man mit einem Worte den Geist, der dieses Werk durchzieht, bezeichnen, so könnte man sagen, dass das letztere eine Studie der Spannung, wie sie durch Volta in die Wissenschaft eingeführt wurde, oder des Potentiales, wie sie die Mathematiker genannt haben, ferner der Eigenschaften dieser Function und aller Umstände ist, welche zwischen zwei Körpern eine Spannungs- oder Potentialdifferenz veranlassen. Ein Titel, welcher diesen Grundzug des Werkes bezeichnen soll, würde an Einfachheit und Klarheit zu wünschen übrig lassen: ich habe den Titel: „statische Elektricität“ vorgezogen, um anzuzeigen, dass das Werk eine erste Studie der elektrischen Erscheinungen ist, und mir andererseits mehr Freiheit in der Wahl der Partien zu reservieren.

Ich habe so viel als möglich die Originalabhandlungen berücksichtigt und die meisten Quellen mittelst zahlreicher Fußnoten angegeben. Ich beabsichtigte weder bezüglich jeder Untersuchung eine vollständige geschichtliche Darstellung zu geben noch aller Physiker zu gedenken, welche zur Entwicklung der Wissenschaft beigetragen haben, ich war aber bestrebt, jenen Forschern Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, welche eine Anschauung oder eine neue Methode in die Wissenschaft einführten. Wenn ich in dieser schwierigen Arbeit meine Absicht nicht erreicht haben sollte, so hoffe ich doch wenigstens,

dass man in diesem Werke weder einen ausschließenden Standpunkt noch übelwollende Kritik finden wird.

Unter den Specialwerken, welche sich mir nützlich erwiesen haben, erwähne ich die Abhandlungen über statische Elektricität von Riess, und insbesonders die bemerkenswerten Abhandlungen von William Thomson, welche unter dem Titel „Papers on Electrostatics and Magnetism“ gesammelt wurden. Was den mathematischen Theil betrifft, so habe ich speciell meine Zuflucht genommen zur „mechanischen Wärmetheorie“ von Briot und zu den ausgezeichneten Vorlesungen, welche von Bertrand am Collège de France gehalten wurden.

Vorrede des Bearbeiters.

Der im Jahre 1876 von Professor Mascart veröffentlichte „traité d'electricité statique" kann als ein treffliches Lehrbuch sowohl des experimentellen als auch des theoretischen Theiles der Elektrostatik bezeichnet werden; schon der weit bekannte Name des Autors, der als Forscher sich eines ausgezeichneten Rufes erfreut, bürgt für die Gediegenheit auch dieses seines Werkes. — Prof. Mascart hat in dem erwähnten Buche nicht nur die neueren Arbeiten, sondern auch jene früherer Experimentatoren berücksichtigt; insbesonders waren es die Coulomb'schen Versuche, denen er seine volle Aufmerksamkeit widmete und die er dem Leser mit aller Ausführlichkeit und in einer anziehenden Form vorführte. Hauptsächlich in den ersten Capiteln des „traité" hat der Autor ein ziemlich vollständiges Bild des Entwicklungsganges der wissenschaftlichen Elektricitätslehre geschaffen; überall tritt die historische Seite des Gegenstandes deutlich hervor und diesem Umstande ist es auch zuzuschreiben, dass z. B. in den Abschnitten über die Elektrometer und Elektrisiermaschinen noch Apparate eingehend beschrieben werden, die vor langer Zeit in Verwendung standen, heute aber kaum mehr gebraucht werden dürften. Der Bearbeiter ist überzeugt, dass auch derartige Darstellungen dem Fachmanne nicht unwillkommen sein werden.

Der Unterzeichnete, durch die vielfachen Vorzüge des Mascart'schen Originales angezogen, hat sich vor längerer Zeit entschlossen, dasselbe ins Deutsche zu übertragen. Viele Zusätze wurden eingeschaltet, der theoretische Theil der Elektrostatik vielfach erweitert und umgearbeitet; doch sei in letzterer Beziehung bemerkt, dass der Herausgeber der deutschen Bearbeitung immer nur die physikalische Seite der Theorie vor Augen hatte und auf die vielfachen schönen Untersuchungen, die fast rein mathematischer Natur sind (z. B. in der Theorie der Elektricitätsvertheilung auf Conductoren), weniger Gewicht legte. Besonders sind es die Theoreme der Potentialtheorie, die der Unterzeichnete oft von

mehreren Gesichtspunkten aus betrachtete; die Lehre von den Kraftlinien, von der Emission und Absorption des Kraftflusses leitet meist zu einer überraschend einfachen und eleganten Lösung der betreffenden Probleme. Bei der Bearbeitung dieses Theiles hat der Unterzeichnete seine Studien der Werke von Maxwell, Thomson, Clausius, Grinwis und anderer benützt; dass die von Mascart und Joubert kürzlich edierten leçons sur l'électricité et le magnetisme vielfach der Bearbeitung der Theorie zugrunde gelegt wurden, dürfte sicherlich in der Tendenz Professor Mascart's liegen, der in überaus freundlicher Weise dem Unterzeichneten die Einschaltung von Zusätzen, welche dem letzteren wesentlich erscheinen, gestattete.

Die deutsche Bearbeitung des „traité" wird in zwei Bänden zu je zwei Abtheilungen erscheinen; der erste Band, von welchem nunmehr die erste Abtheilung vorliegt, enthält die Grundgesetze der statischen Elektricität, die Theorie der elektrostatischen Phänomene mit Einschluss einer ausführlichen Theorie der Dielektricität, die in dem Originale fehlt, die Beschreibung und Theorie der elektrostatischen Messapparate und deren Anwendung zur Bestimmung der in der Elektrostatik vorkommenden Größen. Den Schluss des ersten Bandes wird eine eingehende Darstellung der Methoden zur Auswertung des specifischen Inductionsvermögens der Dielektrika bilden. Es wird dafür Sorge getragen werden, dass die einzelnen Abtheilungen rasch aufeinander folgen werden.

Der Bearbeiter hält es für seine Pflicht anzugeben, inwiefern er das Werk erweiterte. Außer kleineren Zusätzen wurden folgende Artikel in die deutsche Bearbeitung aufgenommen: Die Berechnung des Einflusses der Gefäßwände auf die bewegliche Kugel in der Coulomb'schen Drehwage (pg. 57), die Artikel 30, 141, 142, 145, 148, 150—153, 156, 168, 170, 173, 176, 179—182, 186—191, 193—200, 203—207, 212, 215, 219, 223, 225, 226, 233—255, 305, 308.

Zum Schlusse spricht der Unterzeichnete noch den Wunsch aus, die deutsche Bearbeitung des „traité" möge eine ebenso freundliche Aufnahme von Seite der Physiker erfahren wie das Original.

Wien, im Juni 1883.

Dr. J. G. Wallentin.

I. Kapitel.

Einleitung.

1. Elektrische Erscheinungen. — Anziehung und Abstossung. Das älteste bekannte elektrische Phänomen ist die Anziehung leichter Körper. Wenn man mit der Hand oder mit einem Tuchstücke einen Glasstab reibt und denselben dann leichten Körpern so z. B. Papierschnitzeln oder Federbärten nahe bringt, so sieht man diese leichten Körper sich schnell gegen den Glasstab bewegen, hierauf eine längere oder kürzere Zeit an demselben hängen bleiben und sodann sich von ihm wieder entfernen. Der Körper, welcher die Eigenschaft besitzt, leichte Körperchen anzuziehen, wird elektrisch genannt und man gibt der Ursache dieser Erscheinungen den Namen Elektricität. Diese Eigenschaft ist aber keine beständige; die Körper, welche sie erlangt haben, verlieren sie allmählig und schließlich verschwindet sie vollständig.

Lange Zeit hindurch waren der Bernstein, der den griechischen Namen ἤλεκτρον (¹) hat, und der Gagat, eine bitu-

(¹) Thales (640 v. Chr. — 548 v. Chr.) soll zuerst die Anziehung leichter Körper durch Bernstein wahrgenommen haben; W. Gilbert unterschied zuerst die Anziehung des geriebenen Bernsteins von jener des Magneteisensteins und gebrauchte zuerst das Wort „elektrisch". (Man sehe sein Werk: De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete tellure, Lond. 1600; lib. II, cap. II., p. 54. Edit. Sedini 1628.)

minöse Steinkohle, nahezu die einzigen Körper, deren elektrische Eigenschaften man kannte und vom ersteren rührt auch der Name, welchen man dieser Wissenschaft gegeben hat, her. Die Alten erwähnen noch einen anderen Stoff, das Lynkurium, welches ebenfalls leichte Körperchen, ja selbst Metallstückchen anzöge; die Natur dieser so bezeichneten Substanz ist aber nicht bekannt; einige Autoren haben auf die Beschreibung Theophrast's hin die Meinung ausgesprochen, dass das Lynkurium Turmalin sei, dessen specielle Eigenschaften wir später kennen lernen werden. ([1])

2. Die Geschichte der Elektricität datiert in Wirklichkeit nur von den bedeutend neueren Untersuchungen. Gilbert([2]) (geb. 1540, gest. 1603), ein Londoner Arzt, hat in einer Schrift über den Magnetismus eine große Zahl elektrischer Experimente veröffentlicht. Er hat nachgewiesen, dass die Eigenschaft, leichte Körper anzuziehen, durch Reiben einer hinlänglich großen Anzahl von Körpern gegeben werden kann: so den Edelsteinen, wie z. B. dem Diamant, dem Saphir, dem Rubin, dem Amethyst, Opal, Aquamarin und Bergkrystall, außerdem vielen anderen gewöhnlicheren Substanzen, wie dem Schwefel, dem Schellack, dem Harze, dem Steinsalz, dem Steinalaun, dem Glase und allen glasartigen Stoffen. Er hat gezeigt, dass die elektrisierten Körper nicht bloß Papierstücke und Federbärte anziehen, sondern auch Stücke von was immer für festen Körpern, wie Holz, Steine, Metalle und ebenso Flüssigkeitströpfchen und verdichtete Dämpfe. Er glaubte, dass die Luft durch einen elektrisierten Körper nicht angezogen werde, indem er bemerkte, dass eine Flamme durch die Annäherung von geriebenem Bernstein nicht bewegt wurde. Gilbert hat, um den elektrischen Zustand eines Körpers nachzuweisen, lange und dünne Stäbchen aus Metall oder anderen Substanzen angewendet, die in einem Punkte wie Magnetnadeln unterstützt waren. Wenn er dem einen Ende dieser

([1]) Man sehe das Buch: „la foudre, l'électricité et le magnétisme chez les anciens“ von Th. Henri Martin (Paris, 1866). Wahrscheinlicher ist es, dass man unter dem Lynkurion unseren Hyacinth zu verstehen habe (Poggendorff, Geschichte der Physik, Leipzig 1879; pg. 33).

([2]) De magnete, magneticisque corporibus (London, 1600).

Nadel einen früher geriebenen Körper näherte, so wurde die Nadel abgelenkt, wenn der Körper auch nur ein wenig elektrische Kraft besaß. Er hat auch beobachtet, dass ein schnelles und leichtes Reiben am meisten wirksam ist; dass ferner feuchte Luft oder ein Südwind die elektrischen Erscheinungen bedeutend vermindert, während diese Erscheinungen viel stärker hervortreten, wenn die Luft trocken ist und wenn der Wind vom Norden oder Osten weht, dass dann die elektrische Kraft sich länger erhalten kann, sogar zehn Minuten nach der Reibung des Körpers. Dennoch hat Gilbert nicht beobachtet, dass die Anziehung eine gegenseitige ist und dass der elektrisierte Körper ebensogut angezogen wird, wie jener, welcher nicht elektrisiert wurde. Man muss sich schließlich wundern, dass Gilbert, der doch so viele neue Experimente ausgeführt hat, nicht das Phänomen der elektrischen Abstoßung entdeckte. ([1])

Die Physiker nach Gilbert haben sich auf kaum mehr verlegt, als die Zahl der elektrischen Substanzen zu vermehren und haben kein neues Phänomen beschrieben. Boyle fand, dass ein elektrisierter Körper durch einen anderen, der sich im natürlichen Zustand befindet, angezogen wird; dass ein leichter Körper, so z. B. eine Federfahne, nach erfolgter Anziehung von Seite eines elektrisierten Körpers, sich an seine Hände anlegte, dass ferner die Luft bei der Erscheinung der Anziehung nicht wesentlich ist, weil sich die Attraction ebensogut in einem Gefäße äußert, das man luftleer gemacht hat. ([2])

3. Otto von Guericke([3]) erhielt viel stärkere elektrische Wirkungen. Er befestigte auf einer Axe eine Schwefelkugel von der Größe eines Kinderkopfes, wie er sie durch Schmelzen des Schwefels in einem Glasballon erhielt, den man nachher zerbrach. Der Apparat wurde von Holzstützen getragen; man

([1]) Man sehe die Geschichte der Elektricität von J. Priestley, ein ungeachtet der Parteilichkeit, welche der Autor für seine Landsleute nicht verbirgt, ausgezeichnetes Werk. Eine französische Übersetzung wurde 1771 publiciert ohne Namen des Autors; diese enthält zahlreiche Anmerkungen, die zum größten Theile der Vertheidigung der Ansichten des Abbé Nollet gewidmet sind.

([2]) Boyle's Werke, t. IV., p. 352 (Ausgabe in 6 Bänden, London 1772.)

([3]) Experimenta Magdeburgica, lib. IV., c. 15.

rieb die Kugel mit der Hand, während die Axe mittelst einer Kurbel in lebhafte Rotationsbewegung versetzt wurde. Die Kugel wurde dann stark elektrisiert; man nahm sie mit der Axe ab und bediente sich derselben bei Hervorrufung der Experimente. Otto von Guericke fand, dass ein einmal von der elektrisierten Kugel angezogener Körper von derselben sodann abgestoßen und nicht mehr vom neuen angezogen wurde, als bis er einen anderen Körper berührt hatte. So konnte er längere Zeit hindurch eine Feder in der Luft schwebend erhalten und er beobachtete, dass, wenn man dieser Feder einen Leinenfaden oder eine Kerzenflamme nähert, die Feder sogleich zur Kugel zurückkehrt und dieselbe berührt. Es wurde also schon damals auf die Eigenschaften der Spitzen und Flammen hingewiesen. Otto von Guericke beobachtete auch, dass Fäden, welche in einer kleinen Entfernung von der Schwefelkugel aufgehängt und von der letzteren angezogen wurden, durch seinen Finger eine Abstoßung erlitten, er zog aber aus diesem Experimente nicht den auf das Princip der elektrischen Influenz bezüglichen Schluss.

Endlich war Otto v. Guericke der erste, welcher das Knistern und das Licht des elektrischen Funkens (¹) beobachtete, aber die Wirkungen, die er erhielt, scheinen sehr schwach gewesen zu sein. Wurde die Kugel im dunkeln Raum gerieben, so wurde sie ganz leuchtend und zwar mit einem Glanze, der dem des im Dunklen zerriebenen phosphorescierenden Zuckers ähnlich war; er musste das Ohr ganz nahe der Kugel halten, um das Knistern der Funken zu vernehmen.

Doctor Wall (²) gelang es, mit Bernstein, Diamant und Schellack stärkeres Knistern und brillantere Funken zu erzeugen; diese Erscheinungen waren so frappant, dass er hinzufügt:

(¹) Gleichwohl erwähnt Martin (l. c. p. 234) Beobachtungen von elektrischen Funken im Alterthume: Das Pferd eines römischen Patriciers und ein Esel des Tiberius gaben Funken, wenn man sie streichelte; Valamir, ein Genosse des Attila, konnte aus seinen Kleidern Funken entlocken, wenn er sie nahm oder ablegte und diese Funken verursachten zuweilen ein vernehmbares aber schwaches Knistern u. s. w.

(²) Philosophical transactions abridged, vol. V., pag. 409 (1708) [Ausgabe von 1809].

„Dieses Licht und dieses Knattern schienen einigermaßen Blitz und Donner darzustellen.“

Otto v. Guericke bemerkte auch, dass die elektrische Kraft, welche in einem Körper durch Reiben erzeugt wird, sich durch einfachen Contact auf andere Körper übertragen lässt, welche man nicht direct reibt, und er nahm diese Eigenschaft der Elektricität, sich fortzupflanzen, an einer Hanfschnur bis in die Entfernung von einer Elle wahr; diese Beobachtung wurde aber nicht weiter fortgesetzt; die wirkliche Entdeckung der elektrischen Leitung wurde erst ein halbes Jahrhundert später gemacht.

4. Um dieselbe Zeit hat Hauksbee(¹) eine große Zahl sehr merkwürdiger Experimente veröffentlicht. Er machte zuerst auf das große elektrische Vermögen des Glases aufmerksam; er ersetzte die Kugel, welche Otto v. Guericke anwendete, durch eine Glaskugel oder einen Glascylinder und erhielt dann viel auffallendere Erscheinungen; seit Hauksbee ist die Anwendung des Glases bei elektrischen Experimenten allgemein. Hauksbee hat mehrere Erscheinungen beobachtet, welche sich auf die Elektrisierung durch Influenz beziehen und die erst viel später richtig aufgefasst wurden. Näherte er so z. B. einer elektrisierten Kugel einen Reifen aus Eisendraht, in welchem leinene Fäden befestigt waren, so sah er, dass alle die Fäden sich gegen den Mittelpunkt der Kugel richteten; wurde die Hand diesen Fäden hinlänglich nahe gebracht, so wurden sie abgestoßen. Waren die Fäden andererseits im Innern einer hohlen Glaskugel befindlich und an der Axe befestigt, so divergierten sie nach allen Richtungen, wenn die Kugel elektrisiert wurde. Die bemerkenswertesten Versuche von Hauksbee beziehen sich auf die Erscheinungen in verdünnten Gasen oder im barometrischen Vacuum. Wenn er Quecksilber in einer luftleer gemachten Glasröhre schüttelte, beobachtete er eine große Lichtmenge mit einzelnen Lichtblitzen, welche nach verschiedenen Richtungen sich zu bewegen schienen, solange das Quecksilber in Bewegung war; es ist auch nicht nothwendig, dass der Gasdruck sehr klein bleibe, damit das Phänomen sich zeige.

(¹) Physico-mechanical experiments (1709). Eine französische Übersetzung von De Bremond wurde 1754 veröffentlicht.

Er drehte rasch mit einer Maschine eine hohle Glaskugel, die er luftleer gemacht hatte und beobachtete, dass, sobald er auf die Kugel die Hand legte, im Innern der Kugel eine beträchtliche Lichtmenge von einer schönen Purpurfarbe entstand. Das Licht vermehrte sich jedesmal, wenn man die Hand bewegte und es konnte so hell werden, dass man im Stande war, große Schrift zu lesen; die Erscheinung wurde nach und nach immer schwächer, wenn man Luft in die Kugel eintreten ließ. Die directe Reibung der leeren Kugel ist übrigens nicht nothwendig; Hauksbee stellte in der Entfernung von etwas weniger als einem Zoll zwei Glaskugeln von neun Zoll im Durchmesser gegenüber, von denen die eine luftleer gemacht war, und alle beide wurden einzeln in Rotation versetzt. Legte man die Hand an die luftvolle Kugel, so wurde die andere mit purpurfarbenem Scheine erfüllt, welcher dann aufhörte, wenn die leere Kugel zur Ruhe gebracht wurde. Es genügt sogar ein Glasgefäß, welches ein verdünntes Gas einschließt, in der Nähe eines elektrisierten Körpers zu verschieben, um derartige elektrische Lichtwirkungen zu erhalten. — Ein anderes zusammengesetzteres Experiment besteht darin, dass man zwei Glascylinder ineinander stellt, welche unabhängig voneinander bewegt werden können. Der innere Cylinder wird luftleer gemacht; hält man nun die Hand an die Oberfläche des äußeren bewegten Cylinders, so entsteht in dem verdünnten Gase ein Lichtschimmer, ob nun der innere Cylinder selbst in Bewegung war oder nicht. Dieser Lichtschein verschwand nicht vollständig, wenn der Apparat zur Ruhe gebracht wurde, und es genügte nach einiger Zeit die Hand dem äußeren Cylinder zu nähern, um diesen blitzartigen Lichtschein wieder hervorzurufen. Hauksbee machte noch viele andere Experimente über die Hervorrufung dieser Lichtschimmer durch Reiben zweier Körper im luftleeren Raume, über die Änderungen, welche diese Lichterscheinungen je nach der Natur der angewendeten Körper erfahren u. s. w., aber diese Erscheinungen waren so compliciert, dass sie nicht namhaft in dieser Zeit dem Fortschritte in der Wissenschaft Vorschub leisteten. Die Glaskugel- oder Glascylindermaschine wurde auch verlassen und man gieng noch lange Zeit hindurch auf die Reibung von Glasröhren mittelst der Hand zurück.

5. Elektrische Leitung. Einige Jahre später ist ein anderer englischer Physiker, Stephen Gray, nachdem er wie seine Vorgänger der Gruppe der elektrischen Körper, d. h. jener, welche man durch Reiben elektrisch machen kann, eine Anzahl neuer Körper, so z. B. Federn, Haare, Leinen, Wolle, Papier, Fell, Holz, Pergament, Goldschlägerhäutchen (¹) hinzugefügt hatte, zu einer wichtigen Entdeckung gelangt. Er versuchte direct Metalle durch Reiben elektrisch zu machen, es gelang ihm jedoch nicht; er erinnerte sich, dass eine elektrisierte Glasröhre im Dunkeln leuchtete und diesen Lichtschein verschiedenen Körpern mittheilte, mit welchen man sie in Berührung brachte; daraus schloss er, dass das Glas diesen Körpern auch seine elektrische Kraft mittheilen kann. Er nahm nun eine Glasröhre von $3^1/_2$ Fuß Länge und von mehr als einem Zoll im Durchmesser und schloss deren beide Enden mit Korkpfropfen; die Röhre wurde in der gewöhnlichen Weise gerieben und leichten Körpern genähert (²).

Er sah eine Flaumfeder sich gegen den Korkstöpsel bewegen und es wurde dieselbe ebenso angezogen und hierauf abgestoßen, wie durch die Röhre selbst; hieraus schloss Gray, dass die elektrisierte Röhre dem Korkpfropfen anziehende Kraft mittheilte. Hierauf steckte er in den Korkpfropf ein Tannenstäbchen von ungefähr 4 Zoll Länge, an dessen Ende eine Elfenbeinkugel sich befand; als er das Experiment wiederholte, sah er, dass die Kugel die Feder anzog und abstieß, sogar mit einer größeren Kraft, als es beim Korkpfropf der Fall war. Er befestigte hierauf die Elfenbeinkugel an Holz- oder Metallstäbchen von immer zunehmender Länge und constatierte, dass die Kugel immer eine Anziehung ausübte, die sogar stärker war, als für jeden anderen Punkt des Stäbchens. Da Gray diesen Versuch ausdehnen wollte, hieng er die Kugel an die Glasröhre mittelst Schilfrohres oder mittelst eines Bindfadens, später mittelst einer 26 Fuß langen Schnur, die er von einem Balkon herabhängen ließ; immer zog die Kugel leichte Körper an, welche man ihr näherte. Um noch zu größeren Entfernungen übergehen zu können, versuchte

(¹) Philosophical transactions abridged, vol. VI., p. 493 (1720).
(²) Ibid., vol. VII. p. 449 (1727).

er die elektrische Kraft einer horizontal gespannten Schnur, die an einer Mauer befestigt war, mitzutheilen, was ihm anfangs nicht gelang.

Wheeler, welchem Gray diese Resultate bekannt machte, schlug dem letzteren vor, die Schnur mittelst eines Seidenfadens an die Mauer zu befestigen, welcher wegen seiner Feinheit ohne Zweifel eine geringere Menge elektrischer Kraft entweichen lassen würde. In dieser Weise wurde das Experiment am 2. Juli 1729 gemacht. Eine Schnur von 80 Fuß Länge wurde mit dem einen Ende an die Glasröhre befestigt, während die Schnur am anderen Ende zunächst an einem Seidenfaden aufgehängt war, hierauf vertical herunterfiel, und an ihrem unteren Theile eine Elfenbeinkugel trug.

Wurde die Röhre gerieben, so zog die Elfenbeinkugel sogleich kleine Kupfertheilchen an, welche einige Zeit an ihr haften blieben. Das Experiment gelang in gleicher Weise mit einer Schnur von 124 Fuß, die entweder hin und her geführt wurde oder in gerader Linie gespannt war. Am andern Tage, als die beiden Experimentatoren die Schnur noch verlängern wollten, zerriss die Seide und sie versuchten nun dieselbe durch einen Metalldraht zu ersetzen; sie erhielten aber dann nicht mehr die Erscheinung der Attraction und daraus schloßen sie, dass die Seide in Wirklichkeit eine specielle Eigenschaft besitze, vermöge welcher sie der elektrischen Kraft keinen Durchgang gestatte. Sie nahmen es als Regel an, nur Seidenfäden als Befestigungsmittel anzuwenden und pflanzten die elektrische Kraft bis 765 Fuß fort, ohne dass die Wirkung merklich geschwächt wurde; die beiden Forscher erkannten, dass die Elektricität in allen möglichen Richtungen quer durch Körper von was immer für einer Gestalt und von der mannigfaltigsten Beschaffenheit fortgeleitet wird, so durch die Metalle, die Steine, lebende oder todte Wesen und durch den menschlichen Körper.

Gray berührte nämlich mit der elektrisierten Röhre ein mittelst Haarschnüren schwebend erhaltenes Kind oder stellte es auf einen Harzkuchen und sah, dass dieses Kind mit seinen Fingern und allen Theilen seiner Kleidung leichte ihm dargebotene Körper anzog (1).

(1) Phil. trans. abridged, vol. VII., p. 567 (1731).

Er zog aus dieser letzten Beobachtung einen wichtigen Schluss, nämlich den, dass alle bekannten elektrischen Körper, d. h. jene, welche durch Reibung elektrisch gemacht werden können, wobei man sie in der Hand hält, keine Elektricitätsleiter sind; denn wären sie Elektricitätsleiter, so würde die elektrische Kraft durch die Hand in den Körper des Beobachters und von da in den Erdboden abgeleitet werden.

Wir fügen noch bei, dass Gray auch die Elektrisierung durch Influenz gefunden hat, aber ohne mehr als seine Vorgänger die Tragweite dieser Beobachtung zu erfassen. Er bemerkte nämlich, dass eine isolierte Schnur elektrische Eigenschaften annahm, wenn man ihr eine elektrisierte Röhre näherte, ohne dass der Contact nöthig gewesen wäre, und dass diese Eigenschaften sich vorzüglich in jenen Punkten der Schnur zeigen, welche am meisten von der Glasröhre entfernt sind.

Man kann daher seit Gray zwei Classen von Körpern unterscheiden: Leiter und Nichtleiter, obwohl diese Bezeichnung erst später in Anwendung gebracht wurde([1]). In Wirklichkeit kann diese Unterscheidung, wie man sehen wird, nicht in unbedingter Weise festgestellt werden; alle Körper leiten die Elektricität mehr oder weniger gut, und es besteht nur ein wirklicher Unterschied in dem Grade, in welchem sich diese Eigenschaft manifestiert. Es wird daher genauer sein, eine einzige Liste aller Körper zu bilden, in welcher man mit jenen beginnt, welche wie die Metalle am besten leiten und mit jenen endigt, welche wie die Seide am schlechtesten leiten. Die letzteren werden oft isolierende Körper genannt, weil sie dazu dienen, die leitenden Körper elektrisiert zu erhalten und vom Erdboden zu isolieren.

6. Wir wollen die folgende Liste([2]) wiedergeben, in welcher die Körper in drei Gruppen getheilt und classificiert sind:

([1]) Desaguliers, ein Mitglied der Londoner kgl. Gesellschaft, führte die Bezeichnung Leiter (Conductores) und nichtleitende oder elektrische Körper (corpora electrica per se) ein; unter letzteren verstand er jene, welche beim Reiben elektrisch werden. Seine elektrischen Untersuchungen fallen in die Jahre 1739—1742.

([2]) Encyclopaedia metropolitana. London (1830). — Electricity. 72.

in Leiter, Halbleiter und Isolatoren, wobei wir in Erinnerung bringen, dass diese Classification keine absolute Bedeutung haben kann.

Leiter: gewöhnliche Metalle, calcinierte Kohle, Graphit, concentrierte Säuren, verdünnte Säuren, Salzlösungen, Meerwasser, Quellenwässer, Regenwasser, Schnee, lebende Pflanzen, thierische Organe, lösliche Salze, Leinen, Baumwolle.

Halbleiter: Alkohol und Äther, pulverisiertes Glas, Schwefelblüte, trockenes Holz, Marmor, Papier, Stroh, Eis bei 0°.

Isolatoren: trockene Metalloxyde, dicke Öle, vegetabilische und animalische Asche, Eis bei 20°, Phosphor, Kalk, Kreide, Lycopodiummehl, Kautschuk, Kampfer, Essenzen, Porzellan, getrocknete Pflanzen, Leder (Fell), Pergament, trockenes Papier, Federn, Haare, Wolle, gefärbte oder rohe Seide, Edelsteine, Glimmer, Glas, Achat, Wachs, Schwefel, Harz, Bernstein, Schellack, Luft und trockene Gase.

Die Leitungsfähigkeit eines Körpers für Elektricität kann überdies durch mannigfaltige Umstände geändert werden. So bewirkt im allgemeinen eine Temperaturserhöhung eine Vergrößerung der Leitungsfähigkeit. Wenn der isländische Spath eine Temperatur erhält, die ein wenig höher als jene der Hand ist, so kann er nicht mehr durch Reiben elektrisiert werden, weil er ein Conductor geworden ist; er erhält aber vom neuen seine isolierende Eigenschaft, wenn man ihn wieder erkaltet (1).

Canton beobachtete, dass bei einer mäßigen Erwärmung die Elektricität durch dünne Glasschichten geht, wie z. B. durch die Wandungen einer Flasche, und Cavendish zeigte, dass eine Temperatur von 400° Fahrenheit dem Glase eine Leitungefähigkeit verleihen kann, welche jener der Metalle analog ist, selbst dann, wenn man dicke Schichten anwendet.

Dasselbe gilt für Gase und Dämpfe. Es genügt in die Nähe eines elektrisierten Körpers die Flamme einer leitenden Lampe, die mit dem Erdboden in Verbindung steht, zu bringen, um jede Spur von Elektricität verschwinden zu sehen. Es genügt sogar unter einen elektrisierten Körper ein roth glühendes Eisen

(1) Man sehe Priestley, Geschichte der Elektricität.

zu legen, um denselben schnell wieder in den neutralen Zustand zu bringen und es ist leicht zu zeigen, dass die Mittheilung zwischen den beiden Körpern durch den erwärmten Luftstrom erfolgt, welcher vom rothglühenden Eisen sich erhebt.

Die Feuchtigkeit übt auch einen beträchtlichen Einfluss auf die Leitungsfähigkeit eines Körpers aus. So sind lebende Pflanzen gute Leiter der Elektricität, trockenes Holz leitet schon viel weniger gut und Holz, welches im Ofen ausgetrocknet wurde, ist fast ein ebensoguter Isolator, wie Glas. Überdies sind die meisten festen Körper hygrometrisch, wenigstens an ihrer Oberfläche; dieselbe bedeckt sich mit einer leichten Flüssigkeitsschichte und die Körper erhalten an ihrer Oberfläche eine sehr merkliche Leitungsfähigkeit; dies ist ein Umstand, auf welchen man sein Augenmerk richten muss, wie wir gelegentlich der Besprechung der Zerstreuung der Elektricität sehen werden.

7. Durch die Untersuchungen von Gray und der meisten Physiker des verflossenen Jahrhundertes konnte nicht die Zeit festgesetzt werden, welche nothwendig ist, damit die Elektricität in der ganzen Ausdehnung eines Conductors, wie auch immer seine Dimensionen sein mögen, sich fortpflanze. Die Mittheilung der elektrischen Eigenschaften erschien immer für jede Distanz momentan vor sich zu gehen, sei es nun durch Metalldrähte von mehreren Meilen Länge oder durch den menschlichen Körper, durch das Wasser der Flüsse oder durch die Erde selbst. Gleichwohl glaubte P. Beccaria(1) erwiesen zu haben, dass, als er das eine Ende eines dünnen Eisendrahtes von 500 Fuß Länge elektrisierte, die Anziehung leichter Körper von Seite des anderen Endes sich erst am Ende einer halben Secunde zeigte; als er denselben Versuch mit einer Hanfschnur wiederholte, verflossen mehr als drei Secunden, bevor das andere Ende so hinlänglich elektrisiert war, dass es leichte Körper anzog; als er aber die Schnur befeuchtete, war die Fortpflanzung zwei- oder dreimal schneller. Dieser Versuch zeigt, dass die Dauer der Fortpflanzung der Elektricität nicht unmessbar klein ist, wenigstens dann, wenn die Körper mittelmäßige Leiter sind.

(1) Elettricismo artificiale e naturale, p. 51. — Priestley, t. I, p. 387.

Man bezeichnet oft die Erde als das gemeinschaftliche Elektricitäts-Reservoir, um durch ein Wort auszudrücken, dass die elektrischen Eigenschaften eines leitenden Körpers in dem Momente total verschwinden, in welchem derselbe durch einen zwischenliegenden Körper mit dem Erdboden verbunden wird. Man begreift nämlich, dass die elektrischen Eigenschaften eines Körpers, der einmal mit einer ungeheueren Masse, wie es jene der Erde ist, in Verbindung gebracht wird, in einem Punkte keine nennenswerten Effecte mehr hervorrufen können; wir werden später in präciserer Weise sehen, wie die Rolle der Erde in diesem Falle zu verstehen sei.

Alle bekannten elektrischen Körper sind, wie wir gesehen haben, nothwendigerweise schlechte Leiter der Elektricität oder Isolatoren; umgekehrt kann ein Leiter im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht elektrisch werden, weil, wenn man ihn in der Hand hält und durch Reiben elektrisiert, die elektrische Kraft in den Körper des Experimentators und von da in den Boden übergeht. Wir können auch die diesen beiden Sätzen reciprok gegenüberstehenden Sätze behaupten, d. h., dass ein isolierender Körper elektrisch ist und dass ein nicht elektrischer Körper ein Leiter ist, da wir bald sehen werden, dass irgendein Körper, der — wenn es nothwendig ist — isoliert ist, durch Reiben elektrisch gemacht werden kann.

Im letzten Jahrhunderte bezeichnete man idioelektrische Körper jene, welche man durch Reiben elektrisieren kann, wobei man sie in der Hand hält, und anelektrische Körper solche, welche man unter diesen Bedingungen nicht elektrisieren kann.

Wenn jeder Körper elektrisiert werden kann, so hat man keinen Grund, diese Bezeichnungen beizubehalten, da sie in Wirklichkeit sich nur auf die isolierenden und leitenden Körper beziehen.

Zur Zeit der Versuche von Gray über die Leitungsfähigkeit befestigte sich Du Fay, Mitglied der Akademie der Wissenschaften [1], an Seidenschnüren und machte sich elektrisch; er bemerkte, dass, wenn eine zweite Person die Hand bis auf eine kleine Entfernung seinem Gesichte nahe

[1] Mémoires de l'Académie des sciences (1733), p. 250.

brachte, er einen schwachen Schmerz ähnlich einem Nadelstiche empfand, und dass die Person, welche die Hand näherte, denselben Eindruck bekam, dass ferner gleichzeitig ein schwaches Knistern entstand und im Dunkeln ein Lichtschimmer sich zeigte. Dies ist der erste elektrische Funke, welcher dem menschlichen Körper entlockt wurde. Als Gray seine Versuche wiederholte, erkannte er, dass man ebenso aus isolierten Körpern, welche man mittelst einer Glasröhre elektrisiert hat, Funken ziehen kann und dass diese Körper oft, hauptsächlich dann, wenn sie in Spitzen endigen, einen Lichtkegel oder ein von schwachem Zischen begleitetes Strahlenbündel entweichen lassen, und er fügt hinzu:

„Obgleich diese Wirkungen bis jetzt nur ganz im kleinen hervorgerufen wurden, so ist es doch wahrscheinlich, dass man mit der Zeit die Art und Weise finden wird, um eine größere Menge elektrischen Feuers (feu électrique) zu sammeln und demzufolge die Intensität dieser Erscheinung zu erhöhen, welche nach diesen Versuchen — wenn es überhaupt gestattet ist, Kleines mit Großem zu vergleichen — von derselben Natur zu sein scheint, wie der Blitz und der Donner.“ (¹)

8. Unterscheidung der beiden Elektricitäten. Du Fay (²) hat weiter eine wichtige Entdeckung gemacht; er war es, der die Unterscheidung der beiden Elektricitätsarten in die Wissenschaft einführte. Er erörterte zunächst genau die Bedingungen, unter welchen die von Otto v. Guericke beobachtete elektrische Abstoßung erfolgt und erkannte, dass ein elektrisierter Körper alle anderen Körper anzieht, welche es nicht sind, und dieselben abstößt, sobald sie durch Berührung elektrisch gemacht wurden (entsprechend den Versuchen von Gray). Die Abstoßung hört nur dann auf, wenn die abgestoßenen Körper ihre elektrische Kraft durch Berührung mit einem fremden Körper verloren haben. Sie können dann neuerdings angezogen, hierauf abgestoßen werden und dieser Wechsel wiederholt sich so lange, als der ursprünglich elektrisierte Körper seine Eigenschaften behält. Als Du Fay gleichzeitig eine Glasröhre und ein Stück Kopal-

(¹) Phil. trans. abridged, vol. VIII., p. 5 (1735).
(²) Mémoires de l'Académie des sciences (1733), p. 457.

gummi gerieben hatte, bemerkte er zufällig, dass ein Seidenfaden, der vom Glase angezogen und nach erfolgter Elektrisierung von demselben abgestoßen wurde, von dem Gummi hierauf eine Anziehung erfuhr und dass umgekehrt alle Körper, die vom Gummi abgestoßen wurden, von Seite des Glases angezogen wurden. Du Fay machte dasselbe Experiment mit Harz und Glas, es wurde die Erscheinung durch eine große Anzahl mannigfaltiger Versuche als richtig erwiesen; er unterscheidet zwei Arten von Elektricität: eine Glaselektricität, welche sich beim Reiben des Glases, des Bergkrystalles, der Edelsteine, der thierischen Haare, der Wolle u. s. w. entwickelt; die zweite Harzelektricität, welche man erhält, wenn man Harz, Kopalgummi, Schellack, Seide, Papier etc. reibt. „Es ergeben sich daher aus dieser Abhandlung," sagt Du Fay, „bezüglich dieses Gegenstandes zwei neue Wahrheiten und zwei Grundsätze, von denen man bisher nicht die geringste Ahnung gehabt hat: der erste nämlich, dass die elektrischen Körper anfänglich alle Körper anziehen und dass sie dieselben nur dann abstoßen, wenn sie letztere durch Mittheilung elektrisch gemacht haben; und der zweite, dass es zwei Elektricitäten gibt, die wirklich unterschieden werden können und voneinander sehr verschieden sind." (¹)

Da dieses Experiment von Du Fay grundlegend ist, ist es wichtig, dasselbe in einer zur Demonstration geeigneten Weise anzugeben. Zu diesem Zwecke bedient man sich eines isolierten elektrischen Pendels, d. h. eines leichten Körpers, etwa einer Hollundermarkkugel (Fig. 1), welche an einem Seidenfaden aufgehängt ist, und nähert demselben eine durch Reiben elektrisch gemachte Glasröhre. Die Kugel wird zuerst angezogen (Fig. 2), nachdem sie das Glas berührt hat, aber abgestoßen (Fig. 3); sie ist dann ebenso elektrisch wie das Glas. Hierauf nähert man ihr einen auf dieselbe Art elektrisierten Harzstab und man findet, dass ganz im Anfange eine Anziehung statthat. Dennoch ist der Versuch, in dieser Weise angestellt, noch nicht absolut beweisend, denn es kann die Anziehung, welche man in dem letzten Falle beobachtet, davon herrühren, dass der eine der beiden Körper, entweder die Hollundermarkkugel

(¹) Loc. cit., p. 475.

oder der Harzstab, allein elektrisch ist. Nachdem man diese Anziehung festgestellt hat, darf man daher nicht die Berührung eintreten lassen und muss dann nachweisen, dass die Kugel durch einen im natürlichen Zustande befindlichen Körper eine Anziehung erfährt und dass der Harzstab leichte Körperchen zu attrahieren im Stande ist.

Der Versuch ist vollständiger, wenn man gleichzeitig zwei elektrische Pendel anwendet, die wir mit a und b bezeichnen wollen. Man reibt mit der Hand oder mit einem Tuchstücke einen Glasstab A und einen Harzstab B; nun nähert man einzeln den Glasstab A dem Pendel a und den Harzstab B dem Pendel b und beobachtet, dass jedes der Pendel von

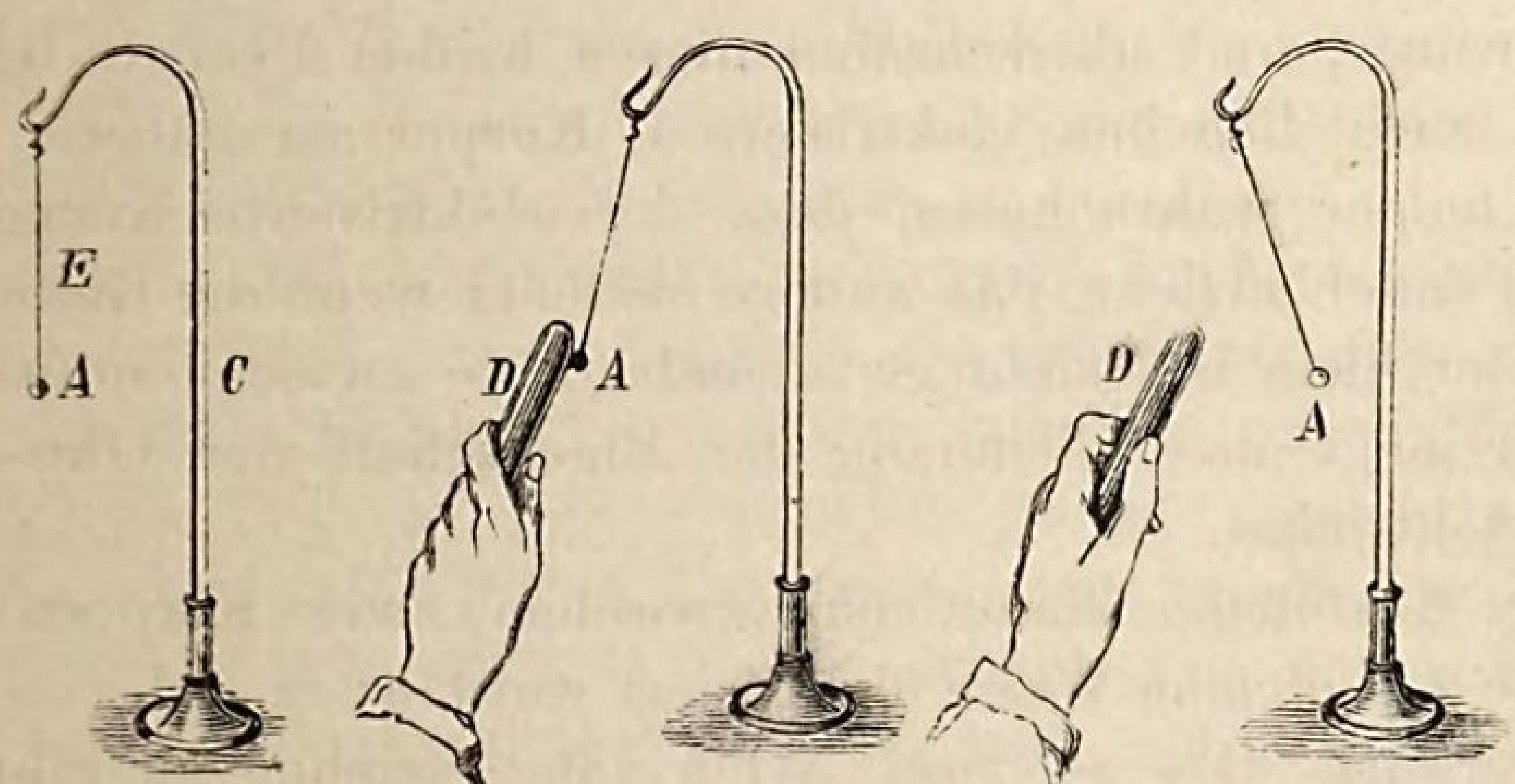


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

dem elektrisierten Körper angezogen wird, nach erfolgter Berührung jedoch eine Abstoßung erfährt. Man kehrt sodann den Versuch um, indem man dem Pendel a den Harzstab B und dem Pendel b den Glasstab A nahe bringt; es zeigt sich beiderseits eine Anziehung; man lässt hiebei die Pendel nicht soweit gehen, bis sie die Stäbe berühren. Um zu zeigen, dass in diesem zweiten Versuche die vier Körper elektrisch sind, genügt es den ersten Versuch zu wiederholen, indem man A dem Pendel a und B dem Pendel b nähert; beide Pendel werden noch immer abgestoßen. Man kann daher behaupten, dass das mittelst des Glasstabes elektrisierte Pendel a vom elektrisierten Glasstabe abgestoßen und vom elektrisierten Harzstabe angezogen wird; umgekehrtes findet bezüglich des

Pendels B statt. Zwei Körper also, welche dieselbe Elektricität, Glas- oder Harzelektricität, besitzen, stoßen sich ab; zwei in verschiedener Weise elektrisierte Körper ziehen sich an.

Man kann noch mehrere auf diesen Gegenstand bezügliche Beobachtungen machen. Man hat festgestellt, dass es zwei Arten gibt, um die Körper zu elektrisieren, man hat aber noch nicht bewiesen, dass nicht noch andere existieren, die im Stande sind, Veranlassung zu Erscheinungen zu geben, welche von den vorhergehenden verschieden sind. Um zu zeigen, dass es eine solche nicht gibt, genügt es zwei isoliert aufgehängte elektrische Pendel zu nehmen, von denen das eine mittelst eines Glasstabes, das andere mittelst eines Harzstabes elektrisiert wurde, und abwechselnd diesen beiden Pendeln irgendeinen nach Belieben elektrisierten Körper zu nähern. Man wird immer wahrnehmen, dass der elektrisierte Körper das eine Pendel anzieht, das andere abstößt; wenn die Entferuung nicht zu klein ist, zieht er niemals beide an oder stößt beide ab; er zeigt also vollständig die Eigenschaft der Glas- oder Harzelektricität.

Die Abstoßung findet nur zwischen zwei Körpern statt, welche auf gleiche Weise elektrisiert wurden; es scheint aber andererseits, dass es zwei Arten von Anziehungen gibt: die eine zwischen Körpern, die mit verschiedenen Elektricitätsmengen geladen sind, die andere zwischen einem elektrisierten und einem natürlichen Körper. Dieser Widerspruch ist nur scheinbar, denn wir werden bei der Erörterung der Influenzerscheinungen sehen, dass jede Anziehung zwischen einem elektrisierten und einem natürlichen Körper von der Hervorrufung einer Elektricität begleitet ist, welche auf dem natürlichen Körper entsteht und jener des elektrischen Körpers entgegengesetzt ist.

9. Du Fay bemerkte nicht, dass die Bezeichnungen „Glas- und Harzelektricität," welche den beiden Elektricitätsarten beigelegt wurden, mangelhaft sind, weil die Natur der auf einem geriebenen Körper hervorgerufenen Elektricität von dem reibenden Körper abhängt. Diese Beobachtung scheint zuerst Canton im Jahre 1753 gemacht zu haben. Canton

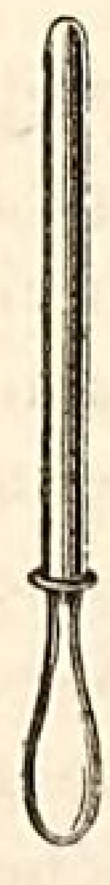
zeigte zuerst, dass man auf einer Siegellackstange die eine oder die andere Elektricitätsart, und sogar beide gleichzeitig hervorbringen kann. Er rieb eine Siegellackstange, die sich somit mit Harzelektricität geladen erwies; an einer Stelle ihrer Oberfläche berührte er sie mit einem elektrisierten Glasstabe, und fand, dass von den beiden Stellen der Stange die erste Harz-, die zweite Glaselektricität hatte. Er fand auch, dass ein Glasstab, dem durch Schmirgel der Glanz benommen wurde, Harzelektricität annahm, wenn man ihn mit Flanell rieb, hingegen Glaselektricität, wenn man ihn mit einem Stoffe von geölter Seide, der trocken ist, reibt, hauptsächlich dann, wenn man ein wenig Kreide oder Spanischweiß darauf gegeben hat. Dieselben Erscheinungen kann man mit anderen Substanzen wiederholen und es genügt, die Oberfläche zu ändern oder den reibenden Körper zu wechseln, um die Natur der hervorgerufenen Elektricität zu variieren.

Um diesem in der Ausdrucksweise herrschenden Widerspruche zu entgehen, nennt man gewöhnlich die Glaselektricität, d. h. jene, welche auf poliertem Glase durch Reiben mit einem Tuche hervorgerufen wird, positive Elektricität, und jene des auch mit dem Tuche geriebenen Harzes negative Elektricität. Diese beiden Worte „positiv“ und „negativ“ entstammen einer von Franklin geschaffenen Hypothese über die Natur der elektrischen Erscheinungen; man kann sie aber als einfache Bezeichnungen annehmen, ohne ihrer buchstäblichen Bedeutung Wichtigkeit beizumessen.

10. Gleichzeitige Erzeugung der beiden Elektricitäten. Wenn man zwei Körper miteinander reibt, so unterscheidet sich in nichts der geriebene vom reibenden Körper, und wenn der eine von ihnen elektrisch wird, ist es natürlich, dass auch der andere elektrische Eigenschaften erlangt hat. Zur Zeit der Versuche von Canton fand man, dass in der That alle zwei geriebenen Körper elektrisch werden, wenn sie nicht gute Leiter sind, und man zeigte durch eine große Zahl merkwürdiger Experimente, dass die geringsten Änderungen in den physikalischen Eigenschaften der sich berührenden Körper, so in der Farbe, der größeren oder geringeren Rauhigkeit der Oberfläche, dem Temperaturunterschiede u. s. w. genügen, um den Sinn der

Elektrisierung zu ändern. Es vergiengen aber noch mehrere Jahre, bevor man entdeckte, dass alle Körper, welche gerieben werden können, gleichzeitig elektrische Kraft annehmen und dass die leitenden Körper, z. B. die Metalle, die Eigenschaft der Elektrisierung durch Reibung deshalb nicht zu besitzen scheinen, weil die an ihnen hervorgerufene Elektricität in den Boden verschwindet.

Wilson(1) der diese Beobachtung zuerst gemacht zu haben scheint, rieb eine Glasplatte mit einem Silberstück, welches von einem Griffe aus im Ofen getrocknetem Holze getragen wurde und fand, dass das Silber negative Elektricität annahm, während die Glasplatte mit positiver Elektricität geladen war. Das Experiment gelang mit allen Metallen, wenn man nur für deren Isolierung Sorge trug; es genügt, eine Stange oder eine Kugel aus Metall mittelst eines Glasgriffes (Fig. 4) zu halten und mit Seide zu reiben oder noch besser mit einem Katzenfelle zu peitschen, um nachzuweisen, dass das Metall negativ elektrisch wird und dass man demselben mittelst der Hand Funken von mehreren Centimetern Länge entlocken kann. Die Erscheinung ist überhaupt allgemein: zwei Körper mit einander gerieben nehmen immer Elektricitäten von verschiedener Natur an.


Fig. 4.

11. Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass die elektrischen Eigenschaften, welche zwei sich reibende Körper erlangen, wiewohl sie von verschiedener Art sind, dennoch gleiche Effecte im Gefolge haben und dass (noch allgemeiner) jedesmal, wenn eine gewisse Menge positiver Elektricität auf einem Körper entsteht, gleichzeitig auf einem oder mehreren anderen eine äquivalente Menge negativer Elektricität hervorgerufen wird.

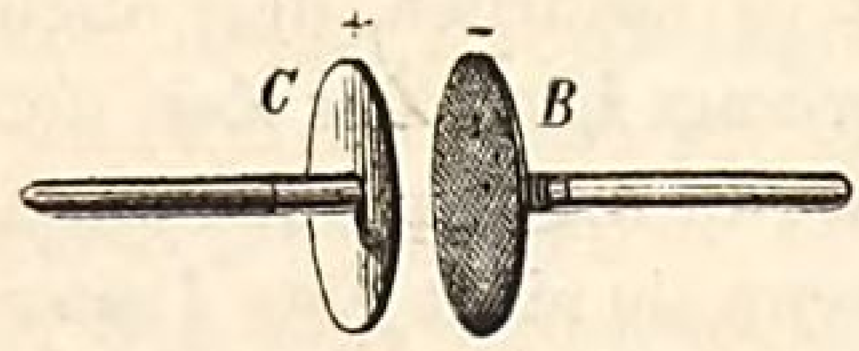


Fig. 5.

Eines der ersten Experimente, durch welches man diese Thatsache nachwies, wurde von Aepinus(2) angestellt.

(1) Phil. trans. abridged, vol. XI. pag. 504 (1760).

(2) Aepini tentamen theoriae electricitatis et magnetismi, p. 63 (1759).

Man nimmt zwei Scheiben von demselben Durchmesser, die eine aus poliertem Glase C (Fig. 5), die andere B aus mit Tuch überzogenem Holze. Diese Scheiben wurden von Glasgriffen getragen; man rieb die eine an der andern, und näherte sie sodann einzeln zwei isolierten elektrischen Pendeln; man erfährt, wenn man in der oben angedeuteten Weise vorgeht, dass die Scheiben in verschiedenem Sinne elektrisch sind, und zwar das Glas positiv und das Holz negativ elektrisch. Um zu zeigen, dass die einerseits und andererseits entwickelten Elektricitätsmengen gleich sind, beginnt man das Experiment vom neuen und lässt die beiden Scheiben, nachdem sie gerieben wurden, in Berührung; man nähert sie gleichzeitig einem Pendel, das im natürlichen Zustande sich befindet und das an einem leitenden Leinenfaden aufgehängt ist; es zeigt sich keine Wirkung. Trennt man sodann die beiden Scheiben, ohne sie vom neuen zu reiben, so ersieht man, dass jede von ihnen allein das Pendel anzieht und dass sie entgegengesetzte Elektricitäten besitzen. Dieser Versuch gelingt mit zwei Scheiben von was immer für einer Beschaffenheit, sogar dann, wenn sie aus identischen Substanzen gebildet sind, wie Aepinus nachgewiesen hat. Es besteht immer, sei es in der physikalischen Beschaffenheit der beiden Scheiben, sei es in der Art und Weise ihrer Reibung, irgendein Unterschied, welcher hinreicht, um einen Unterschied in ihrem elektrischen Zustande hervorzurufen.

Es kann sonderbar erscheinen, dass zwei elektrisierte Körper, von denen sowohl der eine als auch der andere ein und dasselbe Pendel, welches sich im natürlichen Zustande befindet, anziehen können, keinen Effect hervorrufen, wenn sie zugleich wirken, als ob zwei parallele und gleichgerichtete Kräfte eine resultierende Null haben könnten. Um diesen Versuch zu verstehen, muss man wissen, dass — wie bereits schon gesagt wurde und wie bei der Besprechung der Influenzphänomene gezeigt werden wird — wenn ein elektrisierter Körper einen anderen ursprünglich im neutralen Zustande befindlichen anzieht, dieser letztere dann in entgegengesetzter Weise elektrisiert sich befindet. Das Pendel, welches gleichzeitig der Wirkung der positiven Glasscheibe und der negativen Holz-

scheibe unterworfen ist, strebt negative Elektricität unter dem Einflusse der ersten, positive Elektricität unter dem Einflusse der zweiten anzunehmen und es bleibt im natürlichen Zustande, weil diese beiden Wirkungen einander gleich sind. Man kann daher sagen, dass die entgegengesetzten Elektricitätsmengen, welche durch Reiben entwickelt werden, gleich sind, da sie in derselben Entfernung gleiche und entgegengesetzte Wirkungen hervorrufen.

Man kann diesen Versuch in einer Weise vornehmen, welche vom theoretischen Standpunkte einfacher ist, indem man die eine auf der anderen der beiden aus isolierenden Substanzen bestehenden Scheiben reibt und sie einzeln auf zwei Hollundermarkkugeln wirken lässt, welche an den beiden Enden einer Glasnadel befestigt sind, die sich um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Axe drehen kann; es würden dann die beiden Anziehungen gleich sein und die Nadel würde im Gleichgewichte sich befinden, wenn die Kugeln in gleichen Entfernungen von den entsprechenden Scheiben sein würden. In dieser Form jedoch ist das Experiment nicht ausführbar, weil die Nadel in einem nicht stabilen Gleichgewichtszustande sein würde. Es würde genügen, jede der Kugeln mit der entsprechenden Scheibe zu berühren, um Abstoßungen zu erhalten: das Gleichgewicht würde dann stabil sein und würde für die gleiche Lage der Nadel stattfinden; damit der Versuch gelinge, würde es aber nothwendig sein, dass die Scheiben — was ihre Leitungsfähigkeit anlangt — identisch seien, endlich auch, dass jede Kugel denselben Bruchtheil der Gesammtelektricität der Scheibe, welche erstere berührt, aufnehmen würde, was schwer zu erreichen wäre. Die einzig mögliche experimentelle Bestätigung besteht daher darin, dass man die Wirkung der beiden geriebenen in Berührung gelassenen Körper untersucht.

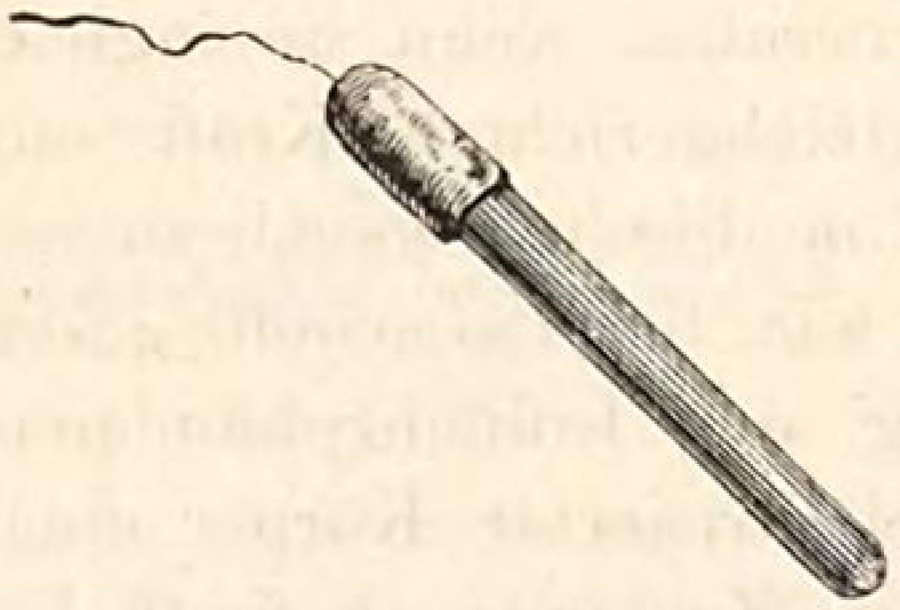


Fig. 6.

Man kann diesen Versuch in einer noch einfacheren Weise ausführen, wie Faraday angegeben hat. Man reibt eine Siegellackstange (Fig 6) mit einer Seidenkappe, welche an einem Seidenfaden

befestigt ist. Lässt man hierauf die Kappe auf der Siegellackstange sitzen und nähert man das Ganze einem Pendel oder irgendeinem leichten Körper, so beobachtet man keine Wirkung. Es genügt dann, die Kappe mittelst der Seidenschnur wegzuheben, um festzustellen, dass die Stange und ebenso die Kappe elektrisch sind, und dass beide Elektricitäten von verschiedener Art sind.

Aepinus hat ebenfalls mittelst eines anderen Experimentes, in welchem die Reibung keine Rolle zu spielen scheint, diese gleichzeitige Hervorrufung der beiden Elektricitäten erkannt(1). Als er geschmolzenen Schwefel in eine von einem isolierenden Stative getragene Metallschale goss, beobachtete er, dass wenn der Schwefel erkaltet war, die Schale und der Schwefel zusammen keine Spur von Elektricität zeigten. Wenn man den Schwefel mittelst eines Stabes, den man in denselben hineinsteckte, als er noch nicht fest war, heraushebt, so weist man nach, dass der Schwefel positiv, die Schale negativ elektrisch ist; legt man dann den Schwefel wieder an seine Stelle, so verschwindet alle Elektricität, um vom neuen zu erscheinen, wenn man den Schwefel wieder von der Schale trennt.

12. Es kommen somit die beiden Elektricitäten immer gleichzeitig bei der Reibung vor und es gibt keine Substanz, welche nicht in dieser Weise elektrisiert werden könnte. Den schon erwähnten Versuchen kann man noch viele andere anreihen, wie z. B. die Elektrisierung des menschlichen Körpers. Eine Person wird an Seidenschnüren befestigt, wie man es im letzten Jahrhunderte machte, oder auf einen Isolierschemel gestellt, der aus einem Tischchen, das auf Glasfüßen ruht, besteht. Schlägt man die Person mit einem Katzenfell, so wird sie elektrisiert, zieht leichte Körper an und ruft Funken hervor, wenn sie ihre Hand einem mit der Erde in Verbindung stehenden Gegenstande nähert. Ist die schlagende Person auch isoliert, so wird sie ebenfalls elektrisch, aber positiv, während die andere negative Elektricität hat; wenn nun beide mit den Händen sich berühren, so entsteht ein stärkerer Funke. Dieser Funke ist von einem Schmerze, der einem Nadelstiche ähnlich ist, und einer Erschütterung in den

(1) Loc. cit., p. 66.

Armen begleitet. Die Elektricitätsmenge ist in diesem Falle so groß, dass die Kopf- und Barthaare sich infolge ihrer gegenseitigen Abstoßung sträuben und auf der Haut ein Gefühl hervorgerufen wird, als ob man in ein Spinngewebe gerathen würde; im Dunkeln erscheinen die Haarspitzen leuchtend.

Durch Reiben der Flüssigkeiten mit festen Körpern erhält man dieselben Resultate, wie durch die gegenseitige Reibung der festen Körper.

Schon Hauksbee hat gezeigt, dass die Reibung des Quecksilbers an dem Glase im luftleeren Raume einen Lichtschimmer erzeugt, wie man öfters beobachtet, wenn man das Quecksilber mit dem oberen Theil einer Barometerröhre zur Berührung bringt.

Canton[1] beobachtete, dass eine trockene Glasröhre, in ein Quecksilberbad getaucht, positiv elektrisch wird; dass der Bernstein, das Siegellack, der isländische Spath es ebenso werden, während in allen diesen Fällen das Quecksilber negativ wird. Macht man dieses Experiment und lässt den Glasstab in einer Glaseprouvette, welche das Quecksilber umfasst, eingetaucht, so beobachtet man keine Spur von Elektricität, so lange der Glasstab eingetaucht ist, während die Elektrisierung des Quecksilbers und jene des Glases immer mehr zum Vorschein kommen, je mehr man den Stab herauszieht.

Die Erscheinung ist noch bemerkbarer in dem Experimente, welches unter dem Namen Quecksilberregen bekannt ist. Eine Glasröhre, die auf eine Luftpumpe gesetzt wird, ist an der oberen Seite von einem Napf mit metallischen Rändern begrenzt; der Boden dieses Napfes ist aus einer Buchsbaumplatte gebildet, welche perpendiculär zur Richtung ihrer Fasern geschnitten ist. Dieser Napf ist mit Quecksilber gefüllt. Nun verdünnt man die Luft in der Glasröhre, indem man die Pumpe in Wirksamkeit setzt; das Quecksilber geht durch die Canäle des Holzes und fällt einem Regen ähnlich herab; ein kleines heberförmiges Glasgefäß, welches unten eingekittet ist, hindert das herabfallende Quecksilber, in den Luftcanal der

(1) Phil. trans. abridged, vol. XI., p. 611 (1762).

Pumpe zu dringen. Wird das Experiment im Dunkeln gemacht, so erscheint die Glasröhre ihrer ganzen Ausdehnung nach beleuchtet. Die Röhre und hauptsächlich der obere Aufsatz sind stark elektrisch; nähert man diesem Aufsatze den Finger, so erhält man Funken von mehreren Centimetern Länge.

Gleiches gilt endlich für Gase. Wilson sendete mit einem Blasebalge einen Luftstrom auf Turmalin, auf eine Glasplatte oder ein Stück Bernstein und fand, dass die verschiedenen Körper durch die Luft positive Elektricität erhielten. Die Erzeugung von Elektricität in diesem Falle rührt von der Luftreibung her, sei es an den Rändern der Ansatzröhre des Blasebalges, sei es an dem Körper, an welchem der Luftstrom gebrochen wird, sei es durch beide Ursachen auf einmal.

13. Eintheilung der Körper vom elektrischen Standpunkte. Man kann sich nun fragen, ob es eine Regel gibt, welche die Vertheilung der Elektricität bei der Reibung zweier Körper beherrscht. Da die Art der Elektricität, welche auf einem Körper sich bildet, nicht allein von der Natur des Körpers abhängt, so begreift man, dass bei der Reibung das Streben jeder Substanz, die eine der beiden, z. B. die positive Elektricität, anzunehmen, nicht dasselbe ist und dass die Art der Erscheinung von dem Grade abhängt, in welchem dieses Streben in jedem geriebenen Körper besteht. Man hat in der That beobachtet, dass, wenn ein Körper M negativ elektrisch ist, wenn man ihn mit einem Körper A reibt, und positiv, wenn er mit einem andern Körper B gerieben wird (Tuch z. B. mit Glas und Harz) durch das Reiben der beiden Körper A und B im größeren Verhältnisse positive Elektricität sich auf A und negative auf B bildet. Mit anderen Worten, es gibt eine Scala der Körper vom elektrischen Gesichtspunkte, wie eine solche der Temperaturen besteht, und man kann die verschiedenen Substanzen in eine solche Anordnung bringen, dass jede von ihnen mit einer vorhergehenden gerieben negativ elektrisch, aber positiv elektrisch wird, wenn sie mit einer folgenden gerieben wird.

Eine der ersten in dieser Weise aufgestellten Reihen ist die folgende, welche von Wilke[1] gegeben wurde:

[1] Wilke, Dissertatio inauguralis de electricitatibus contrariis, pag. 54, Rostock (1757).

Poliertes Glas.	Papier.	Blei.
Wollstoffe.	Siegellack.	Schwefel.
Federn.	Weißes Wachs.	Metalle.
Holz.	Mattes Glas.	

Die positive Elektrisierung des Bleis durch den Schwefel, welche von Wilke angegeben wurde, scheint auf einer unrichtigen Beobachtung zu beruhen. Denn es zeigte Gaugain (Compt. rend. 59, 1864), dass alle Metalle mit Schwefel gerieben negativ, mit Guttapercha positiv elektrisch werden.

Man wird bemerken, dass in dieser Reihe alle Metalle in derselben Zeile sind; dennoch ist ihre elektrische Rolle sehr verschieden, es ist aber schwer, durch directe Versuche diese Verschiedenheit zu bestimmen, weil bei der gegenseitigen Reibung zweier Metalle die auf einem von ihnen entwickelte Elektricität sich sogleich wegen der Leitungsfähigkeit dem anderen mittheilt.

Um eine Reihe aufzustellen, welche die Metalle umfasst, genügt es, eine Reihe von isolierenden Körpern zu besitzen, welche sich als Zwischenglieder zwischen die Metalle einschalten lassen, die man ordnen soll. Gaugain[1] hat sich durch eine Reihe von Versuchen die meisten dieser Glieder verschafft. Da die Metalle fast alle bezüglich des Schwefels negativ, bezüglich der Guttapercha positiv elektrisch werden, so kann man, indem man in geeigneter Weise diese beiden Substanzen vermischt, einen Theil der Glieder erhalten, die man zum Vergleiche braucht. Im Folgenden geben wir die Reihe, welche in dieser Weise von Gaugain aufgestellt wurde und welche als Fortsetzung der Reihe von Wilke betrachtet werden kann: die Metalle, welche in derselben Zeile angegeben sind, wurden bezüglich ihrer elektrischen Eigenschaften nicht unterschieden; wir werden später auf die Versuchsweise und auf die zur Erkennung des Zeichens der Elektricität angewendete Methode zu sprechen kommen.

Aluminium.	Antimon.
Blei, Cadmium, Zink.	Silber.
Eisen, Zinn.	Platin.
Kupfer, Wismut.	Quecksilber, Gold, Palladium.

[1] Annales de Chimie et de Physique, 4e série, t. VI., p. 26.

14. Dennoch darf man dieser Eintheilungsart nicht eine absolute Bedeutung beimessen. Die geringsten Veränderungen im physikalischen Zustande eines Körpers, wie man in dem Beispiele des polierten und matten Glases ersehen hat, die Spuren von fremden Substanzen, so z. B. Farbstoffe, schwache Änderungen der Temperatur und andere scheinbar unbedeutende Umstände genügen, um eine Veränderung in den Gliedern der Reihe hervorzurufen und dieselbe umzustürzen.

So hat z. B. Symmer(¹) bemerkt, dass, als er seine Strümpfe ablegte, dieselben knisterten und im Dunkeln Funken entweichen ließen. Diese Erscheinungen traten besonders dann sehr intensiv auf, wenn er auf demselben Fuße einen Strumpf aus weißer und einen aus schwarzer Seide trug. Die Strümpfe gaben nur wenig Zeichen von Elektricität, wenn sie auf dem Fuße waren oder miteinander vereinigt waren, im Momente ihrer Trennung fand man sie aber stark elektrisch, und zwar die weißen positiv, die schwarzen negativ. Wenn man sie voneinander getrennt in einer gewissen Distanz hielt, erschienen sie aufgebläht und zwar in einem derartigen Grade, dass sie die ganze Form des Fußes zeigten. Brachte man sie einander nahe, so sah man, dass zwei gleich gefärbte Strümpfe sich abstießen, bis sie einen Winkel von 30 bis 35 Graden machten, und dass zwei Strümpfe, die verschiedene Farbe hatten, sich heftig anzogen. — Wenn man ein Seidenband auf einem andern kreuzweise zu diesem gestellten reibt, so ist ebenso jenes von beiden, das parallel zu seiner Länge gerieben wird, positiv elektrisch und das andere negativ. — Sind beide Körper von derselben Natur, aber auf verschiedenen Temperaturen, und werden sie miteinander gerieben, so ist der wärmere im allgemeinen negativ elektrisch u. s. w.

Es gibt auch zuweilen specielle Unregelmäßigkeiten, von denen man sich durch eine Änderung der Oberflächenbeschaffenheit nur schwer Rechenschaft geben kann. So glaubte man allgemein, dass das Katzenfell mit allen Körpern positiv elektrisch wird, insbesonders mit poliertem Glase; Hagenbach(²)

(¹) Phil. trans. abridg. vol. XI., p. 404 (1759).

(²) Ph. Carl's Repertorium, t. VIII., p. 65 (1872). — Journal de Physique, t. II., pag. 36.

hat. nachgewiesen, dass diese Regel weit entfernt von ihrer absoluten Giltigkeit ist:

1. Wenn man das Glas in einem bestimmten Sinne reibt, und wenn man sich des Felles vom Halse oder von den Pfoten bedient, so wird das Glas negativ elektrisch; im Gegentheile positiv elektrisch, wenn man das Fell vom Rücken zum Reiben gebraucht;

2. wenn man mit dem Felle vom Halse oder von den Hinterpfoten das Glas in einem bestimmten Sinne reibt, so wird es negativ: aber positiv, wenn man es abwechselnd in dem einen oder anderen Sinne reibt;

3. eine mit einem leichten Drucke verbundene Reibung mit dem Felle der Hinterpfoten macht das Glas negativ elektrisch: ist der Druck beträchtlich, so wird es im Gegentheile positiv elektrisch;

4. ein Glasstab, der abwechselnd in den beiden Richtungen mit dem Felle der Vorderpfoten gerieben wird, wird positiv elektrisch; er ist aber negativ elektrisch, wenn man mit ihm nach und nach alle Theile des Felles überfährt.

Diese Erscheinungen erscheinen so wunderlich, dass man ansteht ihnen Glauben beizumessen, solange man sich nicht selbst von deren Richtigkeit überzeugt hat, es bestehen aber in Wirklichkeit diese von Hagenbach angegebenen Unregelmäßigkeiten; es ist aber schwer, sie in all' ihren Einzelnheiten zu verificieren, weil das Zeichen der Elektricität auch von der Natur des Glases und den Körpern abhängt, mit welchen man dessen Oberfläche in Berührung gebracht hat. Man muß die hieraus gezogene Schlussfolgerung im Auge behalten, dass, um in einem gegebenen Umstande positive Elektricität zu erhalten, man sich hüten muss, einen mit einem Katzenfelle geriebenen Glasstab zu benützen.

Hagenbach macht auch viele andere eigenthümliche Experimente bekannt, die sich auf das Zeichen der Elektricität beziehen, die durch Reiben von Porzellan, Papier, Seide, Metallen u. s. w. entsteht. Die Schießbaumwolle erschien negativ mit allen Körpern, selbst mit Metallen, mit alleiniger Ausnahme des Schwefelkupfers, welches noch negativer ist.

15. Hypothesen, die sich auf die Natur der Elektricität beziehen. Die Physiker haben nicht gezögert, mittelst einer Theorie die merkwürdigen Erscheinungen der Elektricität erklären zu wollen. Schon Boyle([1]) hat drei Hypothesen ausgesprochen, welche im Grunde sich nicht viel voneinander unterscheiden. Er betrachtet zuerst die elektrischen Anziehungen als die Wirkung einer materiellen Strömung, welche von den elektrisierten Körpern ausgeht und zu denselben wieder zurückkehrt, wobei sie zum Theile bei diesem Vorgange durch die Rückwirkung der äußeren Luft unterstützt wird. Eine zweite Hypothese bestand in der Annahme, dass die Dünste, welche von den elektrisierten Körpern ausgehen, sich auf eine kleine Strecke entfernen, sodann aber wieder an ihren Ausgangspunkt, wie ein kleiner Wirbel, infolge des Luftwiderstandes zurückkehren.

Endlich schreibt Boyle den ersten Einfall einer anderen theoretischen Vorstellung Gilbert zu, nach welcher die elektrisierten Körper, die durch die Reibung erwärmt werden, Strahlen oder Fasern einer zähen Materie aussenden würden, die bei der in Berührung mit der Luft eingetretenen Erkaltung sich zusammenfügen und auf diese Weise einen Theil ihrer Expansivkraft verlieren und zum Ausgangspunkte zurückkehren, wobei sie leichte benachbarte Körper, an denen sie adhäriren, mit sich reißen.

Hauksbee([2]) nimmt an, dass eine elektrisierte Kugel eine Strömung aussendet, welche in physischen Linien vom Centrum gegen die Peripherie stattfindet und welche das angrenzende Medium in denselben Richtungen verdünnt; die Bewegung der verschobenen Luft, welche dichter ist, muss in Linien stattfinden, die vom Umkreise gegen das Centrum convergieren und demzufolge führt diese Bewegung der Luft benachbarte Körper gegen das Centrum.

Der Abt Nollet sprach die Ansicht aus, dass der Luftstrom, welcher dem Ausflusse entgegengesetzt ist, allein zur Erklärung der Bewegung der Körper nicht hinreiche, und er stellt sich eine zweite Strömung in entgegengesetzter Richtung

([1]) Boyle's works, t. IV. p. 345.
([2]) Expériences physico-mécaniques, traduct. franç., p. 391.

vor. „Ein Körper," sagt er, (1) „ist natürlich elektrisch, wenn von ihm Strömungen ausgehen, die ich „ausfließende Materie" genannt habe, und wenn diese Strömungen continuierlich ersetzt werden durch einen anderen Strom von Materie, der ich den Namen „zufließende Materie" beigelegt habe."

Bei diesen ersten ziemlich plumpen Versuchen, eine Theorie aufzustellen, hatte man nur die Erscheinung der elektrischen Anziehung im Auge. Franklin spricht schon vom Beginne seiner Versuche über Elektricität eine viel präcisere Auffassung der entsprechenden Erscheinungen aus. Obwohl diese Theorie ersonnen wurde, um noch andere Erscheinungen zu erklären als jene, welche wir bis jetzt aufgezählt haben, so ist es nothwendig, sie jetzt zu erörtern, damit wir von ihr in der Folge dieser Schrift Gebrauch machen können. Vorzüglich leitete Franklin zur Aufstellung seiner Theorie der elektrischen Erscheinungen die Wahrnehmung, dass eine durch einen Harzkuchen isolierte Person, wenn sie eine Glasröhre reibt und aus derselben eigenhändig Funken zieht, nicht elektrisch wird; er schloss daraus, dass die Elektricität durch das Reiben der Röhre nicht erzeugt, sondern nur anders vertheilt wird. Franklin (2) äußert sich in folgender Weise: „Die elektrische Materie besteht aus äußerst feinen Theilchen, da sie gewöhnliche Materie durchdringen kann, ohne dass sie einen merklichen Widerstand erfährt. Die Theilchen der elektrischen Materie stoßen sich gegenseitig ab, aber sie werden stark von jeder anderen Materie angezogen. In der gewöhnlichen Materie befindet sich soviel von elektrischer Materie als in der Substanz überhaupt enthalten sein kann. Wenn man mehr hinzufügt, so bleibt der Überschuss auf der Oberfläche und bildet das, was wir eine elektrische Atmosphäre nennen, und man sagt dann der Körper sei elektrisiert u. s. w."

Ein Körper ist daher nach Franklin im natürlichen Zustande, wenn er eine normale Elektricitätsmenge besitzt; vermehrt man diese Menge, so wird der Körper positiv, vermindert man sie, so wird er negativ elektrisch. Diese

(1) Essai sur l'électricité des corps, p. 116 (1746).

(2) Lettres sur l'électricité. — Opinions et conjectures sur les propriétés et sur les effets de la matière électrique (1749).

Hypothese von Franklin, durch die wechselseitige Wirkung der materiellen Moleküle, welch' letzterer Aepinus(¹) eine Rolle beizumessen nothwendig glaubte, ergänzt oder nicht, genügt, um Rechenschaft von den elektrischen Anziehungen und Abstoßungen zu geben. Gleichwohl glaubte Aepinus, dass die directe Wirkung der materiellen Moleküle eine repulsive sein müsse, diese neue Hypothese ist aber nicht nöthig.

Zur selben Zeit stellte Symmer(²), sich auf die Beobachtungen von Du Fay und auf seine eigenen Versuche stützend, die Ansicht auf, dass die beiden Arten der elektrischen Erscheinungen vollständig voneinander zu unterscheiden wären und nicht durch einen und denselben Stoff, durch ein und dasselbe Fluidum erklärt werden könnten. Er stellte sich daher vor, dass es zwei Arten verschiedener Fluida gebe, dass die Theilchen jedes der beiden Fluida sich wechselweise abstoßen und die Theilchen des anderen Fluidums anziehen, dass außerdem die beiden Fluida die gewöhnliche Materie attrahieren.

Diese beiden Theorien, jene von Franklin und diese von Symmer, sind noch heutzutage angenommen und es ist wichtig vor allem darzulegen, dass sie beide in gleicher Weise von den Grunderscheinungen Rechenschaft geben. Wir werden bald sehen, dass die Abstoßung oder Anziehung zweier elektrisierten Körper, welche im Verhältnisse zu ihrer Entfernung kleine Dimensionen besitzen, umgekehrt proportional dem Quadrate der Distanz und direct proportional dem Producte der Elektricitätsmengen ist, welche sie besitzen oder kurz dem Producte ihrer elektrischen Massen. Man kann daher dasselbe Gesetz ausdehnen auf die Wechselwirkung zweier Körperelemente von was immer für Dimensionen.

16. Theorie von Franklin. Wir setzen nun nach der Hypothese von Franklin voraus, dass es nur ein elektrisches Fluidum gebe, und dass ein Körper eine gewisse Menge ponderabler Materie und eine verschiedene Menge elektrischer Materie besitze. Bezeichnen wir mit F die Anziehung, welche

(¹) Aepini tentamen, p. 39.

(²) Phil. trans. abridged, vol. XI., p. 417 (1759).

zwischen den Mengeneinheiten ponderabler Materie in der Entfernungseinheit herrscht; nennen wir ebenso φ die Attraction der elektrischen Masseneinheit auf die Einheit der ponderablen Masse in der Einheit der Entfernung und f die Wirkung der elektrischen Masseneinheit auf eine gleiche, auch in der Entfernungseinheit befindliche, wobei diese letztere Wirkung als repulsiv zu betrachten ist. Nehmen wir schließlich an, alle diese Wirkungen gehen im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung vor sich.

Betrachten wir zunächst die Wirkung eines Volumenelementes A, welches eine ponderable Masse M und eine elektrische Masse m besitzt, auf eine elektrische Masse m', welche sich in der Entfernung r befindet. Diese Wirkung setzt sich aus zwei Kräften zusammen, die eine ist attractiv und gleich $\varphi \frac{\mathrm{M}m'}{r^2}$, die andere repulsiv und $f\frac{mm'}{r^2}$; ihre Resultierende ist

$$\frac{m'}{r^2}(\varphi \mathrm{M} - fm).$$

Es ist diese Resultante Null, wenn man hat:

$$\varphi \mathrm{M} - fm = 0, \text{ oder } \frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{\varphi}{f};$$

man sagt dann von dem Elemente A, es sei im natürlichen oder neutralen Zustande; es äußert dann keine Wirkung auf die elektrische Materie, welche es umgibt. Ein Körper ist somit im neutralen Zustande, wenn die Menge der elektrischen Materie, welche er enthält, in einem bestimmten Verhältnisse zur Menge der ponderablen Materie sich befindet.

Betrachten wir nun die wechselseitige Wirkung zweier Elemente A und B, die sich im neutralen Zustande befinden; das erste enthält eine ponderable Masse M und eine elektrische Masse m; das zweite eine ponderable Masse M' und eine elektrische Masse m' und man hat:

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{m'}{\mathrm{M}'} = \frac{\varphi}{f}.$$

Diese Wirkung ist die Resultierende von vier Kräften: zuerst die Wirkung von M und jene von m auf m', Wirkungen, deren Summe Null ist, weil das Element A im neutralen Zustande sich befindet: sodann die Wirkung von M und jene von m auf M′, welche — bei Berücksichtigung der vorstehenden Gleichung — ausgedrückt wird durch:

$$F\frac{MM'}{r^2} + \varphi\frac{mM'}{r^2} = \frac{MM'}{r^2}\left(F + \varphi\frac{m}{M}\right) = \frac{MM'}{r^2}\left(F + \frac{\varphi^2}{f}\right).$$

Diese Wirkung ist nicht Null, sie stellt die allgemeine Massenanziehung oder die Gravitation dar.

Ein elektrisierter Körper besitzt eine größere oder geringere elektrische Masse als die normale Quantität beträgt. Suchen wir die Wechselwirkung zweier Volumenelemente A und B, von denen das erste eine ponderable Masse M und eine elektrische Masse $m + \mu$, das zweite eine ponderable Masse M′ und eine elektrische Masse $m' + \mu'$ enthält. Die Massen m und m' sind die normalen Elektricitätsmengen der beiden Körper, der erste wird einen Elektricitätsüberschuss μ und der zweite einen solchen μ' besitzen, diese beiden Überschüsse werden überdies positiv oder negativ sein, um in einer und derselben Formel die beiden Arten des elektrischen Zustandes zu umfassen. Man muss nun die Wirkung des Systemes $(M + m + \mu)$ auf $(M' + m' + \mu')$ auswerten.

Die Wirkung von $(M + m)$ auf M′ ist, wie wir gesehen haben, gleich $\frac{MM'}{r^2}\left(F + \frac{\varphi^2}{f}\right)$; die Wirkungen von $(M + m)$ auf m' und auf μ' sind Null. Andererseits setzt sich die Wirkung von μ auf $(M' + m' + \mu')$ zusammen aus der auf $(M' + m')$ ausgeübten Wirkung, die Null ist, und aus der Wirkung auf μ', welche repulsiv und gleich $f\frac{\mu\mu'}{r^2}$ ist.

Die resultierende Wirkung des Elementes A auf das Element B reduciert sich daher auf:

$$\frac{MM'}{r^2}\left(F + \frac{\varphi^2}{f}\right) - f\frac{\mu\mu'}{r^2};$$

sie besteht aus zwei Gliedern, von denen das erste die Gravitation, das zweite die elektrische Wirkung darstellt. Man kann auch bemerken, dass, um zu diesem Resultate zu gelangen, es nicht nothwendig ist, anzunehmen, dass eine directe Anziehung zwischen den beiden Quantitäten ponderabler Materie herrscht; denn wenn man F = o macht, bleibt noch zur Darstellung der Gravitation ein Glied $\frac{MM'}{r^2} \times \frac{\varphi^2}{f}$ übrig, welches von der Wirkung der ponderablen Materie auf die elektrische Materie herrührt.

Da die elektrischen Wirkungen sehr groß im Vergleiche zur Gravitation sind, muss man, um von den Erscheinungen Rechenschaft geben zu können, annehmen, entweder dass die elektrischen Massen gegen die ponderablen Massen sehr groß sind, oder dass die Kraft f, welche sich auf die gegenseitige Wirkung der elektrischen Massen bezieht, viel größer ist, als die Kräfte F und φ.

17. Theorie von Symmer. Die Hypothese der zwei Fluida führt zu fast denselben Resultaten. Man muss hier annehmen, dass es zwei verschiedene Fluida gibt, dass die Theilchen eines und desselben Fluidums sich abstoßen, während sie die Theilchen des anderen Fluidums anziehen, dass die ponderable Materie in gleicher Weise die beiden Fluida anzieht und dass endlich in einem Körper, der im natürlichen Zustande sich befindet, Mengen der beiden verschiedenen Fluida sich vorfinden, die, wenn nicht unbegrenzt, doch sehr beträchtlich sind; diese beiden Fluida setzen das neutrale Fluidum zusammen.

Wir bezeichnen das eine von diesen Fluida positiv, das andere negativ. Ein Körper wird positiv oder negativ elektrisch sein, je nachdem das eine oder das andere Fluidum in größerer Menge vorhanden ist.

Betrachten wir zuerst die Wirkung zweier Volumenelemente A und B, die sich in neutralem Zustande befinden, wobei wir die eben gemachten Bemerkungen gelten lassen: das erste Element enthält eine ponderable Masse M und gleiche Mengen $+m$ und $-m$ der das neutrale Fluidum zusammensetzenden Elektricitäten; das zweite Volumenelement enthält

ebenso die Massen M', $+ m'$ und $- m'$. Die Wirkung der beiden Elemente besteht aus: der Anziehung der ponderablen Massen $F\frac{MM'}{r^2}$, der Anziehung der ponderablen Masse M und der beiden elektrischen Massen $+ m'$ und $- m'$ oder $2\varphi\frac{Mm'}{r^2}$ und endlich der Anziehung von $+ m$ und $- m$ auf M' oder $2\varphi\frac{M'm}{r^2}$. Die Wirkungen von $+ m$ und $- m$ auf $+ m'$ und $- m'$ geben eine Summe Null. Die Resultierende ist daher:

$$F\frac{MM'}{r^2} + 2\varphi\frac{Mm' + M'm}{r^2} = \frac{MM'}{r^2}\left[F + 2\varphi\left(\frac{m'}{M'} + \frac{m}{M}\right)\right].$$

Wenn man annimmt, dass das Verhältnis der elektrischen Masse eines im natürlichen Zustande sich befindenden Körpers zur ponderablen Masse constant ist und gleich α, so kann man schreiben;

$$\frac{MM'}{r^2}\left[F + 2\varphi\left(\frac{m'}{M'} + \frac{m}{M}\right)\right] = \frac{MM'}{r^2}(F + 4\varphi\alpha).$$

Dieser Ausdruck stellt die allgemeine Massenanziehung dar.

Nehmen wir jetzt an, dass man dem ersten Elemente A einen Überschuss $+ \mu$ von positiver Elektricität hinzufügt und ebenso dem zweiten Elemente B einen Überschuss $+ \mu'$ derselben Elektricität. Die Wirkung dieser Elemente $M + m - m + \mu$ und $M' + m' - m' + \mu'$ wird sich aus den bereits gefundenen Gliedern, der Anziehung von M auf μ' oder $\varphi\frac{M\mu'}{r^2}$, ferner der Anziehung $\varphi\frac{M'\mu}{r^2}$ von μ auf M' und der Abstoßung von μ auf μ' oder $f\frac{\mu\mu'}{r^2}$ zusammensetzen. Die Resultierende wird somit sein:

$$\frac{MM'}{r^2}.(F + 4\varphi\alpha) + \varphi\frac{M\mu' + M'\mu}{r^2} - f\frac{\mu\mu'}{r^2},$$

und diesen Ausdruck kann man auch in der nachstehenden Weise schreiben:

$$\frac{MM'}{r^2}(F + 4\varphi\alpha) + \frac{MM'}{r^2}\varphi\left(\frac{\mu'}{M'} - \frac{\mu}{M}\right) - f\frac{\mu\mu'}{r^2}.$$

Das erste Glied gibt die Gravitation und das letzte die elektrische Wirkung an; es ist aber jetzt ein neues Glied vorhanden, welches keine einfache Bedeutung hat und welches man nur dann umgehen kann, wenn man $\varphi = 0$ macht, d. h. wenn man voraussetzt, dass das elektrische Fluidum auf die ponderable Materie keine Wirkung ausübt.

In diesem Falle würde man die Bewegung der ponderablen Körper, welche den elektrischen Fluiden zu folgen scheinen, nicht durch eine directe Wirkung der Fluida erklären dürfen, sondern durch Drücke, welche das umgebende Medium auf das Fluidum, das auf der Oberfläche der elektrischen Körper verbreitet ist, ausübt. Wenn dagegen der Factor φ einen endlichen Wert behält, so ist die Wirkung der zwei elektrisierten Körper nicht mehr strenge dem Producte der Elektricitätsmengen proportional, und die Anziehung eines elektrisierten Körpers auf einen Körper, der sich im neutralen Zustande befindet, ist von der Gravitation verschieden; mit anderen Worten, das elektrische Fluidum würde nicht imponderabel sein. In Wirklichkeit kann das Experiment bezüglich dieses Gegenstandes nichts darthun, da es schwierig zu sein scheint, zu zeigen, dass das Gewicht eines elektrisierten Körpers nicht verschieden ist von dem Gewichte desselben Körpers, wenn er im neutralen Zustande sich befindet. In allen Fällen kann das Glied $\frac{MM'}{r^2}\varphi\left(\frac{\mu'}{M'} - \frac{\mu}{M}\right)$, um das es sich hier handelt, als unmerklich in den Versuchen angesehen werden und man kann also alle Phänomene auch wohl nach der Theorie zweier Fluida erklären.

18. Bemerkungen über die Vorstellung vom Fluidum. Obgleich der Begriff des elektrischen Fluidums heutigen Tages allgemein verbreitet ist und dermaßen auch in den gewöhnlichen Sprachgebrauch Eingang gefunden hat, dass die Existenz dieses geheimnisvollen Elements jenen, welche Schilderungen von Blitzschlägen verfassen, keinen Zweifel verursacht, so hat doch die Vorstellung vom Fluidum in der Wissenschaft viel

eingebüßt. Die gegenwärtigen Ansichten über die Constitution der Körper waren die Veranlassung, dass man die meisten Fluida, zu welchen man ehemals seine Zuflucht nahm, aufgegeben hat. Man nimmt wohl noch den Äther an, ein elastisches Medium, das in allen ponderablen Körpern und im Weltenraume verbreitet ist, und dessen Schwingungen zur Erklärung der Lichtphänomene dienen: man widerstrebt aber in der Wissenschaft zwei neue vom ersteren unabhängige Fluida beizubehalten. Die Wechselbeziehungen der physikalischen Kräfte, die gegenseitige Umwandlung der calorischen, Licht-, elektrischen und magnetischen Erscheinungen, scheinen zur Betrachtung der letzteren als Äußerungen eines und desselben Agens zu leiten. Man wird daher als wahrscheinlicher die Hypothese eines einzigen Fluidums annehmen, welches nichts anderes als der Äther sein wird.

Gleichwohl lehrt das Experiment, wie wir sehen werden, dass im absolut leeren Raume, d. h. in Abwesenheit jeder ponderablen Materie keine elektrischen Erscheinungen sich zeigen. Es scheint daraus hervorzugehen [1], dass man nicht die ganze Äthermenge, sondern die Summe der Ätheratmosphären, welche die ponderablen Molecüle umgeben, d. h. den Überschuss der gesammten, in dem Volumen enthaltenen Äthermenge über die Menge, welche dieses Volumen ohne die Gegenwart der ponderablen Molecüle enthalten würde, als elektrisches Fluidum, das in dem gegebenen Volumen enthalten ist, bezeichnen müsse. Um die elektrischen Erscheinungen erklären zu können, wird es genügen, anzunehmen, dass die ponderable Materie den Äther umgekehrt dem Quadrate der Distanz anzieht, und dass die Wechselwirkung zweier Ätheratmosphären proportional dem Producte ihrer Mengen und ebenfalls umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernungen ist.

Man muss bei dieser Gelegenheit bemerken, dass die Theorie der Lichtphänomene ein ganz verschiedenes Wirkungsgesetz

[1] Briot, mechanische Wärmetheorie, p. 254. Deutsch von Dr. Heinrich Weber, Leipzig, 1871.

zwischen den benachbarten Äthermolecülen zu fordern scheint. Die enorme Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen zeigt in erster Linie an, dass die Kraft, welche sich zwischen zwei benachbarten Molecülen äußert, sehr beträchtlich ist. Die theoretischen Untersuchungen von Cauchy haben gezeigt, dass in einem isotropen Medium, d. h. in einem solchen, welches in allen Richtungen gleich beschaffen ist, z. B. dem freien, im leeren Raum ausgebreiteten Äther, sich zwei Arten von Schwingungen fortpflanzen können, die einen transversale, die anderen longitudinale, mit sehr verschiedenen Geschwindigkeiten; die Existenz der einen und der anderen hängt von dem Gesetze der Molecularkräfte ab. Die Lichterscheinungen schreibt man den transversalen Schwingungen zu. Folgend der Methode von Cauchy hat Briot ersichtlich gemacht, dass es, damit die transversalen Schwingungen sich fortpflanzen können, nothwendig ist, dass die zwischen zwei benachbarten Äthermolecülen sich äußernde Abstoßung sich im umgekehrten Verhältnisse einer Potenz der Entfernung ändere, die höher als die vierte ist. Das Studium der Gesetze der Lichtfortpflanzung in doppeltbrechenden Medien scheint anzuzeigen, dass diese Potenz genau die sechste ist; die Abwesenheit der Dispersion im leeren Raume leitet zu demselben Schlusse. Es herrscht ein offenbarer Widerspruch zwischen diesem Gesetze und jenem der elektrischen Wirkungen; es ist aber wahrscheinlich, dass die Lichtphänomene der unmittelbaren Wirkung der Äthermolecüle auf die benachbartesten Molecüle entspringen, während die elektrische Kraft aus der Wirkung der Federkraft oder der Elasticität der Ätheratmosphären entsteht, welche die ponderablen Molecüle einhüllen. (1)

Lame(2) hat die Meinung ausgesprochen, dass man bei vorsichtigem Vorgange mittelst des Ätherfluidums das Geheimnis oder die wahre Ursache der Wirkungen finden muss,

(1) Man vergleiche diesbezüglich auch die von P. Angelo Secchi in seinem Werke: „Die Einheit der Naturkräfte" (deutsch von Dr. L. R. Schulze) ausgesprochene Ansicht (II. Bd. p. 174).

(2) Leçons sur la théorie mathématique de l'elasticité des corps solides, p. 344.

die man der Wärme, der Elektricität, dem Magnetismus, der allgemeinen Massenanziehung, der Cohäsion und der chemischen Affinität zuschreibt; mehrere Schriftsteller haben diese Idee weiter zu präcisieren gesucht. Wir nennen z. B. Renard [1], Moutier [2], Edlund [3] u. s. w. Faraday fasste die elektrischen Erscheinungen in einer ganz verschiedenen Weise auf, wie es wenigstens scheint: seine Hypothese besteht in der Annahme, dass die Wirkungen eines Körpers auf einen anderen sich mittelst des zwischenliegenden Mediums fortpflanzen und zwar in bestimmten Richtungen, welche er Kraftlinien genannt hat; die Versuche aber, welche ihm die Existenz dieser Kraftlinien zu beweisen schienen, können in einer vollständigen Weise mittelst der Fluidentheorie erklärt werden.

Die Theorie eines einzigen Fluidums scheint daher die bei weitem wahrscheinlichste zu sein; wir werden aber im weiteren Verlaufe — wie man es allgemein zu thun pflegt — die Hypothese zweier Fluida annehmen, welche vom experimentellen Gesichtspunkte aus dieselbe Berechtigung hat und die den Vortheil besitzt, dass sie für die Sprache bequemer ist. Dennoch muss man sich vor Augen halten, dass die eine oder andere der beiden Hypothesen, welche man gebraucht, um vornehmlich die Darstellung leichter zu gestalten, in nichts den Wert der Betrachtungsweisen schwächt. „Ich melde," sagt Coulomb, „um die folgende Theorie sicher vor jedem wissenschaftlichen Streite aufzustellen, dass ich bei der Annahme der beiden elektrischen Fluida keine andere Absicht gehabt habe, als mit möglichst wenigen Elementen die Resultate der Rechnung und des Versuches darzustellen, aber nicht die wahren Ursachen der Elektricität anzugeben." [4]

(1) Distribution de l'électricité dans les corps conducteurs en partant de l'hypothèse d'un seul fluide. Mém. de l'Académie de Stanislas (Nancy, 1859).

(2) Sur les attractions et les répulsions des corps électrisés au point de vue de la théorie mécanique de l'électricité. — Annal. de Chimie et de Physique, 4e série, t. XVI. p. 108 (1869).

(3) Théorie des phénomènes électriques. — Mémoire présenté a l'Académie royale des sciences de Suède, le 12 nov. 1873.

(4) Mémoires de l'Académie des sciences, p. 673 (1788).

II. Kapitel.

Gesetze der elektrischen Wirkungen.

19. Experimente vor Coulomb. Die gegenseitige Wirkung zweier elektrisierten Körper ist um so größer, je kleiner deren Distanz ist und je stärker die Elektrisierung eines jeden von ihnen ist. Man hat seit langer Zeit den allgemeinen Gang der Erscheinung erkannt und die Gesetze vorausgesehen. Aepinus([1]) insbesonders war geneigt, dem Gesetze des Quadrates der Entfernungen den Vorzug vor anderen zu geben, da dieses Gesetz alle natürlichen Analogien für sich habe. Cavendish hat beinahe die wahre Lösung erreicht. „Es gibt“, sagt er,([2]) „eine Substanz, welche ich elektrisches Fluidum nenne, deren Theilchen sich abstoßen, während sie die materiellen Molecüle mit einer Kraft anziehen, die im umgekehrten Verhältnisse von etwas weniger als dem Cubus der Entfernung variiert; die Molecüle jeder anderen Art von Materie stoßen sich ebenfalls wechselseitig ab und ziehen jene des elektrischen Fluidums nach einem ähnlichen Gesetze an.“ Es scheint sogar([3]), dass Cavendish in seinen später aufgefundenen Manuscripten berichtet, auf experimentellem Wege gezeigt zu haben, dass, wenn zwei hohle Kugeln aus leitenden Substanzen concentrisch sind und miteinander verbunden werden, die Elektricitätsmenge, welche die innere Kugel an-

([1]) Aepini tentamen p. 38.

([2]) Phil. trans. abridged, vol. XIII., p. 224 (1771).

([3]) Snow Harris, Leçons élémentaires d'électricité, traduct. franç. de Garnault, p. 25.

nimmt, unmerklich ist, und dass sie nicht den fünfzigsten Theil der Gesammtladung erhält. Nimmt man an, dass die Ladung der inneren Kugel Null ist, so kann man zeigen — wie es Cavendish gethan hat — dass die gegenseitige Abstoßung der Fluidentheilchen im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate ihrer Entfernung steht. (1) Trotz dieser Versuche, an welche zu erinnern nur billig ist, obwohl sie kaum mehr als theoretische Vorstellungen waren, war die Frage noch immer sehr zweifelhaft, und es gebürt Coulomb (geb. 1736 zu Angoulème, gest. 1806 zu Paris) das Verdienst, durch das Experiment die Gesetze der elektrischen Wirkungen festgestellt zu haben.

Die eine der von Coulomb zum Studium der elektrischen Kräfte angewendeten Methoden ist die mit der Torsionswage auszuführende. Ein Instrument, das auf demselben Grundsatze fußt, wurde fast zur selben Zeit von Mitchell in Anwendung gebracht, um die directe Anziehung der ponderablen Körper zu untersuchen und die Dichte der Erde zu bestimmen; die diesbezüglichen Experimente wurden von Cavendish (2) ausgeführt. Coulomb konnte keine Kenntnis der Arbeiten von Mitchell bezüglich dieses Apparates haben (3); jedenfalls war er es, der, bevor er zur Anwendung desselben übergieng, vollständig die Gesetze der Torsion von Metalldrähten studierte; die Torsionswage ist seitdem ein Instrument von einer allgemeinen Anwendung geworden, und man

(1) Maxwell geht in seinem berühmten Werke: „A Treatise on Electricity and Magnetism“ (Oxford, 1873) von dem folgenden Versuche aus: Wenn ein geladener Leiter die Innenseite eines hohlen leitenden Gefäßes, welches ihn vollständig einschließt, berührt, so wird er vollkommen unelektrisch, um zu zeigen, dass dieser Versuch einzig und allein mit dem Gesetze des umgekehrten Quadrates der Entfernung verträglich ist. (Man sehe den Abschnitt 74: on the proof of the law of the inverse square oder die Artikel 74[a] —74[d] in der von Dr. B. Weinstein 1883 besorgten deutschen Übersetzung des Mascart'schen Werkes.) Wir werden im weiteren Verlaufe auf diesen Gegenstand näher zu sprechen kommen.

(2) Phil. trans. abridged, vol. XVIII, p. 388 (1798).

(3) Die Abhandlung von Cavendish enthält die folgende Bemerkung: „Herr Coulomb hat dieselbe Methode auf das Studium schwacher Attractionen in einer großen Anzahl von Fällen in Anwendung gebracht. Mitchell hat aber vor der Veröffentlichung der Versuche von Coulomb sich mir gegenüber von seinem Project, ähnliche Experimente auszuführen, ausgesprochen.“

muss Coulomb das volle Verdienst um dieselbe ertheilen. Dieser Apparat ist von einer derartigen Wichtigkeit, dass es nützlich ist, die Theorie desselben mit aller Sorgfalt zu erörtern und die Resultate anzugeben, welche Coulomb bezüglich der Torsion von Metalldrähten erhalten hat. Wir werden damit beginnen, einige Theoreme der Mechanik in Erinnerung zu bringen.

20. Formeln, welche sich auf die Torsion von Drähten beziehen.

1. Wenn ein materieller Punkt genöthigt ist, sich auf einer Curve zu bewegen, und er einer Kraft unterworfen ist, deren tangentielle Componente proportional der Entfernung des Beweglichen von einem festen Punkte ist (diese Entfernung längs der Curve gerechnet), so beschreibt das Bewegliche beiderseits von seiner Gleichgewichtslage isochrone Schwingungen, wie groß auch immer die anfängliche Ausweichung oder die Amplitude ist.

Denn sei m die Masse des Beweglichen M (Fig. 7), a die Entfernung OA des Punktes von der Gleichgewichtslage zur Zeit 0, die sogenannte Amplitude des Punktes, wobei die Entfernung längs der Curve gerechnet wurde, x die Entfernung OM des Beweglichen vom Punkte O in irgendeinem Zeitmomente t; dann wird die tangentielle Componente F der Kraft durch die Gleichung ausgedrückt:

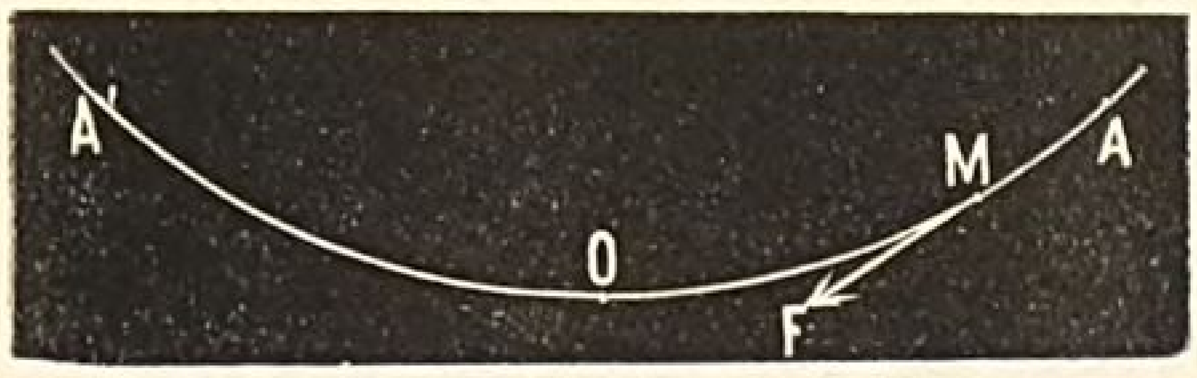


Fig. 7.

$$F = Kmx.$$

Der durchlaufene Weg ist $a - x$. Man weiß, dass die Tangentialbeschleunigung gleich ist der Derivierten der Geschwindigkeit nach der Zeit oder der zweiten Derivierten des durchlaufenen Wegstückes. Man hat daher auch:

$$F = m(a - x)'' = -mx'',$$

woraus sich ergibt:

$$x'' = -K.x.$$

Die Function, welche dieser Gleichung genügt, ist

$$x = a.\cos t\sqrt{K},$$

die Constante ist Null, wenn man die Zeit vom Beginne der Bewegung rechnet, in welchem das Bewegliche in A ist. Man sieht aus dieser Gleichung, dass am Ende der Zeit T, die durch die Bedingung $T\sqrt{K} = \pi$ gegeben ist, das Bewegliche seine größte Ausweichung auf der andern Seite des Punktes O erreicht haben wird; es wird dasselbe nach A' in eine Entfernung von der Gleichgewichtslage gekommen sein, welche gleich jener der Ausgangsstelle des Punktes ist. Diese Zeit T ist die Dauer einer einfachen Schwingung und man hat:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{K}}.$$

Man erkennt leicht, dass, wenn die Kraft, welche auf das Bewegliche wirkt, sich weniger schnell als die Entfernung des Beweglichen vom Punkte O vergrößert, die Dauer der Schwingungen mit der Amplitude wachsen wird, und dass das Umgekehrte eintreten wird, wenn die Kraft schneller wächst als die Ausweichung (Elongation) des Beweglichen.

Wenn andererseits, wie auch immer die Amplitude ist, jedesmal die Oscillationen isochron sind, so kann man daraus den Schluss ziehen, dass die Tangentialkraft der Elongation des Beweglichen proportional ist. Dies ist das Gesetz, welches die Schallschwingungen und jene Vibrationen, durch welche man die Lichterscheinungen erklärt, beherrscht.

2. Betrachten wir nun einen festen Körper, der sich um eine Axe drehen kann und der einer Kraft unterworfen ist, deren Moment bezüglich der Rotationsaxe proportional dem Winkel ist, um den der Körper aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht wurde. Sei C (Fig. 8) die Rotationsaxe, M der Angriffspunkt der Kraft F, deren Richtung wir uns als die durch diesen Punkt zum Kreise gezeichnete Tangente vorstellen, und O die Lage des Angriffspunktes der Kraft, wenn der Körper im Gleichgewichte ist. Bezeichnet man mit d die Entfernung CM und mit α die Winkelentfernung des Körpers von seiner Gleichgewichtslage, so gilt für diese Kraft der Ausdruck:

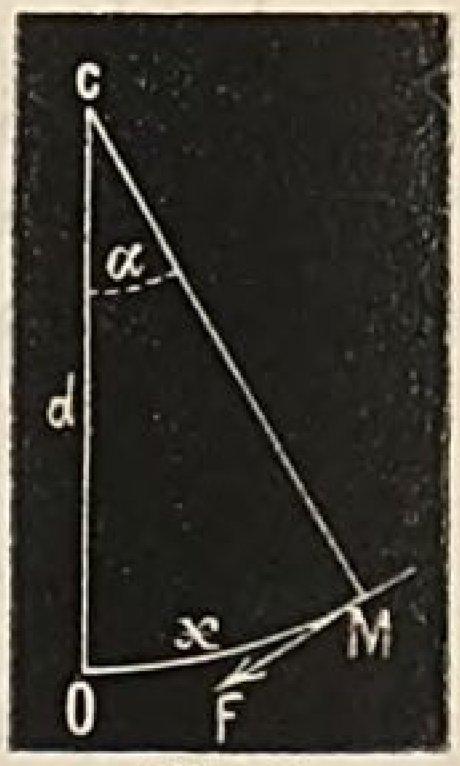


Fig. 8.

$$F = Kx = Kd\alpha.$$

Man kann diese Kraft F, welche im Punkte M wirksam ist, durch irgendein System von Kräften ersetzen, die in verschiedenen Punkten des festen Körpers angreifen, wenn nur die Summe der Momente aller dieser Kräfte bezüglich der Rotationsaxe gleich ist dem Momente der Kraft F selbst. Wir werden auf jedes Element des Körpers eine Kraft f angreifen lassen, die tangential zu jenem Kreise ist, den dieses Element beschreibt, die ferner proportional der Masse des Elementes, seiner Entfernung r von der Rotationsaxe und dem Drehungswinkel α ist; diese Kraft wird ausgedrückt werden durch:

$$f = \mathrm{H} m r \alpha.$$

Zur Bestimmung der Constanten H werden wir aufschreiben, dass die Momentensumme aller dieser Kräfte gleich dem Momente der vorausgesetzten Kraft ist, woraus man erhält:

$$\Sigma\, \mathrm{H} m r^2 \alpha = \mathrm{K} d^2 . \alpha.$$

oder auch:

$$\mathrm{H} = \frac{\Sigma m r^2}{\mathrm{K} d^2}.$$

$\Sigma m r^2$ ist jene Größe, welche man das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Rotationsaxe nennt; man kann diese Größe unter der Form $\mathrm{M}\rho^2$ schreiben, wobei M die Gesammtmaße des Körpers bezeichnet und ρ der Gyrationsradius ist, d. h. die Entfernung jenes Punktes von der Axe, in welchem man die gesammte Maße vereinigen müsste, damit das Trägheitsmoment keine Änderung erführe.

Wenn jeder der Punkte des Körpers frei unter dem Einflusse der auf ihn wirkend gedachten Kraft schwingt, so wird die Schwingungsdauer — wie wir oben gesehen haben — $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{H}}}$ sein; sie würde daher für alle Punkte dieselbe sein, und es ist demzufolge diese Schwingungsdauer keine andere als die des Körpers selbst. Man hat daher für den starren Körper:

$$\mathrm{T} = \pi \frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}} = \pi \sqrt{\frac{\mathrm{M}\rho^2}{\mathrm{K} d^2}}.$$

Man kann bemerken, dass Kd der Wert der Kraft ist, wenn die Deviation gleich der Einheit ist, ihr Moment ist dann gleich Kd^2. Bezeichnet man diese Größe mit dem Buchstaben c, so geht die Gleichung über in:

$$T = \pi \sqrt{\frac{M\rho^2}{c}}$$

Nehmen wir speciell an, der starre Körper sei einer nach Größe und Richtung constanten Kraft P unterworfen (Fig. 9), die in einem und demselben Punkte M angreife. Die Tangentialcomponente dieser Kraft wird P sin α sein. Wenn man sich auf die Betrachtung von so kleinen Schwingungen beschränkt, dass man den Sinus durch den Bogen ersetzen kann, so kann diese Tangentialcomponente dann ausgedrückt werden durch Pα und ihr Moment durch P$d\alpha$. Der Körper ist daher in demselben Zustande, als ob der Punkt M einer Kraft unterworfen wäre, welche tangential zu jenem Kreise ist, den dieser Punkt beschreibt, die ferner proportional der Deviation ist und deren Moment für eine Deviation gleich 1 Pd sein wird. Die Dauer der Schwingungen ist sodann:

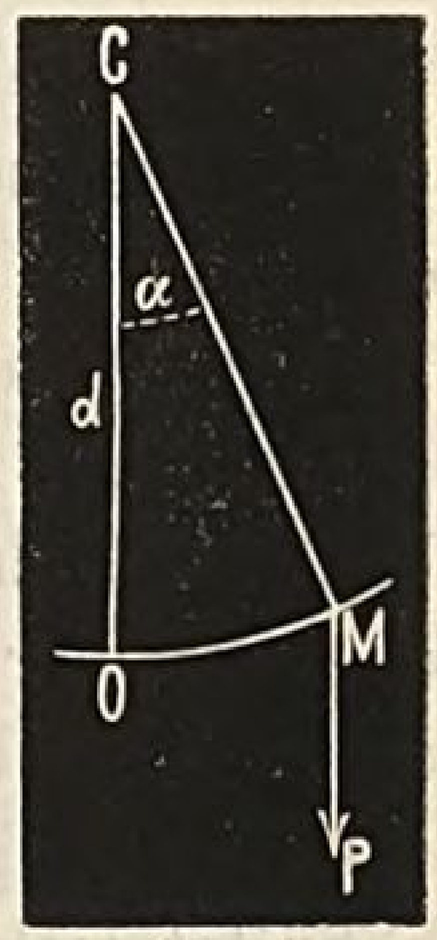


Fig. 9.

$$T = \pi \sqrt{\frac{M\rho^2}{Pd}}.$$

Im Falle des geodätischen Pendels ist diese Kraft nichts anderes als das Gewicht des Pendels; $\frac{P}{M}$ ist die Acceleration g der Schwere, d ist die Distanz des Maßenmittelpunktes des Körpers von der Rotationsaxe und die Dauer der Schwingungen ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\rho^2}{gd}}.$$

Das ist die Formel für das z u s a m m e n g e s e t z t e P e n d e l.

Handelt es sich andererseits um das einfache Pendel, d. h. um ein solches, welches sich auf e i n e n materiellen Punkt

reduciert, so sind die Strecken ρ und d gleich der Pendellänge l, woraus man erhält

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

so dass es, um die Länge l eines einfachen Pendels zu erhalten, das mit einem zusammengesetzten synchron ist, zu schreiben genügt:

$$l = \frac{\rho^2}{d}.$$

Wir werden oft in die Gelegenheit kommen, von diesen Formeln Gebrauch zu machen.

21. Versuche von Coulomb über die Torsion von Metalldrähten.

Der Apparat, dessen sich Coulomb bediente, um die Torsion der Drähte zu studieren, ist sehr einfach.(1) Ein Metalldraht befindet sich in seinem oberen Theile in einer Zange, die an einem Holzrahmen befestigt ist. Dieser Draht trägt an seinem unteren Ende eine andere Zange, mittelst welcher ein Metallcylinder aufgehängt ist. Auf dem Fußbrette des Apparates befindet sich ein Kreis, der in Grade getheilt ist und dessen Mittelpunkt in der Verlängerung des Drahtes liegt; ein Zeiger, welcher an dem Cylinder befestigt ist, reicht bis zur Kreistheilung und zeigt die Ablenkungen an.

Dreht man den Cylinder um einen bestimmten Winkel und überlässt ihn dann sich selbst, so kehrt der Apparat infolge der Elasticität des Drahtes gegen seine Gleichgewichtsposition zurück und führt zu beiden Seiten derselben isochrone Schwingungen aus, deren Amplituden aber fortwährend kleiner werden, was durch die Reibung, den Luftwiderstand und die unvollkommene Elasticität des Drahtes bewirkt wird.

Da der Draht vertical bleibt und da die Schwingungen, wie auch ihre Amplitude sei, nach den angestellten Versuchen isochron sind, wenigstens innerhalb sehr weiter Grenzen, so folgt hieraus, dass die gesammten elastischen Rückwirkungen des durch die Torsion deformierten Drahtes sich auf ein hori-

(1) Mémoires de l'Académie des sciences, p. 229 (1784).

zontales Drehungspaar reducieren, dessen Moment dem Torsionswinkel proportional ist. Man kann noch das mechanische Phänomen in einer andern Weise betrachten. Da das Drehungspaar dargestellt wird durch zwei Kräfte, welche senkrecht auf jener Geraden sind, welche die Angriffspunkte der Kräfte verbindet, so wird, wenn man die eine von diesen Kräften $-f$ des Drehungspaares auf den Draht selbst angreifen lässt, die andere $+f$ am Ende eines Hebelarmes, der gleich der Einheit ist, anbringt, die Intensität dieser Kraft durch dieselbe Zahl dargestellt, wie das Moment des ursprünglichen Drehungspaares.

Nehmen wir nun das Gewicht des Körpers, der auf dem Drahte aufgehängt ist, genügend groß gegen die Torsionskräfte an, so dass man die Ablenkung, welche die Kraft $-f$, die am Drahte angreift, hervorbringen würde, vernachlässigen kann, so wird man diese Kraft nicht zu berücksichtigen brauchen und den Draht als einzig und allein der Kraft $+f$, welche man die Torsionskraft nennt, unterworfen betrachten können.

Was die schnelle Verminderung der Amplituden anbelangt, so kann sie zum Theil dem Luftwiderstande zugeschrieben werden, sie entspringt aber überhaupt, wie Coulomb nachgewiesen hat, der unvollkommenen Elasticität des Drahtes. Ohne auf diesen Punkt näher einzugehen, werden wir allein die Drehungspaare auszuwerten suchen.

Coulomb hat mit drei Sorten von Clavierdrähten, wie man sie im Handel findet, und mit drei Messingdrähten, welche in der Nummer und fast auch in der Dicke den Eisendrähten entsprechen, Versuche gemacht. Die folgende Tabelle wird einen vollständigen Begriff von den Dimensionen dieser Drähte und ihren elastischen Eigenschaften geben:

Natur des Drahtes	Nummer im Handel	Gewicht des Drahtes für 6 Fuss Länge	Gewicht, welches der Draht tragen kann, bevor er zerreisst
Eisen . . .	12	5 Gran	3 Pfunde 12 Unzen
	7	14 „	10 „
	1	56 „	33 „
Messing . .	12	5 „	2 „ 3 „
	7	18·5 „	14 „
	1	66 „	22 „

Coulomb hat hierauf an diese verschiedenen Drähte zwei Bleicylinder von demselben Durchmesser aufgehängt, so dass sie denselben Gyrationsradius hatten; der eine von diesen Cylindern wog $^1/_2$ Pfund, der andere 2 Pfunde. Er gab dem Drahte mittelst des Cylinders eine Torsion von mehreren Umdrehungen und bestimmte mit Sorgfalt die Dauer der Schwingungen von dem Momente an, in welchem bei genügender Verkleinerung der Amplitude dieselben isochron wurden.

Im Nachfolgenden werden die Versuche übersichtlich zusammengestellt:

Natur des Drahtes		Länge des Drahtes	Gewicht des aufgehängten Cylinders	Grenzwert der Amplitude für den Isochronismus	Dauer von 20 Schwingungen	Anfangs-amplitude	Bemerkungen
Eisen	Nr. 12	9 Zoll	0·5 Pf.	180°	120″	3.360°	Die 10 ersten Schwingungen wurden in 62 oder 63 Secunden gemacht und die Amplitude wurde auf 450° gebracht.
	— 12	„	2	180	242	„	
	— 7	„	0·5	180	42	„	
	— 7	„	2	180	85	„	
	— 1	„	2	45	23	„	Der Cylinder von 0.5 Pf. gibt unregelmässige Schwingungen, der Draht ist nicht genügend gespannt.
Kupf.	Nr. 12	„	0·5	360	220	3 360	Die 20 ersten Schwingungen dauerten 225″ und die Torsion betrug noch 2.360.
	— 12	„	2	360	442	3.360	Die 20 ersten Schwingungen dauerten 444″ und es blieb die Torsion noch grösser als 2.360.
	— 7	„	0·5	360	57	„	
	— 7	„	2	360	110	2.360	Die 20 ersten Schwingungen dauerten 111″ und die Torsion blieb noch 540°.
	— 7	36 „	2	3.360	222	„	
	— 1	9 „	2	50	32	450	Die 20 ersten Schwingungen dauerten 33·5″ und die Torsion blieb 90°.

Die Schlüsse, welche sich daher aus dieser Tafel ziehen lassen, sind also folgende:

1. Das Drehungspaar ist proportional der Deviation, aber nicht in vollkommen genauer Weise. Wenn die Torsion zu groß ist, so werden die Schwingungen ein wenig langsamer, woraus man den Schluss ziehen kann, dass das

Moment dieses Drehungspaares etwas weniger schnell wächst als die Torsionswinkel.

2. Das Drehungspaar ist unabhängig von dem spannenden Gewichte. Für das Drehungspaar, das einem Winkel gleich der Einheit entspricht, hat man den Ausdruck als Function der Schwingungsdauer T

$$c = \pi^2 \rho^2 \frac{M}{T^2};$$

ändert sich das Drehungspaar c nicht und bleibt der Gyrationshalbmesser derselbe, so muss die Dauer der Schwingungen der Quadratwurzel aus der Masse proportional sein. Dies zeigen die verschiedenen Gruppen der Versuche 1 und 2, 3 und 4, 6 und 7, 8 und 9, in welchen die Schwingungsdauer sich verdoppelt, wenn das Gewicht des Cylinders 4mal so groß wird. Gleichwohl bemerkt man, dass die Dauer der Schwingungen im allgemeinen ein wenig größer als doppelt wird, wenn das Gewicht vervierfacht wird, was zum Theile mit der Verlängerung des Drahtes im Zusammenhange stehen kann. Wie Gauss in seiner Schrift: „Intensitas vis magneticae terrestris“ (Göttingen 1833) gezeigt hat, nimmt für zusammengesetzte Seidenfäden die Torsionskraft mit dem spannenden Gewichte zu.

3. Gesetz der Längen. In den Versuchen 9 und 10 sieht man, dass, wenn die Länge des Drahtes 4mal größer wird, die Dauer der Schwingungen verdoppelt wird; das Drehungspaar wurde daher 4mal schwächer, d. h. es ändert sich im umgekehrten Verhältnisse mit der Drahtlänge. Dieses Gesetz ist überdies beinahe evident. Wenn man einen Draht nimmt, der durch zwei gleiche und der Richtung nach entgegengesetzte Drehungspaare, die an den beiden Enden angebracht sind, tordiert wird, so ist es wohl klar, dass die Torsion in der Mitte des Drahtes nur die Hälfte der gesammten Torsion ist, und dass, wenn man in diesem Punkte eines der Drehungspaare anbringt, der Draht noch im Gleichgewichte bleiben wird.

4. Gesetz der Durchmesser. Coulomb ist zu diesem Gesetze durch scharfsinnige Betrachtungen gelangt. Er bemerkt, dass, wenn der Durchmesser eines Drahtes verdoppelt wird,

die Verrückung eines Moleculs unter sonst gleichen Umständen zweimal so groß wird und dessen Hebelarm auch zweimal so groß wird, Umstände, welche schon ein Drehungspaar erfordern, dessen Moment viermal so groß ist. Außerdem wird die Anzahl der Molecüle in jedem Querschnitte viermal größer, weshalb man noch das Moment des Drehungspaares vervierfachen muss. Es wird daher schließlich dieses Moment 16mal größer, d. h. proportional der vierten Potenz des Durchmessers oder dem Quadrate des Querschnittes sein. Daraus folgt, dass die Dauer der Schwingungen umgekehrt proportional dem Querschnitte oder — was auf dasselbe hinausläuft — umgekehrt proportional dem Gewichte des Drahtes für eine bestimmte Länge ist.

In der That, wenn man in den Versuchen von Coulomb alle jene nimmt, welche mit demselben spannenden Gewichte von 2 Pfunden gemacht wurden, und wenn man die Dauer von 20 Schwingungen mit den Gewichten der 6 Fuß Länge des entsprechenden Drahtes multipliciert, so findet man die folgenden Resultate:

	Nro.	Product		Nro.	Product
Eisen . . .	12	1210	Kupfer . .	12	2210
	7	1190		7	2035
	1	1288		1	2112

Man erkennt aus dieser Tabelle, dass das Gesetz nahezu richtig ist. Der Mangel an strenger Übereinstimmung der Resultate rührt einzig und allein von dem Umstande her, dass die Drähte, welche man vergleicht, niemals absolut identisch sind; verschiedene mechanische Operationen, denen sie unterworfen wurden, genügen, um ihre physikalischen Eigenschaften und speciell ihre Elasticität zu verändern.

Die Gesetze der Torsion von Drähten können nun, wenn man mit s den Querschnitt eines Drahtes und mit l seine Länge bezeichnet, ausgedrückt werden durch die Formel:

$$c = C\frac{s^2}{l},$$

wobei der Coefficient C das Drehungspaar für einen Draht aus demselben Materiale ist, dessen Querschnitt gleich der Einheit und dessen Länge ebenfalls gleich 1 ist.

5. Man kann aus diesen Versuchen den Wert des Drehungspaares *c* für den in Anwendung gebrachten Draht mittelst des Gyrationshalbmessers des aufgehängten Cylinders ableiten. Wenn es nothwendig ist, diesen Cylinder in Rechnung zu ziehen, dann gestattet die vorhergehende Tabelle, das Verhältnis der Torsionscoefficienten für Eisen und Kupfer zu bestimmen. Da diese Coefficienten umgekehrt proportional den Quadraten der Schwingungsdauern sind, so gibt die Vergleichung der Resultate, welche mit den Drähten von Nr. 12 erhalten wurden, für deren Verhältnis die Zahl 3·35.

22. Torsionswage von Coulomb. Auf der Kenntnis der Gesetze der Torsion metallischer Drähte beruht die Construction der elektrischen Wage. Allein, da die Kräfte, welche man vergleichen muss, äußerst schwach sind, so muss man zu den Drähten, welche viel feiner sind, als jene, deren man sich in den vorhergehenden Versuchen bediente, Zuflucht nehmen.

Die Wage, welche von Coulomb zum Studium der elektrischen Abstoßungen angewendet wurde, ist in Fig. 10 dargestellt. Diese Figur und die Beschreibung, welche wir von der Wage geben, ist beinahe genau der Abhandlung von Coulomb[1] entnommen.

Auf einen Glascylinder ABCD von 12 Zoll Durchmesser und 12 Zoll Höhe setzt man eine Glasplatte AC von 13 Zoll Durchmesser, die an zwei Stellen Löcher besitzt, die ungefähr 20 Linien im Durchmesser haben; auf der in der Mitte befindlichen Öffnung ist eine Glasröhre von 24 Zoll Höhe aufgekittet. Am oberen Ende dieser Röhre ist ein Torsionsmikrometer angebracht, das aus drei Stücken besteht: das eine ist eine Messingfassung H, die auf die Glasröhre aufgekittet ist; das zweite ist aus einer Scheibe MM′, die an ihrem Rande in 360 Grade getheilt ist, und aus einer Messingröhre N gebildet, welche in die Fassung H eintritt; das dritte Stück ist ein Knopf K, welcher in eine in der Scheibe angebrachte Höhlung

[1] Mémoires de l'Académie des sciences, p. 570 (1785).

ragt, wo er sich drehen kann; der Knopf ist mit einem Index i versehen, welcher die Theilung der Scheibe berührt. Der Metalldraht ist an seinem obern Ende von einer Art Schere oder Reißfeder, die am Knopfe befestigt ist, gehalten und trägt an seinem unteren Ende eine andere Schere, in welcher eine horizontale Nadel sich befindet; diese Schere muss genügend schwer sein, um den Draht zu spannen, ohne ihn zu zerreißen. Der Draht war von Silber und hatte 28 Zoll Länge; man

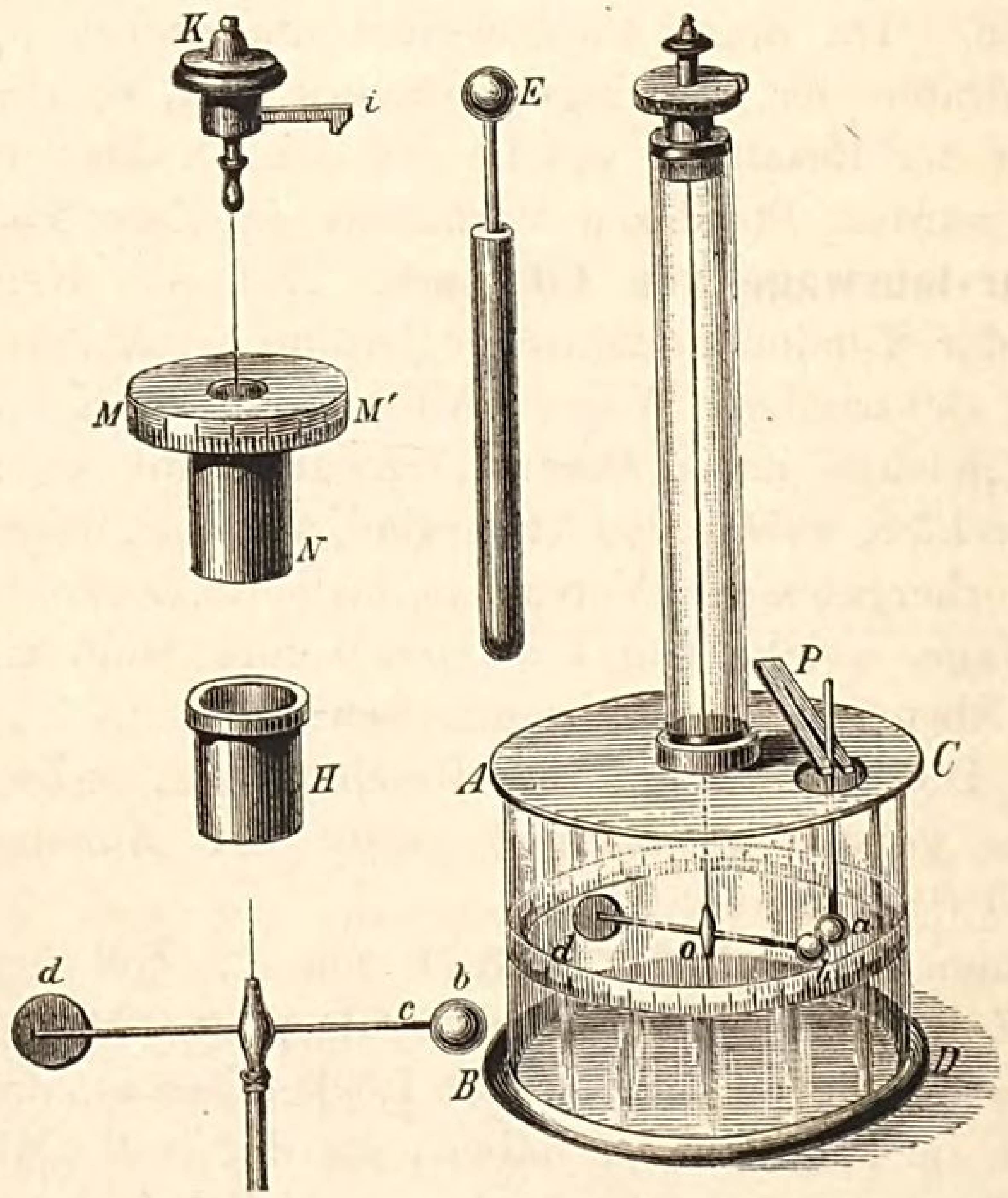


Fig. 10.

erforschte mittelst der oben in Erinnerung gebrachten Methoden, dass, um dem Drahte eine Torsion von 360⁰ zu ertheilen, eine Kraft von $\frac{1}{340}$ Gran genügen würde, welche am Ende eines Hebelarmes von 4 Zoll (ungefähr $0{\cdot}17^{\text{milligr.}}$ am Ende eines Hebelarmes von 1 Decimeter) wirken würde; ein 1 Fuß langes Stück dieses Drahtes wog außerdem nur $\frac{1}{16}$ Gran (ungefähr 3 Milligramme); der Durchmesser des Drahtes betrug ungefähr $0{\cdot}035^{\text{mm}}$. Die Nadel, welche horizontal fast in der Mitte der

Höhe des großen Gefäßes, das sie einschließt, aufgehängt ist, besteht entweder aus einem mit Siegellack überzogenen Seidenfaden oder aus einem Strohhalm, der in gleicher Weise mit Siegellack überstrichen ist und von *c* bis *b* über eine Länge von 18 Linien in einen cylindrischen Draht aus Schellack endigt; am Ende *b* dieser Nadel ist eine kleine Kugel aus Hollundermark, die 2 bis 3 Linien im Durchmesser hat; in *d* befindet sich eine kleine verticale Papierscheibe, die mit Terpentin überstrichen ist; sie bildet ein Gegengewicht zur Kugel *b* und verlangsamt die Schwingungen.

Im zweiten Loche des Deckels ist vermittelst einer Holzzange P ein kleiner Cylinder befestigt, dessen unterer Theil ebenfalls aus Schellack besteht und welcher eine Kugel *a* trägt, die auch aus Hollundermark ist. Rings um das Gefäß in der Höhe der Nadel ist ein Papierstreifen aufgeklebt, der in 360 Theile getheilt ist.

Beim Beginne der Operationen mit diesem Instrumente bringt man die seitliche Öffnung des Deckels beinahe mit dem Nullpunkte der Theilung des Papierstreifens zusammen; man stellt den Index i des Mikrometers auf den Nullpunkt der getheilten Scheibe MM′ und dreht die Scheibe auf der sie tragenden Röhre, bis die Ebene, welche durch den verticalen, die Nadel tragenden Draht und den Mittelpunkt der Kugel hindurchgeht, dem Nullpunkte der Papiertheilung entspricht. Man führt sodann die fixe Kugel genau gegenüber demselben Merkzeichen ein; die Nadel wird dann ein wenig verrückt und die bewegliche Kugel befindet sich an die fixe anliegend vermöge der kleinen Torsion, welche der Draht erfahren hat. Die Wage ist nun zum Gebrauche geeignet.

23. Betrachten wir zunächst den Fall der Abstoßungen. Man elektrisiert einen kleinen Conductor, der nichts anderes ist als eine Stecknadel mit großem Kopfe, die mit ihrer Spitze in einen Siegellackstab eingetrieben wurde; man führt diese Nadel in die Öffnung des Deckels ein und bringt sie mit der fixen Kugel in Berührung. Nun zieht man die Stecknadel heraus, die beiden Kugeln sind elektrisiert und stoßen sich gegenseitig bis zu einer Entfernung ab, welche man bestimmt, indem man nach der Ebene visiert, die durch den Draht und

die Nadel hindurchgeht. Dann dreht man den oberen Knopf in einer entsprechenden Weise im entgegengesetzten Sinne der Ablenkung der beweglichen Nadel; man vermehrt dadurch die Torsion des Drahtes; die bewegliche Kugel nähert sich wieder der fixen und nun misst man die neue Entfernung.

Man beobachtet in dieser Weise die Entfernung, bis zu welcher verschiedene Torsionswinkel die Kugel *b* gegen die Kugel *a* zurückführen und wenn man die Torsionskräfte mit den entsprechenden Entfernungen der beiden Kugeln vergleicht, kann man das Gesetz der Abstoßung bestimmen. Die gesammte Torsion des Drahtes setzt sich in jedem Versuche aus dem Winkel zusammen, um welchen die Nadel abgelenkt wurde, und jenem Winkel, um welchen man den oberen Knopf gedreht hat.

Coulomb hat eine große Anzahl diesbezüglicher Experimente gemacht und er hat jedesmal gefunden, dass die Gesammttorsion des Drahtes dem Quadrate der Entfernung der einander abstoßenden Kugeln umgekehrt proportional ist; er hat aber nur von den numerischen Resultaten eines einzigen Experimentes Bericht erstattet.

Die beiden Kugeln wurden mit dem Stecknadelkopfe elektrisiert, der Index des Mikrometers befand sich auf Null, die Nadel wurde um 36^0 abgelenkt. Die Torsion des Drahtes betrug ebenfalls 36^0.

Nachdem er den Draht mittelst des Knopfes um 126^0 tordierte, näherten sich die Kugeln und verweilten in der gegenseitigen Winkelentfernung von 18^0. Die Torsion des Drahtes betrug sodann $126^0 + 18^0 = 144^0$.

Als er den Draht um 567^0 tordierte, stellte sich die Nadel in der Entfernung von $8{\cdot}5^0$ ein. Die Gesammttorsion des Drahtes ist daher $567^0 + 8{\cdot}5^0 = 575{\cdot}5^0$.

Wäre die Ablenkung im dritten Versuche 9^0 gewesen, so würde man die Torsionen gleich 36^0, 144^0 und 576^0 gefunden haben, d. h. genau proportional den Zahlen 1, 4 und 16 oder 1^2, 2^2, 4^2, während die Winkelentfernungen sich zueinander verhalten wie 1, 1/2, 1/4.

Coulomb machte bezüglich dieses Experimentes mehrere Beobachtungen. Zunächst machte die äußerste Feinheit des

hier in Anwendung gebrachten Drahtes die Experimente sehr schwierig; die Gleichgewichtslage für eine Torsion Null war beinahe auf einige Grade nicht zuverlässig und die geringste Erschütterung genügte, um die Position des Gleichgewichtes zu stören. Auch Coulomb bediente sich öfters für ähnliche Versuche eines Drahtes, der fast den doppelten Durchmesser hatte und viel mehr Widerstand darbot. Die Kraft der Torsion war 14- oder 15mal größer, aber das Gleichgewicht stellte sich besser her und die Resultate waren dieselben.

Die gesammte Torsion des Drahtes ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Winkelentfernung der Kugeln und man kann daraus — wenigstens in erster Annäherung — den Schluss ziehen, dass die Abstoßung der elektrisierten Kugeln dem Quadrate der Entfernung ihrer Mittelpunkte umgekehrt proportional ist. Denn die Rückwirkung des Drahtes kann — wie wir gesehen haben — durch eine einzige Kraft, die an der beweglichen Kugel angreift, tangential zum Umfange jenes Kreises wirkt, den diese Kugel beschreibt, und proportional der Torsion ist, ersetzt werden. Die elektrische Abstoßung äußert sich längs der Sehne desjenigen Bogens, der die beiden Kugeln trennt; wegen der Kleinheit der Winkel aber schließt die Richtung der elektrischen Abstoßung einen kleinen Winkel mit der Tangente ein und demzufolge ist sie nahezu gleich der Torsionskraft. Diese abstoßende Kraft ist somit umgekehrt proportional dem Quadrate der Winkelentfernung der Kugeln oder auch — mit demselben Grade der Annäherung — umgekehrt proportional dem Quadrate der geradlinigen Entfernung ihrer Mittelpunkte.

24. Das vollständigere Studium des Versuches von Coulomb zeigt sogar, dass der Schluss viel strenger ist, als man durch diese summarische Betrachtungsweise voraussehen konnte.

Es muss zunächst bemerkt werden, dass es unmöglich ist, einen elektrisierten Körper jenen Einflüssen zu entziehen, die seine elektrischen Eigenschaften nach und nach zu schwächen streben oder, mit anderen Worten, der Zerstreuung der Elektricität zu steuern; ungeachtet aller Vorsichten, die man treffen mag, um die Kugeln zu isolieren, kann doch der Elektricitätsverlust nicht beseitigt werden. So beobachtete Coulomb an

demselben Tage, an welchem das erwähnte Experiment vorgenommen wurde, dass, als die bewegliche Kugel sich in einer Winkelentfernung von 30° bei einer Torsion von 50° befand, diese Kugel der fixen sich um 1° in 3 Minuten näherte. Da das Experiment, welches sich auf die Variation der Entfernung bezieht, 2 Minuten dauerte, so wird der Fehler von $1/2$ Grad, der im dritten Versuche nachgewiesen wurde, vollständig durch den Elektricitätsverlust erklärlich.

In zweiter Linie müssen — um berechtigt zu sein, aus dem Versuche den Schluss zu ziehen, dass das Gesetz des Quadrates der Entfernungen auf die wechselseitige Wirkung zweier elektrisierten Elemente anwendbar ist — die Kugeln im Verhältnisse zu der zwischen ihnen liegenden Entfernung unendlich klein gemacht sein; wir werden aber bald sehen, dass die Wirkung, welche eine gleichförmig elektrisierte Kugel auf einen äußeren Punkt ausübt, dieselbe ist, als wenn die gesammte Elektricitätsmenge im Mittelpunkte der Kugel concentriert wäre, und dass der Fehler, den man begeht, wenn man jede der beiden Kugeln durch ihr Centrum ersetzt, im Versuche von Coulomb im allgemeinen unbedeutend ist.

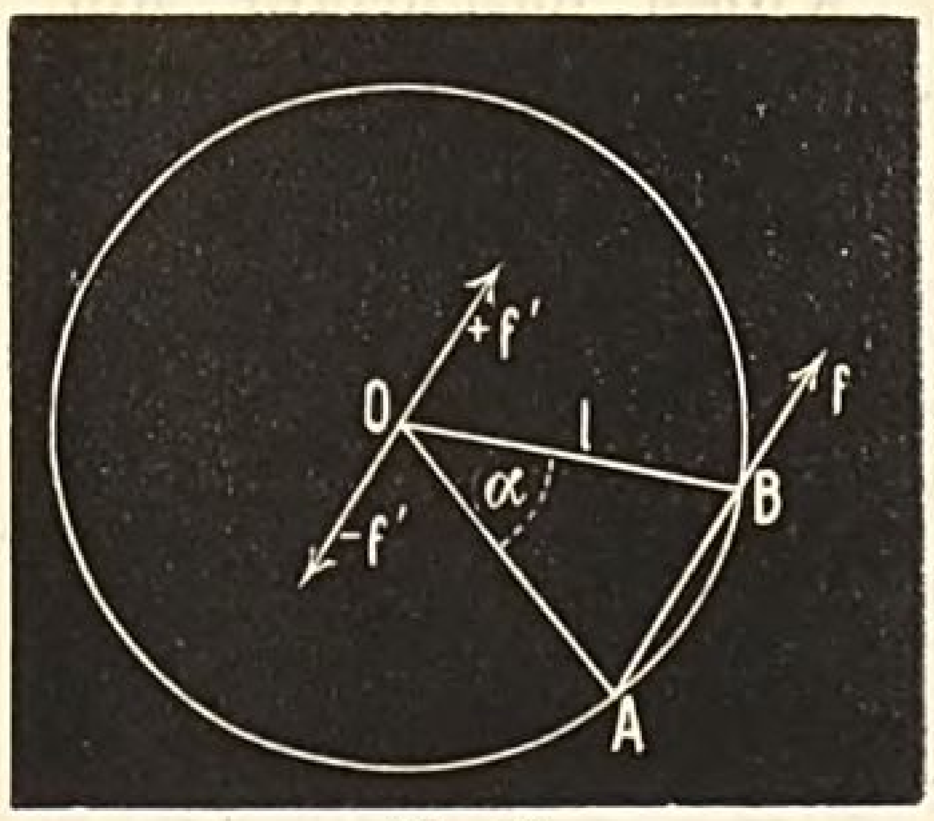


Fig. 11.

Wenn man also schließlich jede der Kugeln auf ihren Mittelpunkt reduciert, so bietet die vollständige Berechnung der Gleichgewichtsbedingungen keinerlei Schwierigkeit.

Nehmen wir als Zeichenebene jenen Kreis, welchen die bewegliche Nadel beschreibt: Sei A (Fig. 11) der Mittelpunkt der fixen Kugel, B jener der beweglichen Kugel, α die Winkelentfernung, l der Radius des Kreises und T der Winkel, um welchen man den oberen Index drehte, so dass die gesammte Torsion des Drahtes dann $T + \alpha$ ist. Zur Abstoßung f, welche die feste auf die bewegliche Kugel ausübt, können wir, ohne das Gleichgewicht des Apparates zu stören, zwei andere Kräfte $+f'$ und $-f'$, die gleich und parallel der vorhergehenden sind und im Mittelpunkte der Nadel O angreifen, hinzufügen. Die beiden Kräfte f und $-f'$ bilden ein Drehungspaar, wel-

ches auf die Nadel im entgegengesetzten Sinne des Torsionsdrehungspaares des Drahtes wirkt und das Gleichgewicht wird dann stattfinden, wenn die Momente dieser beiden Drehungspaare einander gleich sein werden.

Was die Kraft $+f'$ anlangt, so strebt sie den Draht aus der Verticalen abzulenken, aber diese Wirkung wird wegen der bedeutenden Kleinheit der elektrischen Kräfte sehr schwach sein; außerdem wird die Winkelabweichung von dieser Kraft nicht modificiert.

Bezeichnet man mit c das Moment des Torsionsdrehungspaares des Drahtes für einen Winkel gleich der Einheit, so ist das Moment des Torsionspaares des Drahtes gleich $c\,(T+\alpha)$; das Moment des Drehungspaares f und $-f'$ ist $fl \cos\frac{\alpha}{2}$; man hat daher:

$$c\,(T+\alpha) = fl \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Wenn die abstoßende Kraft f umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung der beiden elektrisierten Kugeln ist, so kann man sie darstellen durch $\frac{\varphi}{4\,l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}$, wobei φ die Abstoßung der Kugeln in der Einheit der Distanz ist; die vorhergehende Gleichung geht über in:

$$c\,(T+\alpha) = \varphi\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{4l \sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

oder auch

$$(T+\alpha) \sin\frac{\alpha}{2}.\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{4lc}.$$

Ist das Gesetz der Entfernungen giltig, so wird das erste Glied dieser Gleichung für alle Versuche, die mit einer und derselben Elektricitätsmenge ausgeführt werden, constant sein müssen.

Man sieht nun, dass die Näherungsrelation, zu welcher man gelangt ist, nicht merklich verschieden ist von jener, welche die vollständige Formel gibt. Denn innerhalb der Grenzen, innerhalb welcher die Versuche gemacht wurden, begeht man keinen nennenswerten Fehler, wenn man den Sinus und die Tangente des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ durch den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ selbst ersetzt. Für eine Ablenkung von 36° wird man haben

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0.1004,$$

und

$$\frac{\alpha^2}{4} = 0.0987\,.$$

Der Fehler, den man begeht, wenn man einen dieser Werte für den anderen substituiert, ist daher kleiner als $\frac{1}{50}$, und die Genauigkeit des Versuches kann nicht leicht diese Grenze überschreiten. Das Product $(T + \alpha)\,\alpha^2$ ist daher in allen Versuchen einer und derselben Gruppe constant, oder auch die Gesammttorsion ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Winkelentfernung. Wenn man überdies die genaue Rechnung auf die Versuche von Coulomb in Anwendung bringt, so erhält man die folgenden Resultate:

Versuche	T	α beobachtet	α gerechnet	Unterschied
1	0°	36°	"	"
2	126°	18°	18°6′	+ 6′
3	567°	8°30′	9°5′	+ 35′

Bei der Berechnung der Ablenkungen wurde von der ersten Beobachtung ausgegangen. Die Differenz von 6′ im zweiten Experimente ist unbeträchtlich; das dritte Experiment liefert eine Differenz von 35′, welche zum Theile erklärbar ist durch den Elektricitätsverlust.

Auch die Gefäßwände wirken, da sie durch Influenz elektrisch werden, auf die bewegliche Kugel ein. Wenn die erste-

ren aus Glas sind, so ist es unmöglich, die Elektrisierung auf ihrer Oberfläche anders, als durch sehr schwierige Messungen in jedem Punkte zu bestimmen. Wir können den erwähnten Einfluss rechnen, wenn wir nach Maxwell(¹) folgenden einfachen Fall voraussetzen. Wir nehmen an, das Gehäuse sei eine Metallkugel vom Radius b, das Centrum des Drehungsarmes falle mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammen; die bewegliche Kugel stehe von diesem Mittelpunkte um a ab, die feste um a_1: r sei ihre gegenseitige Entfernung, der Winkel zwischen ihnen sei θ, ihre Ladungen E und E_1.

Wenn man die Wirkung der Induction auf die Elektricitätsvertheilung der beiden Kugeln vernachlässigt, so kann man die zwischen den Kugeln herrschende Abstoßung ausdrücken durch:

$$\frac{EE_1}{r^2}$$

und das Moment dieser Kraft bezüglich einer durch den Mittelpunkt gehenden verticalen Axe ist:

$$\frac{EE_1\, aa_1 \sin\theta}{r^3}.$$

Das elektrische Bild von E_1 bezüglich der sphärischen Oberfläche des Gehäuses ist ein Punkt auf demselben Halbmesser, auf dem E_1 sich befindet, der in einer Entfernung $\frac{b^2}{a}$ vom Mittelpunkte ist und mit einer Elektricitätsmenge $-E_1\frac{b}{a_1}$ geladen gedacht wird. Das auf die Aufhängeaxe bezügliche Drehungsmoment der Anziehung, die zwischen E und diesem Bilde herrscht, ist:

$$EE_1\frac{b}{a_1}\frac{a\frac{b^2}{a_1}.\ \mathrm{Sin}\,\theta}{\left\{a^2-2\frac{ab^2}{a_1}\cos\theta+\frac{b^4}{a_1^{\,2}}\right\}^{\frac{3}{2}}}=EE_1\frac{aa_1\ \mathrm{Sin}\,\theta}{b^3\left\{1-2\frac{aa_1}{b^2}\cos\theta+\frac{a^2a^2_1}{b^4}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

(¹) Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Oxford 1873. Wir fügen der Vollständigkeit halber diese Betrachtung ein, obwohl zum Verständnis derselben die Kenntnis von Sätzen erfordert wird, deren Richtigkeit an späterer Stelle dieses Werkes erwiseen wird.

Wenn b, d. i. der Halbmesser des sphärisch vorausgesetzten Gefäßes, im Verhältnisse zu a und a_1, den Entfernungen der Kugeln vom Drehungsmittelpunkte, groß ist, so können wir das gesammte Drehungsmoment schreiben:

$$EE_1\, aa_1 \operatorname{Sin} \theta . \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

und die Gleichgewichtsbedingung wird dann, wenn wir wieder den Torsionswinkel T bezeichnen:

$$EE_1\, aa_1 \operatorname{Sin} \theta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3}\right) = c\left(T + \theta\right).$$

Die im elektrischen Bilde von E befindliche Elektricitätsmenge übt begreiflicherweise auf die Drehungsmomente keinen Einfluss aus.

Riess ([1]) hat analoge Experimente mit einer ähnlichen Wage gemacht, deren Draht nur 20 Zoll Länge hatte, er hat sich aber nicht wie Coulomb darauf verlegt, einfache Zahlen zu erhalten. Wir geben die Tabelle dieser Experimente und der Berechnung der Winkel, wie sie sich aus der exacten Formel bei Zugrundelegung der ersten Beobachtung ergibt:

Versuche	T	α beobachtet	α berechnet	Unterschied
1	0°	42°	"	"
2	70°	28°	27°44'	—16'
3	110°	23°	23°42'	+42'

Die Versuche befinden sich nicht in solcher Übereinstimmung mit der Rechnung, wie jene von Coulomb, aber die Unterschiede können wieder auf Rechnung der Beobachtungsfehler und der Elektricitätszerstreuung geschoben werden.

25. Derselbe Apparat kann dazu verwendet werden, um das Gesetz der elektrischen Anziehungen aufzustellen. Zu diesem Behufe elektrisiert man zuerst die beweg-

([1]) Riess, Reibungselektricität, Bd. I., p. 92, man sehe auch G. Wiedemann, die Lehre von der Elektricität I. Bd. Braunschweig, 1882.

liche Kugel und entfernt sie von der fixen Kugel, indem man den oberen Index um einen gewissen Winkel dreht; man ladet sodann die fixe Kugel mit entgegengesetzter Elektricität. Die bewegliche Kugel wird dann gegen die fixe gezogen und kann sich in einer gewissen Entfernung im Gleichgewichte erhalten, wenn der elektrischen Anziehung das Gleichgewicht durch die Torsion des Drahtes gehalten wird. Sei z. B. a der Winkel, um den man den Index drehte, F die Kraft, welche man an der beweglichen Kugel tangential zur Peripherie des Kreises, welchen sie beschreibt, anbringen muss, um den Draht um einen Winkel gleich der Einheit zu drehen, x die Winkelentfernung der beiden Kugeln, wenn Gleichgewicht eingetreten ist und φ die Anziehung der beiden Kugeln in der Distanzeinheit. Die Torsion des Drahtes ist $a-x$, und, wenn die Ablenkung genügend klein ist, um die Näherungsformeln in Anwendung bringen zu können, muss man haben

$$F(a-x)=\frac{\varphi}{x^2},$$

woraus man erhält

$$x^2(a-x)=\frac{\varphi}{F}.$$

Man wird leicht erkennen, dass diese Versuche oft Schwierigkeiten begegnen, welche ein Misslingen derselben zur Folge haben können. Bei gegebener Elektrisierung der Kugeln nämlich wird die Attraction derselben umso bedeutender sein, je kleiner die ursprüngliche Deviation des Wagebalkens gewesen ist; umsomehr wird sich die bewegliche Kugel dann der fixen Kugel nähern und umso größer der Torsionswinkel sein, damit die Torsion der größeren Attraction der Kugeln das Gleichgewicht halten kann. Wenn also a unter eine gewisse Größe herabgeht, so kann die Torsion des Fadens nicht so groß werden, um die Nadel in einer abgelenkten Lage zu erhalten, die bewegliche Kugel wird sich dann an die fixe anlegen.

Diese Gleichung ist also für einen gegebenen Wert der Anfangstorsion a nur dann möglich, wenn der Maximalwert

des ersten Theiles der Gleichung den constanten Wert des zweiten Gliedes überragt. Setzt man die nach x genommene Derivierte des ersten Theiles gleich Null, so erhält man

$$2x(a-x)-x^2=0,$$

woraus sich ergibt:

$$x=\frac{2a}{3}.$$

Dieser Wert von x entspricht dem Maximum der ersten Seite der Gleichung, welche dann gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^3$ ist.

Damit das Gleichgewicht möglich sei, muss daher

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^3>\frac{\varphi}{F}$$

oder

$$a^3>\frac{27}{4}\cdot\frac{\varphi}{F}$$

sein.

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so bewegt sich die bewegliche Kugel schnell gegen die fixe Kugel und die Berührung der beiden Kugeln kann selbst dann stattfinden, wenn das Gleichgewicht möglich ist, wenn die Schwingungen zu weit sind und die bewegliche Kugel zu nahe der festen Kugel bringen. Coulomb hat einige Versuche nach dieser Methode gemacht und ebenfalls das Gesetz des Quadrates der Entfernungen bestätigt gefunden, er gibt aber an, dass die Versuche oft misslingen und dass die Anwendung eines isolierenden Körpers, z. B. eines zwischen Standkugel und Wagebalken gespannten verticalen Seidenfadens, der dazu bestimmt ist, die Berührung der beiden Kugeln zu verhindern, nicht viel mehr nützt, weil die Nadel an diesem Hindernis hängen bleibt, wodurch man an Zeit und Elektricität verliert.

26. Eine vollständigere Discussion der Formel lässt noch besser die Schwierigkeit der Versuche hervortreten. Schreiben wir die Gleichung unter der Form:

$$a-x=\frac{\frac{\varphi}{F}}{x^2}=\frac{b}{x^2},$$

und beziehen die beiden Curven

(1) $$y_1=\frac{b}{x^2},$$

(2) $$y_2=a-x$$

auf rechtwinklige Axen.

Die Gleichgewichtslagen entsprechen den Schnittpunkten dieser beiden Curven. Die erste (1) ist eine hyperbolische Curve mit zwei Armen (Fig. 12) und hat zu Asymptoten die Axe der x einerseits und den positiven Theil der y Axe andererseits. Der Ast der Curve, welcher im linken Quadranten liegt, passt nicht für das Problem, weil die Variable x physikalisch nicht negative Werte erhalten kann; dieser Ast wurde deshalb nur punktiert.

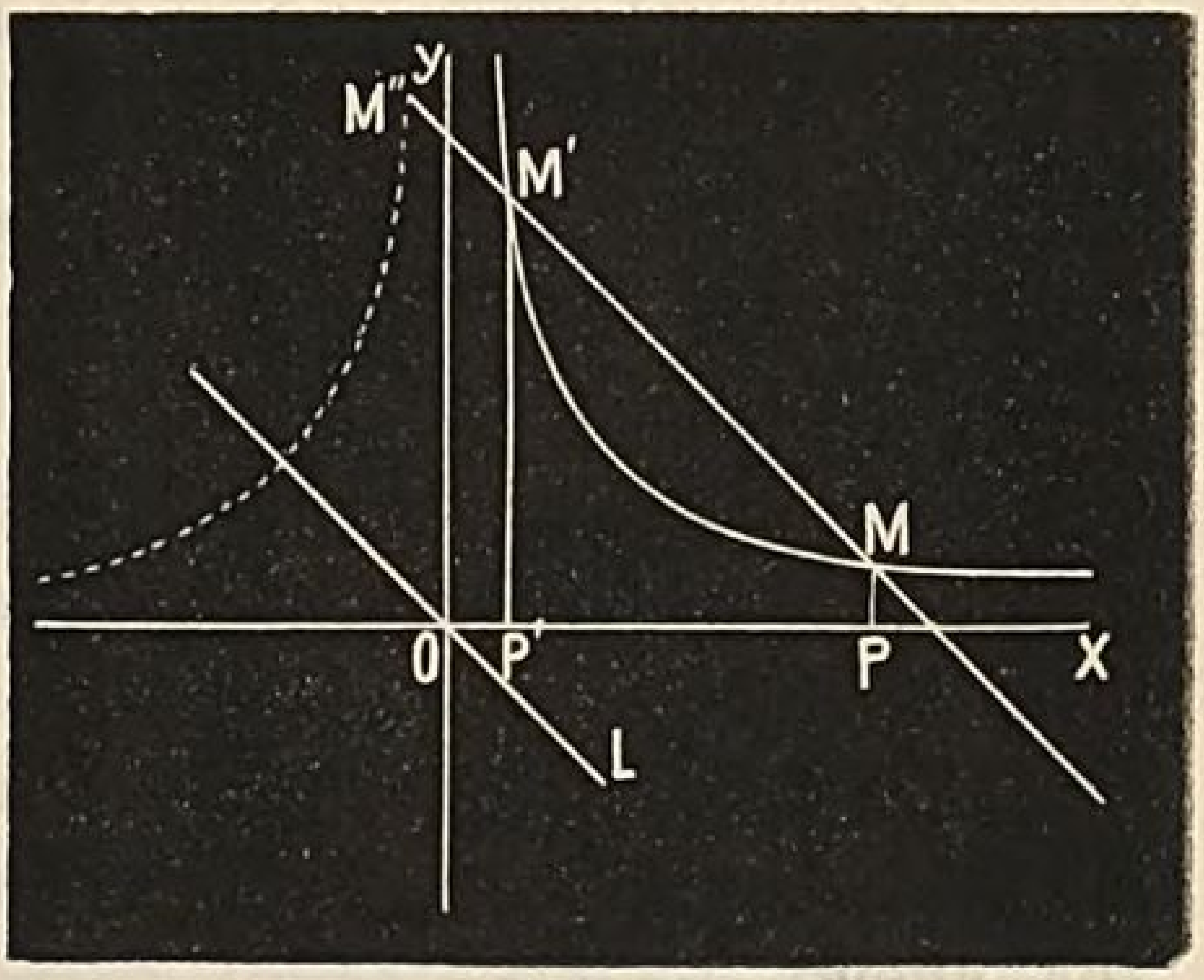


Fig. 12.

Die Curve (2) ist eine Gerade, welche zu den Coordinatenaxen eine Neigung von 45° besitzt. Ist $a=o$, so ist diese Gerade OL; sie begegnet dann nicht dem rechten Aste der ersten Curve und das Gleichgewicht kann nicht stattfinden, was übrigens evident ist. Wenn der Wert von a genügend groß ist, so erlangt die Gerade (2) eine solche Lage, wie sie MM" zeigt und sie trifft den ersten Ast der Curve in zwei Punkten M und M'. Die Abscisse OP, welche dem Punkte M entspricht, entspricht einer Gleichgewichtsposition und dieses Gleichgewicht ist stabil. In der That, wenn man dem x einen größeren Wert als OP beimisst, so wird die Ordinate der Geraden kleiner als jene der Curve, die Torsionskraft wird schwächer als die Attractionskraft und die bewegliche Kugel wird gegen ihre Gleichgewichtsposition wieder zurückgebracht; ebenso wird,

wenn der Wert von x kleiner als OP geworden ist, die Ordinate der Curve kleiner als jene der Geraden, die Attraction wird schwächer als die Torsionskraft und die bewegliche Kugel wird wieder gegen ihre Gleichgewichtsposition getrieben. Der Punkt M′ liefert ebenfalls eine Lösung, aber dieselbe entspricht der des nichtstabilen Gleichgewichtes; die bewegliche Kugel bewegt sich schnell gegen die fixe Kugel, wenn ihre Entfernung kleiner als OP′ geworden ist und sie wird zur anderen Gleichgewichtslage M zurückkehren, wenn ihre Distanz größer als OP′ ist. Was die dritte Lösung M″ anbelangt, so passt sie nicht für das physikalische Problem. Man sieht nun, dass auch für diesen Wert von a die Schwingungen der Nadel kleiner sein werden müssen als PP′, damit sie nicht das Feld des stabilen Gleichgewichtes verlasse.

Man kann daher nicht mit Werten von a experimentieren, die seinem Minimalwerte allzu benachbart sind, weil das stabile Gleichgewicht dann sehr schwer zu erhalten wäre und wenn man andererseits dem a viel größere Werte gibt, so sind die Gleichgewichtspositionen zu sehr entfernt, die Näherungsrechnung ist dann nicht mehr ausreichend und die Empfindlichkeit des Apparates wird sehr vermindert. Es ist also schließlich der Versuch nur innerhalb sehr enger Grenzen möglich und die Verification des Gesetzes ist dann nicht mehr zureichend.

27. Methode der Schwingungen. Um das Gesetz der Attractionen zu bestätigen, hat Coulomb eine andere Methode[1]) mit Vortheil in Anwendung gebracht, welche, „obwohl sie weniger einfach und weniger direct als die erste ist, weniger Sorgfalt und Vorsichten zum Gelingen erfordert. Sie besteht darin, dass man eine Nadel horizontal aufhängt, deren Ende allein elektrisiert ist, und welche einer elektrisierten Kugel, die entgegengesetzte Elektricität besitzt, in einer gewissen Entfernung gegenübergestellt, von letzterer angezogen wird und vermöge der von dieser Kugel ausgehenden Kraft in Schwingungen geräth. Man bestimmt sodann mittelst Rechnung aus der in einer gegebenen Zeit ausgeführten Anzahl Schwingungen

[1]) Mémoires de l'Académie des sciences, p. 581 (1785).

die anziehende Kraft in verschiedenen Entfernungen, gerade sowie man die Kraft der Schwere mittelst der Schwingungen eines gewöhnlichen Pendels untersucht."

Coulomb hat zunächst in Erfahrung gebracht, dass ein Coconfaden, welcher bis 80 Gran (4·24gm.) tragen kann, ohne zu zerreißen, eine solche Torsionsbiegsamkeit hat, dass, um eine Fadenlänge von 3 Zoll um einen ganzen Umkreis zu tordieren, man nur eine Kraft von $\frac{1}{60000}$ Gran (weniger als $\frac{1}{1000}$ eines Milligrammes) anwenden muss, welche mit einem Hebelarme von 7 bis 8 Linien (16 bis 18 Millimeter) wirkt, so dass, wenn man eine mittelst eines gleichen Fadens aufge-

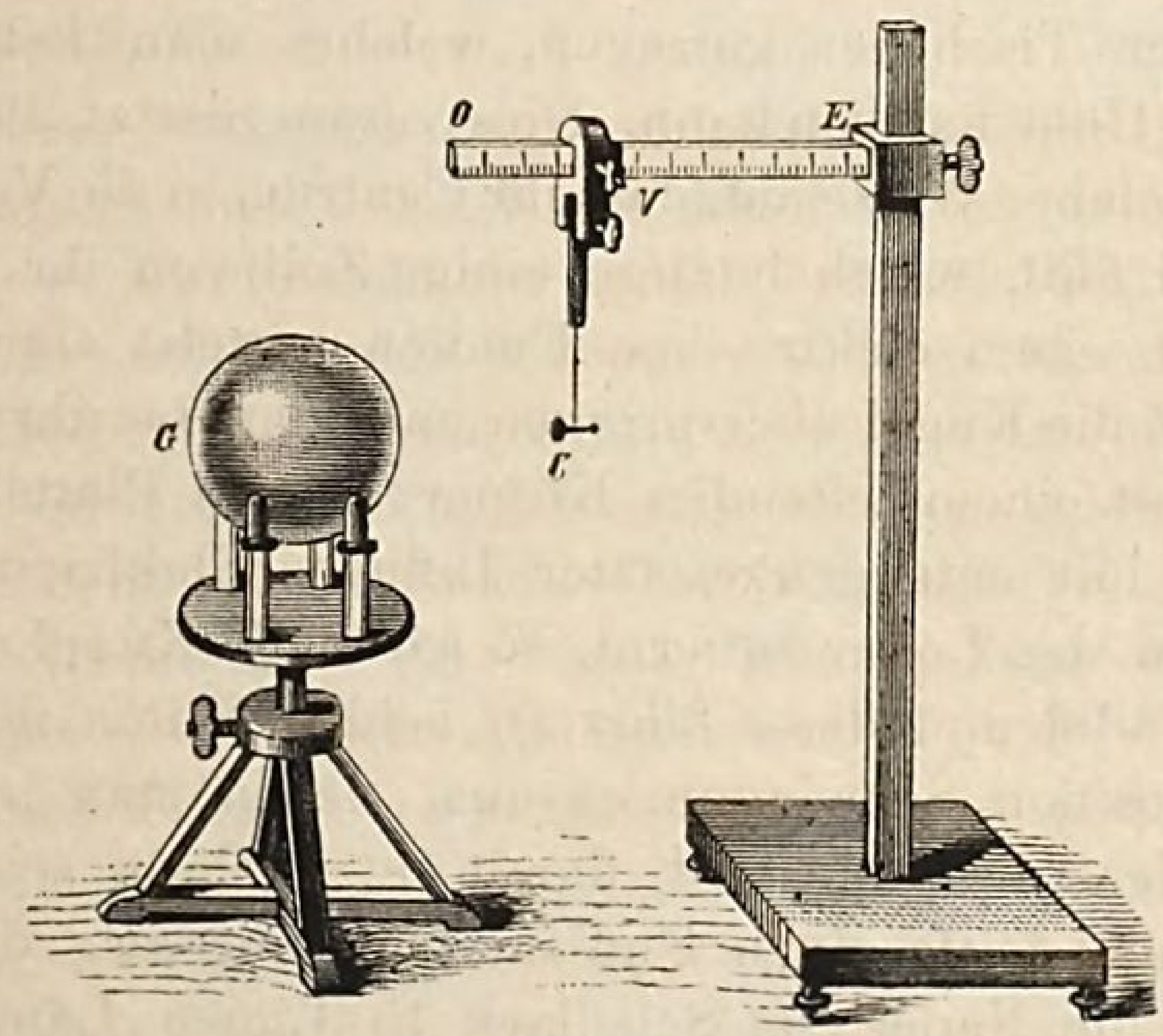


Fig. 13.

hängte Nadel mittelst irgendeiner Kraft in Schwingungen versetzt, die Schwingungsdauer der Nadel nur in unmerklicher Weise von der Torsionskraft beeinflusst werden kann, selbst dann, wenn die äußere Kraft nur den hundertsten Theil eines Grans (0·53 Milligramm) betragen würde.

Coulomb hieng eine Nadel aus Schellack (Fig. 13) an einen Seidenfaden, der 7 bis 8 Zoll lang war, und aus einer einzigen Faser, wie es bei einem Coconfaden der Fall ist, bestand; am Ende wurde perpendiculär zur Nadel eine kleine Kreisscheibe C, von 8 bis 10 Linien im Durchmesser, befestigt; dieselbe war sehr leicht und aus einem Blatt Goldpapier ge-

schnitten. Der Seidenfaden wurde am unteren Ende eines Stäbchens befestigt, das im Feuer getrocknet und mit Schellack oder Siegellack überkleidet war; dieses Stäbchen wurde von einer Schere getragen, welche längs einer getheilten Schiene OE sich verschieben und nach Belieben mittelst der Schraube V festhalten lässt. Dieser Nadel gegenüber ist eine Kugel G aus Kupfer oder eine mit Stanniol überkleidete Kugel aufgestellt, dieselbe wird von vier 3 bis 4 Zoll langen Glasstützen getragen, welche mit Siegellack überstrichen sind und von denen eine jede — um die Isolierung vollständiger zu machen — an ihrem oberen Ende einen Siegellackknopf trägt. Diese 4 Stützen werden — wie die Figur zeigt — von einem verschiebbaren Tischchen getragen, welches man heben und in passender Höhe fixieren kann. Dies vorausgesetzt, stellt man die Kugel in solcher Weise auf, dass ihr Centrum in die Verlängerung der Nadel fällt, welch letztere einige Zoll von ihr entfernt ist. Man lässt einen elektrischen Funken mittelst einer Leydnerflasche auf die Kugel überspringen und man berührt das Plättchen C mit einem leitenden Körper; dieses Plättchen erweist sich dann mit entgegengesetzter Influenz-Elektricität geladen. Wenn man den Leiter entfernt, so wirkt die Kugel attrahierend auf die Nadel und diese führt zu beiden Seiten ihrer Gleichgewichtsposition Schwingungen aus, denen man nur eine unbedeutende Amplitude gibt, damit sie isochron seien.

Die Kugel hatte einen Fuß im Durchmesser, die Platte C 7 Linien, die Nadel aus Schellack 15 Linien Länge und der Coconfaden 8 Zoll.

Der Apparat wurde geladen; man wertete die Dauer von 15 Schwingungen aus, wenn die Platte C in verschiedenen Entfernungen von der Kugel sich befand, wie die folgende Tafel anzeigt:

Entfernung der Platte von der Oberfläche der Kugel:	Entfernung der Platte vom Centrum der Kugel:	Dauer der 15 Schwingungen:	Verhältnis der Dauer der 15 Schwingungen zur Entfernung vom Centrum:
3 Zoll	9 Zoll	20″	2.22
12 „	18 „	41″	2.28
18 „	24 „	60″	2.50

Geht man weiter, so kann man zunächst beobachten, dass die in der letzten Spalte angegebenen Verhältnisse beinahe gleich sind; der Verlust der Elektricität aber ist zum größten Theile Ursache der merklichen Vergrößerung dieser Verhältnisse. Die drei Beobachtungen erforderten ungefähr 4 Minuten; am Tage dieses Experimentes betrug die Verminderung der Elektricität ungefähr $\frac{1}{40}$ per Minute, was $\frac{1}{10}$ an Verlust für die dritte Beobachtung macht. Da die Dauer der Schwingungen umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Kraft ist, so würde man in dieser letzten Beobachtung eine Dauer von $60 \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}}$ oder 57 Secunden finden müssen, was das Verhältnis 2·37 liefern würde.

Mit anderen Worten, wäre die Schwingungsdauer genau proportional der Entfernung des Plättchens vom Mittelpunkte der Kugel, so würde man für die Dauer der 15 Schwingungen 20″, 40″ und 53.3″ anstatt 20, 40 und 57 finden, welche man als Zahlen des Experimentes, verbessert von dem Einflusse des Verlustes, betrachten kann. Die Differenz von $\frac{1}{20}$, welche man für die letzte Zahl nachgewiesen hat, fällt innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. In der That gelingt das Experiment nur dann, wenn die Atmosphäre vollständig trocken ist, wenn man mit Sorgfalt jeden Luftstrom abhält, und wenn man jeden fremden leitenden Körper in eine Entfernung von mindestens drei Fuß bringt.

28. Wenn diese experimentelle Beziehung einmal aufgestellt ist, muss man aus ihr das Elementargesetz der elektrischen Wirkungen ableiten. Wir werden uns auf das folgende Theorem stützen:

Wenn alle Punkte einer sphärischen Fläche auf einen äußeren Punkt, der sich in irgendeiner Entfernung von dieser Oberfläche befindet, mit einer attractiven oder repulsiven Kraft, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist, wirken, so ist die Wirkung dieselbe, als wenn die gesammte wirksame Masse im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre.

Dieses von Newton herrührende Theorem ist von solcher Wichtigkeit, dass es nützlich ist, von demselben an dieser Stelle eine directe Darstellung zu geben.

Sei μ die Masse, welche in einem Oberflächenstücke der Kugel, das gleich der Einheit ist, enthalten ist, m die Masse des äußeren Punktes, $\varphi\frac{m\mu d\sigma}{\rho^2}$ die Wirkung, welche von einem Oberflächenelement $d\sigma$, das in einer Entfernung ρ von diesem Punkte gelegen ist, auf letzteren ausgeübt wird.

Sei O (Fig. 14) der Mittelpunkt der Kugel, deren Radius R ist. MM' sei das Element $d\sigma$ und A der äußere Punkt, dessen Entfernung vom Centrum OA gleich D ist. Die Kraft $\varphi\frac{m\mu d\sigma}{\rho^2}$, welche wir, um unsere Untersuchung zu fixieren, attractiv voraussetzen werden, ist vom Punkte A gegen den Punkt M gerichtet.

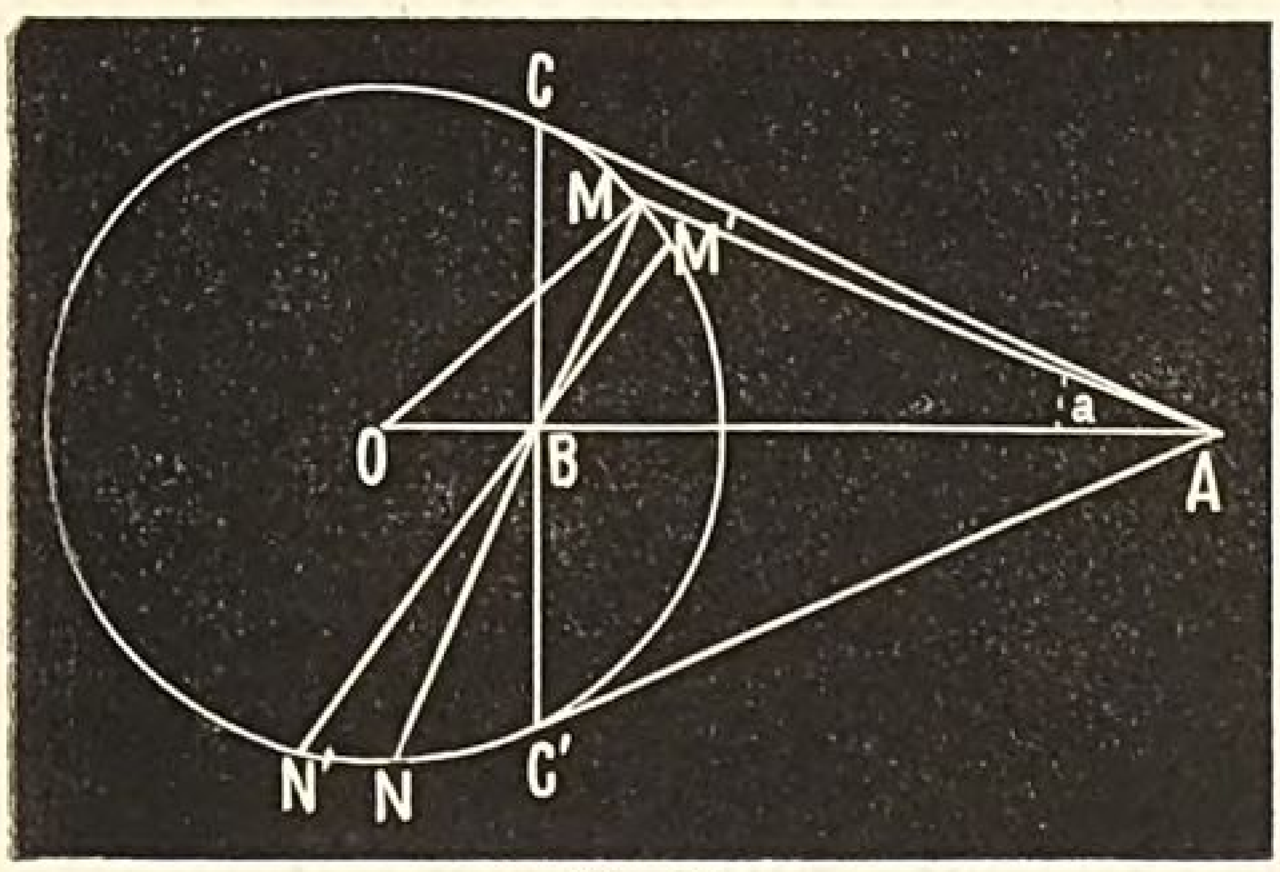


Fig. 14.

Da die Resultante der Wirkungen, die von der Kugel ausgehen, offenbar gegen das Centrum gerichtet ist, wird es genügen, von jeder elementaren Wirkung diejenige Componente $\varphi\frac{m\mu d\sigma}{\rho^2}\cos a$, welche gegen das Centrum gerichtet ist, zu betrachten und ihre Summe auszuwerten.

Betrachten wir zu diesem Behufe den Punkt B, welcher dem Punkte A conjugiert ist, d. h., welcher auf der Geraden OA derart gelegen ist, dass man hat:

$$OB \times OA = R^2.$$

Man erhält diesen Punkt, wenn man vom Punkte A eine Tangente zum Kreise zieht und vom Berührungspunkte ein Perpendikel auf die Gerade OA fällt; der Punkt B ist dann der Fußpunkt dieses Perpendikels.

Zieht man MB, so entstehen zwei Dreiecke OMB, OAM, welche ähnlich sind, da sie denselben Winkel bei O haben

und die Seiten, welche denselben einschließen, proportional sind, denn man erhält aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{OB}{R} = \frac{R}{OA};$$

deshalb ist der Winkel OMB gleich a.

Beschreiben wir vom Punkte B als Centrum eine Kugel vom Radius r gleich BM und bezeichnen wir mit $d\omega$ den Winkel, unter dem man vom Punkte B das Element $d\sigma$ erblickt. Das Oberflächenelement, welches durch diesen räumlichen Winkel auf der Kugel vom Radius r ausgeschnitten wird, wird $r^2 d\omega$ sein. Die beiden Oberflächenelemente $r^2 d\omega$ und $d\sigma$ bilden auch den Winkel α, da sie wechselweise auf den Geraden BM und OM perpendiculär stehen; hieraus ergibt sich:

$$r^2 d\omega = d\sigma . \cos a.$$

Man erhält nun daraus:

$$\varphi . \frac{m\mu . d\sigma}{\rho^2} \cos a = \varphi . m . \mu \frac{r^2}{\rho^2} d\omega .$$

Das Verhältnis $\frac{r}{\rho}$ ist constant, denn die Ähnlichkeit derselben Dreiecke liefert auch:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{OM}{OA} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\rho} = \frac{R}{D}.$$

Die Componente der vom Elemente MM′ ausgehenden Wirkung, welche gegen den Mittelpunkt gerichtet ist, ist daher gegeben durch die Formel:

$$\varphi . m . \mu \frac{R^2}{D^2} d\omega .$$

Man sieht schon, dass diese Componente dieselbe ist, wie jene, welche von der Wirkung des Elementes NN′, das zum ersten in Bezug auf den Punkt B entgegengesetzt liegt, herrührt.

Die Wirkung der gesammten Kugeloberfläche ist die Summe aller ähnlichen Ausdrücke, welche sich auf alle Elemente der

Oberfläche beziehen, d. h. sie ist:

$$\varphi.m.\mu\,\frac{R^2}{D^2}\,\Sigma d\omega = \varphi.m.\mu.\,\frac{R^2}{D^2}.\,4\pi = \varphi m\,\frac{4\pi R^2\mu}{D^2}.$$

Es ist deshalb diese Wirkung dieselbe, als wenn die Gesammtmasse $4\pi R^2\mu$, welche auf der sphärischen Oberfläche sich befindet, auf den Punkt A in der Entfernung OA wirken würde, also im Mittelpunkte der Kugel concentriert wäre. Aus dieser Betrachtungsweise ergeben sich noch folgende Sätze, die später von Wichtigkeit sein werden, mit Leichtigkeit:

a) Ist der Punkt A der Oberfläche unendlich nahe, so ist fast $D = R$ und die Wirkung der Schichte ist gleich

$$\varphi m 4\pi\mu.$$

Nehmen wir die Masse des äußeren Punktes A also $m = 1$ an, setzen wir ferner fest, dass zwei Masseneinheiten, welche in der Entfernung *1* voneinander sich befinden, mit der Krafteinheit aufeinander wirken, dann ist $\varphi = 1$ und die Wirkung der auf der Kugel ausgebreiteten Schichte auf den der Oberfläche unendlich naheliegenden Punkt ist

$$4\pi\mu.$$

Wir werden später sehen, dass diese Formel für einen beliebig gestalteten Leiter gilt.

b) Zeichnen wir vom Punkte A einen die Kugel tangierenden Kegel, so gehören die Berührungspunkte C, C′ einer Ebene an, welche auf OA senkrecht steht, durch den früher erwähnten Punkt B geht und die Kugeloberfläche in zwei ungleiche Theile theilt. Früher wurde gezeigt, dass das Element MM′ dieselbe Wirkung wie NN′ auf A ausübt. Es theilt daher die Ebene CC′ die Kugeloberfläche in zwei Theile, deren Wirkungen auf den Punkt A gleich sind: jede derselben beträgt

$$\varphi m\,\frac{2\pi R^2}{D^2}\,\mu$$

oder nach den früheren Voraussetzungen:

$$2\pi\mu.\frac{R^2}{D^2}.$$

Ist wieder A unendlich nahe der Kugeloberfläche, dann wird die vordere Zone unendlich klein und ihre Wirkung auf A reduciert sich auf $2\pi\mu$. Auch dieses Resultat gilt für eine beliebige Oberfläche.

Betrachtet man nun nicht eine mit Masse belegte Kugeloberfläche, sondern eine aus homogenen concentrischen Kugelschalen zusammengesetzte Kugel, so kann man dasselbe Raisonnement für eine Gruppe von unendlich dünnen Schalen, in welche man die gesammte Masse zerlegen kann, wiederholen. Das Theorem ist anwendbar auf eine jede dieser Schalen, die Resultante wird dieselbe sein, als wenn die gesammte wirksame Masse im Mittelpunkt der Kugel concentriert wäre.

Wenn die elektrischen Wirkungen das Gesetz des Quadrates der Distanzen befolgen, so muss, da die Elektricität auf der Kugel des vorhergehenden Versuches, wenn auch nicht einzig und allein auf der Oberfläche, doch wenigstens in homogenen concentrischen Lagen vertheilt ist (die Influenz der geringen Ladung der Nadel kann keine merkliche Störung in dieser Vertheilung hervorrufen), diese Kugel auf das Pendel so wirken, als wenn die gesammte Elektricität, welche sie besitzt, in ihrem Centrum vereinigt wäre.

Wenn die Oscillationen der Nadel sehr klein sind, wie wir es vorausgesetzt haben, so ändert sich die Entfernung des Plättchens vom Centrum der Kugel nicht merklich und die Richtung der Kraft selbst variert nur sehr wenig. Die Nadel ist somit einer Kraft unterworfen, die an Größe und Richtung nahezu constant bleibt und sie oscilliert wie ein geodätisches Pendel. Die Dauer T der Schwingungen wird durch die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{Fl}}$$

gegeben, in welcher Σmr^2 das Trägheitsmoment der Nadel in Bezug auf den Aufhängefaden, l die Länge der Nadel und F die Kraft ist, welche auf das kleine elektrisierte Plättchen C ausgeübt wird. Wenn T' die Dauer der Schwingungen derselben Nadel ist, sobald sie einer anderen Kraft F' unter-

worfen wird, so wird man haben:

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{F'}{F}}$$

Die Wirkungen der Kugel stehen im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen D und D' des Plättchens vom Centrum der Kugel, deshalb hat man auch:

$$\frac{F'}{F} = \frac{D^2}{D'^2} \text{ oder } \sqrt{\frac{F'}{F}} = \frac{D}{D'}.$$

Man erhält daraus:

$$\frac{T}{T'} = \frac{D}{D'}.$$

Die Schwingungszeiten der Nadel müssen deshalb den Distanzen des Plättchens vom Centrum der Kugel proportional sein, was mit dem Versuche in Übereinstimmung ist.

Die Umkehrung der Betrachtungen, zu deren Angabe wir nun gelangen, ist auch richtig. Wenn man auf dem Wege des Versuches zeigt, dass die Wirkung einer Kugel auf einen äußeren Punkt umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Mittelpunktes der Kugel vom betrachteten Punkte ist, so kann man daraus schließen, dass die Elementarkräfte in gleicher Weise das Gesetz des Quadrates der Entfernungen befolgen.

Man kann bemerken, dass dasselbe Theorem sich auch auf die Wechselwirkung zweier Kugeln A und B in Anwendung bringen lässt, die aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzt sind. Denn die Wirkung der einen Kugel A auf jeden Punkt der zweiten Kugel ist dieselbe, als ob die Masse dieser ersten Kugel in ihrem Centrum vereinigt wäre; man hat dann nur mehr die Wirkung eines Punktes auf eine Kugel in Betracht zu ziehen und die gegenseitige Wirkung der beiden Kugeln reduciert sich auf jene der Mittelpunkte, in diesen wird man die Massen der beiden betrachteten Kugeln einzeln concentriert zu denken haben. So ist man z. B. in der Coulomb'schen Wage berechtigt, die beiden elektrisierten Kugeln

durch ihre Mittelpunkte zu ersetzen, was auch auf Grundlage einer Näherungsbetrachtung geschehen ist. Dennoch ist diese Schlussweise nur dann strenge, wenn die Elektricität, welche jede Kugel besitzt, symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes vertheilt betrachtet werden kann; eine derartige Elektricitätsvertheilung kann nun aber nicht mehr angenommen werden, wenn der Durchmesser der Kugeln nicht hinlänglich klein im Verhältnis zur Entfernung, welche zwischen ihnen liegt, ist.

Die Methode der Schwingungen kann angewendet werden, um das Gesetz der elektrischen Abstoßungen zu verificieren. Coulomb hat aber gefunden, dass alle Versuche, in denen es sich um die abstoßende Kraft der Elektricität handelt, sich in einer einfacheren, genaueren und bequemeren Weise mittelst der Wage ausführen lassen.

29. Gesetz der Elektricitätsmengen. Um die Art und Weise zu studieren, wie die elektrischen Kräfte mit den vorhandenen Elektricitätsmengen variieren, muss man zunächst diese Mengen selbst festsetzen und angeben, wie man auf einem Körper eine elektrische Ladung erhalten kann, die zwei- oder dreimal so groß ist als auf einem anderen Körper. Die Untersuchung kann in zweifacher, verschiedener Weise betrachtet werden: Sieht man nach Analogie der in der allgemeinen Mechanik angenommenen Definitionen die elektrischen Massen oder Elektricitätsmengen proportional den Kräften an, so wird man nur eine Definition hierher übertragen, wenn man sagt: die elektrischen Kräfte sind proportional den Elektricitätsmengen. Der Versuch lehrt, dass, wenn eine leitende elektrisierte Kugel in Berührung mit einer anderen identischen Kugel, die sich in neutralem Zustande befindet, gebracht wird, die auf einen äußeren Körper von jeder Kugel nach ihrer Trennung ausgeübte Wirkung dieselbe ist und der Hälfte jener Wirkung gleichkommt, welche die erste Kugel an und für sich ausüben würde. Die Ladungen oder die elektrischen Massen dieser beiden Kugeln sind daher untereinander gleich und um die Hälfte kleiner als jene der ersten.

Von einem anderen Standpunkte aus kann man annehmen, dass, sobald eine leitende elektrisierte Kugel in Berührung mit

einer anderen, im neutralen Zustande befindlichen gebracht wird, die gesammte Elektricitätsmenge sich nicht ändert, so dass jede Kugel dann die Hälfte der Elektricitätsmenge besitzt, welche sich ursprünglich auf der ersten finden würde. Diese Meinung kann keinen Zweifel erzeugen, wenn die Elektricität ein materielles Fluidum ist, das in den elektrisierten Körpern verbreitet ist; dieses Fluidum muss zwischen den in Berührung befindlichen Kugeln sich in zwei gleiche Theile vertheilen. Diese Ansicht hört aber auf evident zu sein, wenn man bedenkt, dass die Natur der Elektricität noch zweifelhaft ist. Wenn wir es in dem Agens mit einem Phänomen der Bewegung, der Schwingung, mit einer lebendigen Kraft in einem unbekannten Zustande, die auf dem alleinigen Wege einer Mittheilung durch Leitung Transformationen erfahren kann, zu thun haben, so weiß man nicht mehr, welcher Bruchtheil der ursprünglichen Ladung auf der einen der beiden Kugeln zurückbleiben wird. Wenn der Versuch zeigt, dass die Wirkung, welche von jeder der getrennten Kugeln auf einen äußeren Körper ausgeübt wird, um die Hälfte kleiner ist, als jene Wirkung, die von der ursprünglichen Kugel herrührt, so kann man diesfalls behaupten, dass die von einem Körper ausgeübte Wirkung der Elektricitätsmenge proportional ist, welche er besitzt.

Coulomb (1) nimmt es als evident an, dass zwischen zwei identischen Conductoren die Vertheilung der Elektricität in gleichen Theilen erfolge, und er hat durch den Versuch bestätigt, dass diese Vertheilung unabhängig von der Natur der Körper ist, wenn sie nur Leiter sind. Er hat in seiner Wage eine kleine Kupferkugel von 8 Linien im Durchmesser aufgehängt; die beiden Kugeln wurden in der gewöhnlichen Weise elektrisiert, die Nadel wurde fast um 48° entfernt. Mittelst des Mikrometerknopfes tordierte man den Aufhängefaden um 120° und die Nadel kam nach einigen Schwingungen bei 28° zur Ruhe; die Gesammttorsion betrug daher $28^0 + 120^0 = 148^0$. Er berührte hierauf die fixe Kugel mit einer Hollundermarkkugel von demselben Durchmesser, welche ebenso isoliert ist, und entfernte dann die letztere.

(1) Mémoires de l'Académie des sciences, p 69 (1786).

Die Nadel näherte sich wieder der Kupferkugel, und um sie wieder in dieselbe Entfernung von 28° zu bringen, musste man den Draht derart detordieren, dass das Mikrometer nicht mehr als 44° anzeigt; die ganze Torsion betrug dann 44° + 28° = 72°. Für dieselbe Ablenkung war daher die Gesammttorsion im ersten Falle 148° und ungefähr um die Hälfte weniger, nämlich 72° im zweiten Falle. Die Verringerung der abstoßenden Kraft aber war an diesem Tage $\frac{1}{50}$ per Minute und, da das Experiment eine Minute dauerte, würde man, wenn kein Elektricitätsverlust stattgefunden hätte, das Resultat 73·5° gefunden haben, d. h. so genau als möglich die Hälfte des ersten Wertes.

Da die Entfernung der Kugeln dieselbe geblieben ist, so ist die abstoßende Kraft genau proportional der gesammten Torsion des Drahtes. Die fixe Kugel besitzt im zweiten Falle nur die Hälfte ihrer ursprünglichen Ladung, hieraus folgt, dass die elektrische Abstoßung zwischen zwei elektrisierten Körpern der Elektricitätsmenge proportional ist, welche jeder von ihnen besitzt, und demzufolge dem Producte der Elektricitätsladungen der beiden Körper.

Coulomb hat gezeigt, dass die Gleichheit der Vertheilung auch wohl stattfindet zwischen zwei Körpern von irgendeiner, aber derselben Gestalt, wenn sie nur bezüglich des Berührungspunktes symmetrisch gelagert sind, und dass dies noch richtig ist selbst für Körper von mittlerer Leitungsfähigkeit, wenn man nur Sorge trägt, dass die Berührung genügend lange andauert. So verlor eine Eisenscheibe von 10 Linien im Durchmesser genau die Hälfte ihrer Ladung, wenn man sie mit einer Papierscheibe von dem gleichen Durchmesser berührt; aber es muss dann der Contact mehrere Secunden dauern.

Man kann ebenso das Gesetz der Elektricitätsmengen oder der elektrischen Theilung zwischen zwei Körpern mittelst der elektrischen Anziehung verificieren, indem man die Schwingungsmethode anwendet. Die fixe Kugel und die Scheibe der Nadel waren in entgegengesetzter Weise elektrisiert, man bestimmte die Dauer T einer gewissen Anzahl Oscillationen. Hierauf berührte man die Kugel mit einer anderen leitenden Kugel von demselben Durchmesser und bestimmte nach Entfernung dieser Hilfskugel die Dauer T′ derselben Anzahl Schwingungen.

Zwischen diesen Zeiten T und T' und den Kräften F und F', welche die Kugel in den beiden Fällen ausübt, besteht die Beziehung:

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{F'}{F}}.$$

Die elektrische Ladung der fixen Kugel wurde im zweiten Experimente um die Häfte vermindert, man muss haben:

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{2},$$

und demzufolge:

$$T'^2 = 2T^2.$$

Diese experimentelle Beziehung wird man zwischen den Zeiten einer und derselben Anzahl Schwingungen in den beiden Versuchen bestätigen können, wobei man vom Elektricitätsverluste absieht.

Alles zusammenfassend, kann man aus diesen Experimenten den Schluss ziehen, dass die Wirkung zweier elektrisierten Volumelemente proportional dem Produkte der Elektricitätsmengen, welche sich in diesen beiden Elementen befinden, und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist.

30. Vergleichung zweier Elektricitätsmengen mittelst der Drehwage. Messung einer Elektricitätsmenge. Man ist nun in den Stand gesetzt, mittelst der Coulomb'schen Drehwage Elektricitätsmengen miteinander vergleichen zu können.

Die Gleichgewichtsbedingung, welche für die Nadel der Drehwage aufgestellt wurde (24), war:

$$c\,(T + \alpha) = fl \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Nun ist die wirksame Kraft zwischen den beiden, mit den Elektricitäten E und E_1 geladenen Kugeln

$$f = \frac{EE_1}{4l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

wenn wir als Elektricitätsmenge *1* jene voraussetzen, welche auf eine gleiche Menge in der Entfernung *1* die Kraft *1* ausübt.

Die Gleichgewichtsbedingung wird daher:

$$c\,(T+\alpha)=EE_1\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{4l\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$EE_1=4l\sin\frac{\alpha}{2}.\ \mathrm{tg}.\ \frac{\alpha}{2}.\ c\,(T+\alpha).$$

Sind die beiden Kugeln mit den Elektricitätsmengen e und e_1 geladen, so gilt analog:

$$ee_1=4l\sin\frac{\alpha_1}{2}.\ \mathrm{tg}\frac{\alpha_1}{2}.\ c\,(T_1+\alpha_1).$$

E und e sollen sich auf die Standkugel, E_1 und e_1 auf die bewegliche Kugel beziehen.

Lässt man in den beiden Versuchen die Elektricität der beweglichen Kugel ungeändert, setzt also $E_1=e_1$, so hat man für das Verhältnis der Elektricitätsmengen der Standkugel

$$\frac{E}{e}=\frac{(T+\alpha).\sin\frac{\alpha}{2}.\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{(T_1+\alpha_1)\sin\frac{\alpha_1}{2}.\mathrm{tg}\frac{\alpha_1}{2}}.$$

Wählt man in den beiden Versuchen die Torsionen T und T_1 derart, dass $\alpha=\alpha_1$ wird, so ist:

$$\frac{E}{e}=\frac{T+\alpha}{T_1+\alpha}.$$

Man kann endlich der Nadel schon vor dem Einsetzen der Standkugel die abgelenkte Stellung α geben und dann nach dem Einsetzen der Standkugel in den beiden Fällen dafür sorgen (durch Drehen des Torsionsmikrometers), dass diese abgelenkte Stellung erhalten bleibt, dann hat man einfach:

$$\frac{E}{e}=\frac{T}{T_1}.$$

Das zuletzt erwähnte Verfahren zeichnet sich durch seine Einfachheit und Genauigkeit aus. Die abgeleiteten Gleichungen gelten jedoch nur dann, wenn man den Elektricitätsverlust vernachlässigen kann. Wir werden darauf später zu sprechen kommen.

Will man eine Elektricitätsmenge in dem von uns gewählten absoluten Maße ausdrücken (etwa als Längeneinheit Millimeter, als Gewichtseinheit Milligramm, als Zeiteinheit die Secunde voraussetzend), so macht man die Standkugel und die bewegliche Kugel von gleicher Größe; gibt man der Standkugel die Elektricität E, so vertheilt sich dieselbe bei der Berührung der beiden Kugeln auf beiden gleichartig, so dass man hat:

$$E^2 = 16 l\, c\, (T + \alpha) \sin\frac{\alpha}{2} . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$E = 4 \sqrt{l\, c\, (T + \alpha) . \sin\frac{\alpha}{2} . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} .$$

Die Größe c kann durch Schwingungsversuche bestimmt werden; sie stellt den Torsionscoefficienten des in Anwendung gebrachten Drahtes vor, also jene Kraft, die an dem Hebelarme von der Länge $1^{mm.}$ wirkend der Fadentorsion das Gleichgewicht hält, wenn das Ende des Hebelarmes einen Bogen von $1^{mm.}$ Länge beschrieben hat; hierbei ist die Krafteinheit jene, welche der Masse von 1 Milligramm in der Secunde die Geschwindigkeit von $1^{mm.}$ ertheilt. E wird dann in Einheiten ausgedrückt, von denen jede der Elektricitätsmenge gleich ist, die in einem Punkte concentriert auf eine andere ebenso große, in $1^{mm.}$ Distanz befindliche, eine Repulsion ausübt, die, eine Secunde lang auf die Masse eines Milligrammes wirkend, derselben die Geschwindigkeit von $1^{mm.}$ ertheilen würde. (1)

31. Versuche nach Coulomb. Die von Coulomb ausgesprochenen Gesetze wurden unmittelbar ohne Widerspruch angenommen und alle anderweitigen Versuche, sowie die Con-

(1) Man sehe diesbezüglich unter anderem: Dr. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. Leipzig 1881.

sequenzen der auf diesen Gesetzen fußenden Theorien dienten nur dazu, die Genauigkeit der Coulomb'schen Sätze mehr und mehr zu bestärken; Harris[1]) aber hat in sie Zweifel gesetzt, indem er ihnen die Resultate jener Versuche entgegensetzte, die unter Bedingungen gemacht wurden, deren Discussion nicht ohne Nutzen sein dürfte.

Harris hat eine neue Torsionswage in Anwendung gebracht, in welcher die Nadel mittelst zweier parallelen Coconfäden aufgehängt war, welche also die Stelle des von Coulomb angewendeten Metalldrahtes vertraten.

Die Nadel (Fig. 15) hatte 10 Zoll Länge und war gebildet aus zwei Glasfäden *nm'*, *n'm*, die durch eine Messingröhre *m'n'* vereinigt waren; sie trug an ihren Enden einerseits eine kleine vergoldete Holzscheibe *m* und auf der anderen Seite ein gläsernes Gegengewicht *n*. Diese Nadel wurde an dem Doppelcoconfaden mittelst zweier Häckchen *b* und *b'* aufgehängt; sie trug außerdem einen Stiel aus Messing *oo'*, an welchem eine andere Nadel VV', die perpendikulär zur ersten stand,

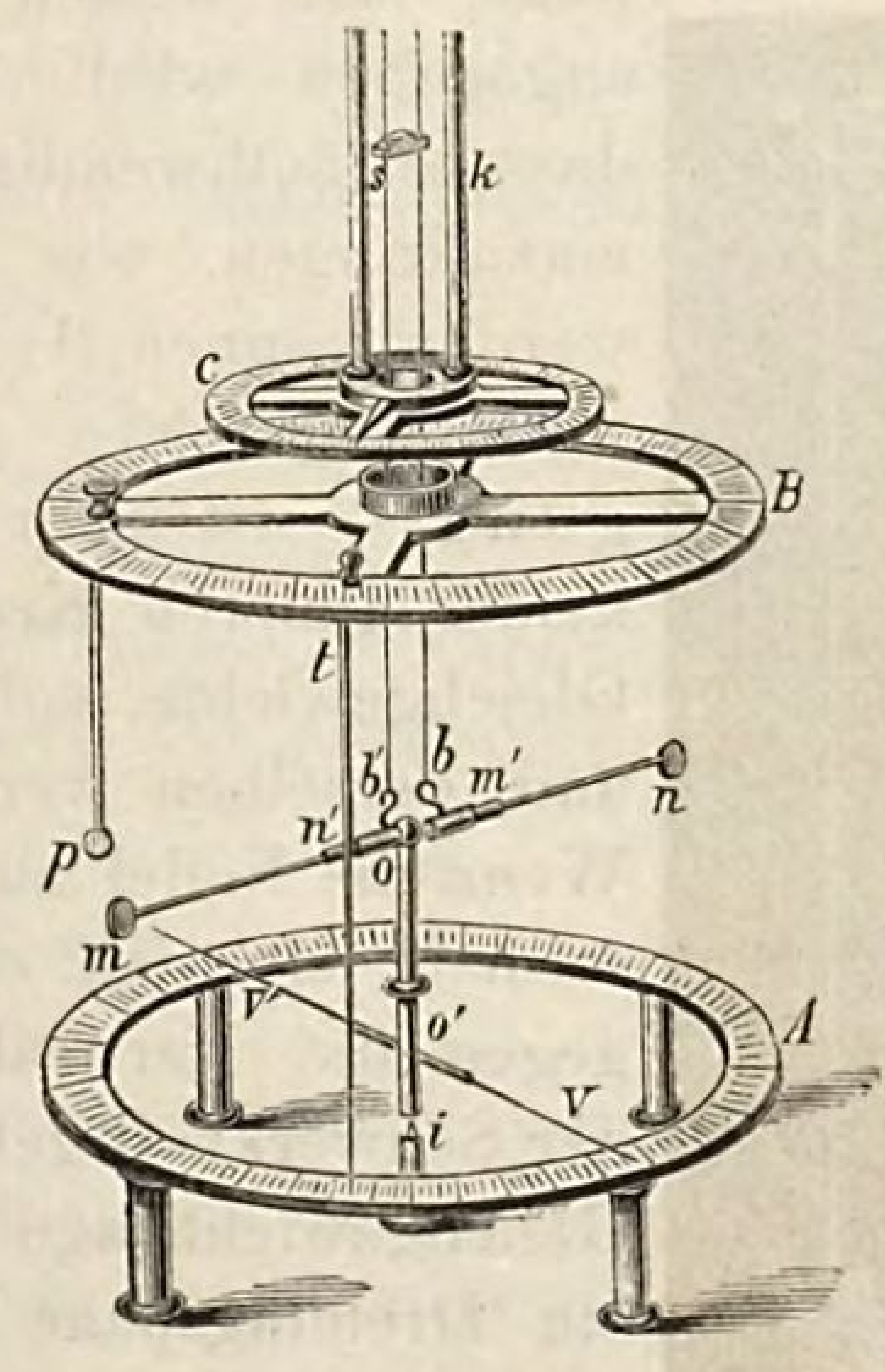


Fig. 15.

befestigt war; diese Nadel war dazu bestimmt, die Ablenkungen auf einem getheilten Kreise A anzuzeigen. Derselbe Stiel hatte am unteren Ende eine kleine Höhlung, in welche eine fixe Spitze *i* ragte, um die Seitenabweichungen zu vermeiden. Die fixe Scheibe ist ebenfalls ein vergoldetes Holzstück *p*, das von einem isolierenden Stäbchen getragen wurde. In diesem Apparate bestimmt man die Winkelentfernung der beiden elek-

[1]) Phil. trans., part. II. p. 417 (1836).

trisierten Körper, sowie die gesammte Torsion der bifilaren Aufhängung mittelst hinlänglich complicierter mechanischen Vorrichtungen, von denen die Figur nur die wesentlichen Bestandtheile anzeigt. Die Ablenkung der beweglichen Scheibe *m* ist gegeben durch die Verstellung der Nadel VV' auf dem fixen Kreise A. Die fixe Scheibe *p* wird von einem beweglichen Kreise B getragen, dessen Drehung entweder mittelst eines seitlichen fixen Merkzeichens oder mittelst eines Stäbchens das in einer kleinen Entfernung von den Theilungen des fixen Kreises A in eine Spitze endigt, angezeigt werden kann. Die Coconfäden sind an ihrer oberen Seite an einem Rahmen befestigt, welcher auf einem fixen Kreise C sich drehen kann, und dessen Drehung durch einen Index angegeben wird. Daraus ersieht man, ohne dass es nothwendig ist, in die anderen Details einzudringen, wie alle Messungen ausgeführt werden können. (¹)

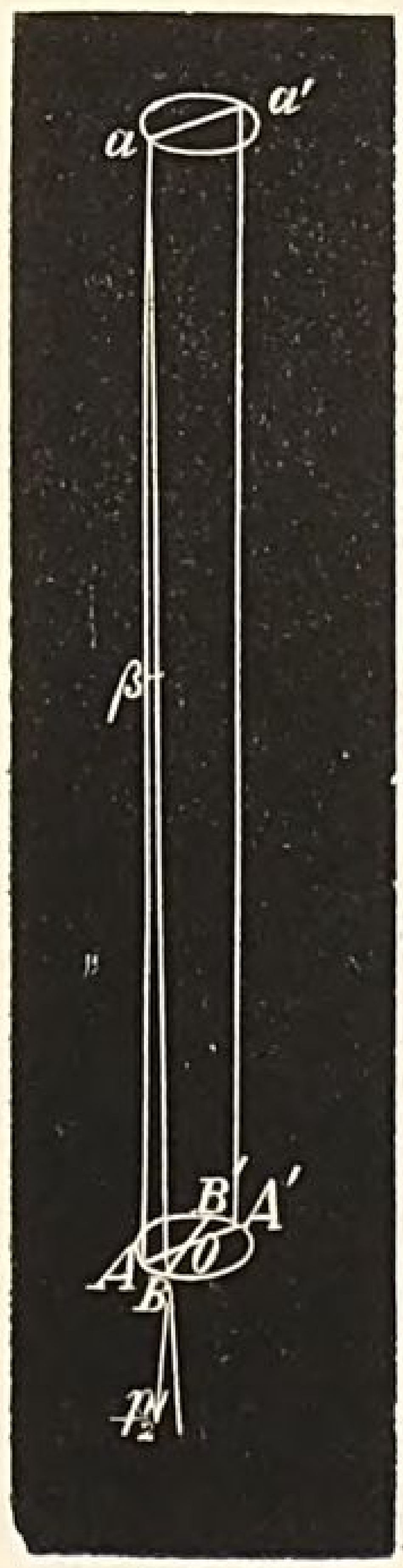


Fig. 16.

Die Theorie der bifilaren Aufhängung(²) ist sehr einfach. Wenn die Nadel keiner äußeren Kraft unterworfen ist, ist sie im Gleichgewichte, sobald die beiden Fäden in einer und derselben verticalen Ebene sich befinden. Wenn die Nadel aus dieser Lage gebracht wird, so hebt sie sich ein wenig, die Fäden werden gegen die Verticale geneigt und der Einfluss der Schwerkraft geht dahin, die Nadel gegen ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen, indem sie ein Drehungspaar hervorruft, dessen Wert man leicht bestimmen kann.

Seien *aa'* (Fig. 16) die beiden Aufhängepunkte der Fäden, B und B' die unteren Befestigungspunkte, wenn die Nadel abgelenkt ist, A und A' jene Punkte, wo die Verticalen, die durch

(¹) Man sehe Traité d'électricité et de magnétisme de M. Becquerel, t. V. 2e partie, p. 63.

(²) Gauss u. W. Weber: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837; 1840. — Ch. Stähelin: Die Lehre der Messung von Kräften mittelst der Bifilarsuspension, Basel 1852; Schweiz. Denkschriften, XIII. 1853.

a und a' gezogen sind, die durch BB' gelegte horizontale Ebene treffen. (1) Bezeichnen wir mit α die Winkelabweichung AOB der Nadel und mit β die Neigung der Fäden AaB. Wenn der bifilar aufgehängte Körper im Gleichgewichte ist, so ist sein Schwerpunkt in O und man kann sein Gewicht p durch zwei gleiche Kräfte $\frac{p}{2}$ ersetzen, von denen die eine in B und die andere in B' angreift.

Die Kraft $\frac{p}{2}$, die in B angreift, kann zerlegt werden in zwei andere, von denen die eine parallel zum Faden aB denselben spannt, die andere (für kleine Abweichungen α) gegen den Punkt A gerichtet betrachtet werden kann und gleich $\frac{p}{2}\text{tg}.\beta$ ist.

Bezeichnet man mit r die halbe Distanz von BB', so ist das Moment dieser letzteren Kraft:

$$\frac{p}{2}.\,\text{tg}.\,\beta.\,r.\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Dasselbe gilt bezüglich des Punktes B' und diese beiden horizontalen Componenten liefern ein Drehungspaar, dessen Moment

$$p.\,r.\ \text{tg}.\ \beta.\ \cos\frac{\alpha}{2}$$

ist. Die Winkel β und α sind untereinander durch eine ziemlich einfache Beziehung verbunden. Bezeichnet man mit l die Länge des Fadens, so liefern die beiden Dreiecke AaB und AOB

$$\text{AB} = l.\sin\beta = 2\ r.\ \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Da der Winkel β immer sehr klein ist, so kann man die Tangente durch den Sinus ersetzen und man erhält:

$$p.r\,\text{tg}.\,\beta.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{l}\,r^2.2.\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{l}\,r^2\sin\alpha.$$

(1) Wenn die Fäden sehr lang sind, dann kann man annehmen (allerdings auch für nicht allzugroße Drehungen), dass die Punkte A, B, A', B' in derselben Horizontalebene liegen.

Aus dieser Formel erkennt man, dass das Drehungsmoment seinen größten Wert für $\alpha = 90^0$ erhält; man nennt dieses größte Drehungsmoment D das statische Directionsmoment.

Geht man mit aller Strenge vor, so muss man dem noch das Drehungspaar hinzufügen, welches aus der Torsion des Fadens selbst stammt. Bezeichnet man mit $c\alpha$ das Torsionsdrehungsmoment jedes der Fäden, so folgt daraus, dass das Moment des resultierenden Drehungspaares, welches die Nadel gegen ihre Gleichgewichtsposition zurückzuführen strebt, gegeben ist durch die Formel:

$$\frac{p}{l} r^2 \sin \alpha + 2c\alpha.$$

Das Schwingungsgesetz ist — wie man sieht — im allgemeinen hinlänglich compliciert. Wenn, wie es bei Coconfäden der Fall ist, man das zweite Glied $2c\alpha$ vernachlässigen kann, so ist das andere Glied proportional dem Sin α, der Apparat oscilliert, wie ein geodätisches Pendel und es wird nur für sehr kleine Schwingungen Isochronismus bestehen. Die Schwingungsdauer ist dann — unter ρ den Gyrationshalbmesser des aufgehängten Körpers verstanden —

$$T = \pi \sqrt{\frac{\frac{p}{g} \rho^2}{\frac{p}{l} r^2}} = \pi \frac{\rho}{r} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Harris hat denn auch bestätigt, dass die Dauer der Schwingungen dieses Apparates der Quadratwurzel aus der Länge der Fäden direct, ihrer Distanz verkehrt proportional ist. Er hat auch für alle Ablenkungen die Schwingungen isochron gefunden, was mit der vorstehenden Rechnung nicht übereinstimmt.

Man sieht auch, dass die Schwingungsdauer dem Gyrationsradius des an den beiden Fäden aufgehängten Körpers proportional ist und von dessen Gewichte unabhängig ist.

Diese bifilare Wage scheint keinen Vortheil vor dem Coulomb'schen Apparate zu haben. Denn die Construction ist viel

complicierter und die Theorie weniger einfach. Wenn die beiden Fäden frei sind, so kann die gesammte Torsion 180⁰ nicht überschreiten, ohne dass die Fäden zur Berührung kommen, und von diesem Augenblicke an würde das Gesetz der Torsion abgeändert werden. Es ist allerdings wahr, dass — um dieser Schwierigkeit zu begegnen — Harris zwischen den Fäden, von Distanz zu Distanz, kleine Hindernisse *s* (Fig. 15) aus Stroh oder Kork angebracht hat, welche die Hervorrufung dieser Contacte verhindern, und es ist diesem Umstande zuzuschreiben, dass das Drehungspaar nahezu proportional dem Torsionswinkel für Werte war, welche bis 300 Grade giengen.

In der Coulomb'schen Wage ist die Empfindlichkeit unabhängig von dem Gewichte der Nadel und hängt nur von der Natur des Drahtes ab. Hier ist im Gegensatze die Empfindlichkeit um so geringer, je größer das Gewicht der Nadel ist; es hat die complicierte Anordnung von Harris es mit sich gebracht, dass das Gesammtgewicht der Nadel 480 Gran ([1]), also ungefähr 25·5 Gramm betrug. Nimmt man an, die Fäden hätten 1 Meter Länge und sie seien nur 2 Millimeter entfernt, Bedingungen, von welchen es scheint, dass sie nur schwer verwirklicht werden können, so wird man, wenn man als Einheiten das Milligramm und den Decimeter nimmt, erhalten

$$\frac{pr^2}{l} = \frac{25500}{10} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0{\cdot}25.$$

Da der Ausdruck $\frac{pr^2}{l}$ das Moment des Drehungspaares darstellt, welches nöthig ist, um die Nadel um 90⁰ zu tordieren, so sieht man, dass man hierzu eine Kraft von $\frac{1}{4}$ Milligramm braucht, die am Ende eines Hebelarmes von 1 Decimeter wirkt. Zur Erreichung desselben Ausschlages würde man beim Drahte von Coulomb nur $\frac{1}{25}$ Milligramm erfordern; der Apparat von Coulomb hat also eine sechsmal größere Empfindlichkeit. Die bifilare Wage ist nichtsdestoweniger ein sehr sinnreicher Apparat, von dem man bei elektrischen Versuchen zahlreiche Anwendungen gemacht hat.

([1]) Loc. cit., p. 423.

Vorzüglich ist der Apparat zur Messung von Kräften, welche in horizontaler Richtung auf den Wagebalken wirken; diese werden ihm dann, wenn das Gewicht des Wagebalkens gegen die wirkenden Kräfte sehr groß ist, wenn also nur eine sehr geringe Verschiebung des Schwerpunktes stattfindet, bloß eine Drehung um die verticale, durch den Schwerpunkt gehende Linie ertheilen. Dies kann strenge dadurch erreicht werden, dass man die Horizontalkraft zweimal symmetrisch bezüglich der durch den Schwerpunkt gehenden Verticalen wirken lässt, denn dann werden die in den Schwerpunkt versetzten Kräfte nur ein horizontales Kräftepaar liefern. Wenn die Horizontalkraft den Wagebalken um den Winkel α aus seiner Ruhelage entfernt, so muss das Drehungsmoment der Kraft gleich $D \sin \alpha$ sein; hieraus ergibt sich, wenn man noch den senkrechten Abstand der Kraft von der durch den Schwerpunkt gehenden verticalen Drehungsaxe kennt, die Größe der zu messenden Kraft unmittelbar. — Vortreffliche Dienste leistet die bifilare Aufhängeweise beim Messen der Variationen einer Kraft.

Harris([1]) bediente sich auch einer wirklichen Wage, mit welcher er die elektrischen Wirkungen maß und er hat zur Erreichung dieses Zweckes verschiedene sinnreiche Anordnungen ersonnen, die wir später zur Kenntnis des Lesers bringen werden; diese Apparate können aber niemals zur Auswertung kleiner Kräfte dieselbe Empfindlichkeit erlangen, wie die Torsionsfäden.

Überdies findet man nicht, dass in diesen Versuchen Harris irgendwelche Vorsicht([2]) gebraucht hat, um den störenden Einfluss fremder Leiter zu vermeiden, welche nach seinen Beschreibungen und den von ihm entworfenen Figuren in genügend großer Anzahl in der Nachbarschaft der studierten Körper gewesen sein dürften, Leiter, von denen die einen isoliert, die anderen in Communication mit dem Erdboden waren. Coulomb war außerdem genöthigt, nur Kugeln anzuwenden, damit die Anziehung dieselbe sei, als ob die Elektricitätsmenge jeder von ihnen in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Harris

([1]) Phil. trans., part. II., p. 213 (1834).

([2]) W. Thomson, Reprint of papers, etc., p. 21 und 24.

hat im Gegentheile Körper von irgendwelcher Form in Anwendung gebracht, so z. B. Scheiben, die an ihren Hinterseiten mit Kegeln versehen waren. Man darf sich daher nicht verwundern, dass die Versuche von Harris oft in Widerspruch mit jenen von Coulomb waren, und dass er zu solchen Schlüssen gekommen ist, wie es die folgenden sind (¹):

(1) Zwischen zwei leitenden Scheiben, die in gleicher Weise geladen und sehr entfernt sind, ist die Abstoßung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung und direct proportional ihren elektrischen Ladungen;

(2) wenn die Ladungen ungleich sind, so ist die Abstoßung umgekehrt proportional der Entfernung innerhalb gewisser Grenzen; sie erweist sich ganz unregelmäßig in kleinen Entfernungen und kann sogar durch eine Anziehung ersetzt werden;

(3) die elektrische Kraft ist nicht immer den Elektricitätsmengen proportional, hauptsächlich im Falle der Anziehungen.

Der erste Satz stimmt mit dem Coulomb'schen Gesetze überein, da die Bedingungen des Versuches gut gewählt waren. Die beiden folgenden Sätze und mehrere andere, welche von Harris ausgesprochen wurden, sind, ungeachtet ihr Widerspruch mit den Gesetzen selbst in die Augen fällt, dennoch directe Folgerungen aus denselben, wenn man bei der Auswertung der Kräfte die Vertheilung der Elektricität und die Gestalt der Körper berücksichtigt, Umstände, welche dann einen namhaften Einfluss haben.

32. Die Einwendungen Harris hatten nicht viel Glauben erhalten; doch hat es Marié Davy (²) für nützlich erachtet, die Versuche von Coulomb zu wiederholen, wobei er Sorge trug, dass alle nöthigen Vorsichten in Anwendung gebracht wurden. Im Folgenden geben wir unter andern die Zusammenstellung mehrerer Beobachtungen, die sich auf die Abstoßung zweier gleichen Hollundermarkkugeln beziehen und die unter Bedingungen angestellt wurden, unter welchen — da der Verlust an Elektricität sehr klein war — die auf diese Fehlerquelle

(¹) Phil. trans., part. II., p. 431 (1836).

(²) Comptes Rendus de l'Académie des sciences, t. XXXI., p. 863 (1850). — Mémoire de l'Académie de Montpellier, section des sciences, t. II., p. 149.

bezügliche Correction mit großer Genauigkeit gemacht werden konnte:

Ausschlags-winkel α:	Verhältnis der Entfernung der Mittelpunkte zum Radius der Kugeln:	Gesammte Torsion $T + \alpha$		Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung
		beobachtet:	gerechnet:	
68·5°	27·4	12·03	12·02	— 0·1°
58·5	23·4	17· 9	17	— 0·9°
48·5	19·4	25· 2	25· 2	0
38·5	15·4	41· 9	40· 6	— 1·3
33·5	13·4	54· 9	53· 8	— 1·1
29·5	11·8	68· 3	69· 7	+ 1·4
22·3	9	122· 3	122· 5	+ 0·2
21·5	8·5	128· 5	131· 9	+ 3·4
18·5	7·5	168· 5	178· 4	+ 9·9
16·5	6·5	205· 2	224· 5	+ 19·3
12·5	5	336· 3	391·7	+ 55·4
10·5	4·2	453· 2	555	+101·8
7·5	3	701	1089	+388

Die Berechnung der Torsion wurde in der Weise vollzogen, dass man annahm, es sei das Product $(T + \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} . \mathrm{tg} . \frac{\alpha}{2}$, welches das Product aus der Kraft in das Quadrat der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kugeln darstellt, constant und dass man als Ausgangspunkt den Wert nahm, der sich auf den Winkel von 48·5° bezieht. Man ersieht, dass eine Übereinstimmung zwischen der Rechnung und die Beobachtung für alle Ablenkungen besteht, die größer als 18 Grade sind, d. h. für die Fälle, in welchen die Entfernung der Mittelpunkte größer als der achtfache Radius der Kugeln ist; die Differenzen sind aber nicht mehr zu vernachlässigen für geringere Ausschläge und die beobachtete Ablenkung fällt immer zu gering aus, ein Resultat, welches man leicht aus der Art und Weise der Elektricitätsvertheilung vorhersehen konnte.

Dennoch hat Marié Davy, indem er sich auf gewisse Rechnungen von Roche stützte, mit Unrecht seine Versuche in völliger Übereinstimmung mit der Theorie angesehen. Wir haben aus den Tafeln von Roche die Zahlen N genommen,

welche den Werten P des Productes $(T + \alpha) \sin\frac{\alpha}{2}.\text{tg}.\frac{\alpha}{2}$, die sich aus dem Versuche ergaben, proportional sein müssen und haben den Vergleich in der nun folgenden Tabelle angestellt:

Entfernung der Mittelpunkte	P	N	$\frac{P}{N}$
27·4	47·1	11·4	4·14
23·4	49	11·3	4·34
19·4	46·6	11	4·24
15·4	48·2	10·7	4·50
13·4	47·2	10·5	4·50
11·8	45·8	10·1	4·54
9	46·6	9·7	4·80
8·5	45·5	9·6	4·74
7·5	44·1	9·2	4·80
6·5	42·7	8·9	4·80
5	40·1	8·1	4·95
4·2	38·1	7·8	4·89
3	30·2	6	5

Es folgt daraus, dass die Übereinstimmung der Theorie und der Beobachtung nicht perfect ist, wir werden aber sehen, dass die Rechnungen von Roche in Wirklichkeit nicht für diesen Versuch passen und Zahlen liefern, welche umso rascher kleiner werden, je benachbarter die Kugeln einander sind. Man kann daher sagen, auch wenn man keine vollständigen Bestätigungen gehabt hätte, dass die durch die Beobachtung gelieferten Zahlen in dem durch die Theorie angezeigten Sinne verlaufen und dass die scheinbaren Abweichungen von dem Gesetze der elektrischen Wirkungen, auf welche Harris so sehr Gewicht legt, in Wirklichkeit nothwendige Folgerungen aus dem von Coulomb aufgestellten Elementargesetze sind.

III. Capitel.

Zerstreuung der Elektricität.

33. Ursachen des Elektricitätsverlustes. Man hat gesehen, wie sehr Coulomb in den vorhergehenden Versuchen von der stufenweisen Schwächung, welche die elektrischen Eigenschaften erfahren, gestört wurde; er versuchte auch in der Folge die Gesetze dieser Erscheinung zu bestimmen.

Der Elektricitätsverlust muss zwei verschiedenen Ursachen zugeschrieben werden, dem Einflusse der umgebenden Luft einerseits und dem Einflusse der schlecht leitenden Körper, welche als Träger der elektrisierten Körper dienen, andererseits. Es gibt keine absolut isolierende Stütze. Alle Körper, welche man zu diesem Zwecke anwendet, leiten die Elektricität in einer mehr oder weniger raschen Weise, sei es durch ihre Substanz selbst, sei es hauptsächtlich durch die kleine Feuchtigkeitsschichte, mit welcher sich die Träger überdecken, wenn sie gewöhnlicher Luft ausgesetzt werden. So erhält ein Cylinder aus Harz oder Schellack schließlich immer Elektricität in seiner ganzen Länge, wenn man sein eines Ende in Berührung mit dem Conductor einer Elektrisiermaschine bringt.

Was den Elektricitätsverlust durch die Luft betrifft, so kann derselbe stattfinden entweder durch eine dem Gase eigenthümliche Leitungsfähigkeit, die jener der festen und flüssigen Körper ähnlich ist, oder dadurch, dass die Luftmolecüle, die in der Nachbarschaft eines elektrisierten Körpers sich befinden, von demselben angezogen werden, bei der Berührung mit ihm elektrisch werden und darauf eine Abstoßung erfahren,

wobei sie nach jeder Berührung einen Theil der Elektricität entführen.

34. Wahl eines isolierenden Trägers. Coulomb hat diese beiden Ursachen separat studiert (¹) und hat zunächst den Einfluss der Stützen eliminiert, indem er dieselben so wählte, dass sie als vollkommene Isolatoren betrachtet werden konnten, d. h., dass der Elektricitätsverlust längs der Oberfläche des Trägers sehr klein im Verhältnisse zu jenem war, welcher sich beim Contacte mit der umgebenden Luft herausstellte.

Um zu erfahren, ob eine Stütze diese Bedingung erfüllt, verwendet man dieselbe als Träger der fixen Kugel der Drehwage; man ladet den Apparat in der gewöhnlichen Weise und man notiert die Zeit, welche die bewegliche Kugel, die sich infolge der Wirkung des Elektricitätsverlustes successive der fixen Kugel nähert, braucht, um von einer Ablenkung α zu einer anderen α', z. B. von 30⁰ bis 20⁰ zu gelangen. Hierauf lässt man die fixe Kugel von zwei oder mehreren der ersten (²) identischen Stützen tragen und wiederholt denselben Versuch; man notiert wieder die Zeit, welche die bewegliche Kugel braucht, um dieselben Winkel α und α' zu passieren. Ist diese Zeit kürzer als im ersten Falle, so verursachten die eingeführten Stützen einen beträchtlichen Elektricitätsverlust; sind die beiden Zeiten einander gleich, so ist der Einfluss der neuen Stützen zu vernachlässigen und es kann demzufolge die erste Stütze als ein vollkommener Isolator betrachtet werden.

Wenn der Träger, welchen man untersucht, dieser Bedingung nicht genügt, so kann man in einer großen Anzahl von Fällen ihn vollkommen isolierend machen, wenn man seinen Durchmesser vermindert oder seine Länge vergrößert. Dieser Umstand zeigt schon, dass der Elektricitätsverlust durch die Stützen ein hinlänglich zusammengesetztes Phänomen der Leitung ist.

Coulomb hat so in Erfahrung gebracht, dass — sobald die elektrische Ladung des unterstützten Körpers nicht beträchtlich ist, ein kleiner Cylinder aus Siegellack oder Schel-

(¹) Memoires de l'Académie des sciences, p. 615 (1785).

(²) Loc. cit., p. 624.

lack von einer halben Linie im Durchmesser und 18 bis 20 Linien Länge fast immer genügen wird, um eine Hollundermarkkugel von 5 oder 6 Linien Durchmesser vollkommen zu isolieren. Ebenso erreicht man — wenn die Luft trocken ist — mit einem sehr feinen Seidenfaden, welcher durch schmelzendes Siegellack gezogen wurde und dann nur einen kleinen Cylinder von höchstens einer Viertel-Linie im Durchmesser bildet, denselben Zweck, wenn man nur diesem Faden eine Länge von 5 bis 6 Zoll gibt. Schließlich isoliert ein Glasfaden, von 5 oder 6 Zoll Länge, der in der Lampe ausgezogen wurde, die Kugel nur an sehr trockenen Tagen und nur dann, wenn die Kugel sehr schwach geladen ist; dasselbe gilt von einem Haare oder einer Schweinsborste, wofern man nur Sorge trägt, eine Überkleidung mit Siegellack oder, was noch besser ist, mit reinem Schellack, zu veranstalten. Die dunkle Schellacksorte ist überdies jenen vorzuziehen, deren Farbe heller ist.

Riess hat angegeben, dass ganz reine, orangefarbene Schellackstäbchen noch besser isolieren.

Es folgt daraus, dass die Art und Weise des Verhaltens eines schlecht leitenden Körpers, der als Isolator angewendet wird, sehr vom Zustande der Luft abhängt, und dass die geringsten Änderungen seiner Oberfläche, wie eine Feuchtigkeitsschichte oder eine chemische Veränderung, sehr die Resultate verändern können. Gaugain hat in dieser Beziehung mehrere genug merkwürdige Fälle beobachtet. Die Leitungsfähigkeit (1) des Turmalins z. B. ist bei der gewöhnlichen Temperatur fast Null, wächst um so schneller, je höher die Temperatur wird und wird sehr beträchtlich bei 400 oder 500 Grade. Dies ist die allgemeine Wirkung einer Temperaturserhöhung. Wenn man aber den so erwärmten Turmalin erkalten lässt, so kann man nachweisen, dass er sehr hygrometrisch geworden ist, und dass er sich dann wie ein guter Leiter verhält. Um ihn vom neuen isolierend zu machen, genügt es, ihn mit gewöhnlichem Wasser zu waschen und ihn bei einer Temperatur zu trocknen, die 150 Grade nicht übersteigt. Die Änderung, welche der Turmalin durch diese Erwärmung erfuhr, ist so

(1) Annales de Chimie et de Physique 3e serie, t. LVII., p. 8.

schwach, dass nach einer großen Anzahl ähnlicher Operationen es nicht möglich war, die geringste Veränderung im Gewichte festzustellen.

Ebenso isoliert Schellack([1]), wenn er gut präpariert und an einem trockenen Orte aufbewahrt wurde, nahezu vollständig, selbst dann, wenn er in einen mit Feuchtigkeit gesättigten Raum versenkt wurde. Lässt man ihn aber in diesem Raume während einer genügend langen Zeit, so wird er so leitend, dass ein Elektroskop nicht einen einzigen Augenblick die ihm mitgetheilten Ladungen behalten kann, wenn es durch einen Schellackstab, der sich in diesem Zustande befindet, mit dem Erdboden in Verbindung gebracht wird. Bringt man den leitend gewordenen Stab in trockene Luft zurück, so wird er in einigen Secunden trocken und erlangt wieder sein Isolierungsvermögen; es reicht aber ein neues Einführen in einen feuchten Raum hin, um ihm augenblicklich die Leitungsfähigkeit zu verleihen, die er im ersten Versuche erst am Ende einer gewissen Stundenzahl erlangt hatte; diese Fähigkeit, Feuchtigkeit anzuziehen, hängt unzweifelhaft von einer unsichtbaren Änderung seiner Oberfläche ab, denn es genügt, um sie verschwinden zu machen, den Schellack zu waschen oder nur abzuwischen.

An der Luft veränderte Schellackstäbchen können wieder gut isolierend gemacht werden, wenn man sie mit hochgradigem Alkohole benetzt, mit einem Tuche abreibt, durch eine Flamme zieht und in einer Glasglocke trocknet.

Es ist wahrscheinlich, dass die Mehrzahl der hygrometrischen Substanzen analoge Veränderungen erfahren können([2]).

Zur Vermeidung der Feuchtigkeit, welche sich an den isolierenden Stützen und Trägern findet, hat Mascart([3]) kürzlich folgende einfache Einrichtung beschrieben. Der Boden einer Flasche wird in eine aufwärts durch den Hals der Flasche gehende oben geschlossene Röhre ausgezogen, auf welche ein Glasteller oder der zu isolierende Körper aufgeschraubt werden

([1]) Annales de Chimie et de Physique, 3e serie, t. LIX., p. 29.

([2]) Über den Elektricitätsverlust durch die Stützen handelt auch Dellmann, „Gesetzmäßigkeiten und Theorie des Elektricitätsverlustes“. (Kreuznach 1864.)

([3]) Mascart, Nature 18.

kann. Die Flasche wird mit concentrierter Schwefelsäure gefüllt, welche die tragende Stütze möglichst trocken erhält.

35. Bestimmung des Gesetzes des Elektricitätsverlustes durch die Luft.

Wie dem auch immer sei, man verschafft sich einmal isolierende Träger, und erzeugt die bewegliche Nadel der Drehwage und den Stiel der fixen Kugel aus Stäben dieser Art; der Elektricitätsverlust findet in derselben Weise statt, als ob die Luft allein wirken würde und man vollführt nach dem Vorgange von Coulomb die Versuche in der folgenden Weise mit derselben Drehwage, welche ihm zum Studium der elektrischen Abstoßungen diente. Die beiden Kugeln waren durch eine Stecknadel mit großem Kopfe geladen, die bewegliche Nadel wurde bis zu einer hinlänglich großen Entfernung abgestoßen; durch eine passende Torsion T des oberen Mikrometers bringt man sie in eine kleinere Distanz zurück und man wartet, bis nach einigen Schwingungen die Nadel sich in eine bestimmte Winkelentfernung α z. B. 20^0 einstellt. Man notiert genau die Zeit t, zu welcher diese erste Beobachtung gemacht wurde. Man dreht hierauf das obere Mikrometer um einen bestimmten Winkel um, die Nadel geht in eine größere Entfernung und man wartet die Zeit t' ab, zu welcher sie sich in derselben Winkelentfernung α wieder im Gleichgewichte findet, zufolge des Elektricitätsverlustes; die Torsion des Mikrometers ist nicht mehr als T'. Man dreht vom neuen das Mikrometer um dieselbe Größe zurück und wiederholt eine Reihe von ähnlichen Beobachtungen.

Zwischen den beiden ersten Beobachtungen während des Zeitintervalles $t'-t$, welches einige Minuten betrug, war die Verminderung der Torsion $T-T'$. Da dieses Intervall hinlänglich klein ist, so kann man annehmen, dass die Wirkung der Zeit proportional ist und der Quotient $\frac{T-T'}{t'-t}$ wird die Torsionsverminderung während einer Minute sein. Die mittlere Torsion des Drahtes in diesen beiden Versuchen war gleich:

$$\frac{T+\alpha+T'+\alpha}{2}=\frac{T+T'}{2}+\alpha.$$

Coulomb hat stets beobachtet, dass in einer und derselben Versuchsreihe das Verhältnis der Torsionsverminderung in der Zeiteinheit zur mittleren Torsion constant ist. Dieses Verhältnis ist jenes, welches den Namen „Coefficient des Elektricitätsverlustes oder der Elektricitätszerstreuung" führt.

Hier ist z. B. die eine Reihe von Beobachtungen, welche Coulomb am 28. Mai 1785 machte:

Stunde der Beobachtungen	Entfernung der Kugeln	Mikrometer-Drehung	Intervall der Beobachtungen	Torsionsverlust zwischen zwei Beobachtungen	Mittlere Torsion	Verhältnis der Torsionsverminderung in 1′ zur mittleren Torsion
Morgens:						
1.6ʰ 32′ 30″	30⁰	120⁰	5·75′	20⁰	140⁰	$\frac{1}{40}$
2.6ʰ 38′ 15″	"	100⁰	6·25′	"	120⁰	$\frac{1}{38}$
3.6ʰ 44′ 30″	"	80⁰	8·25′	"	100⁰	$\frac{1}{42}$
4.6ʰ 53′ 00″	"	60⁰	10·00′	"	80⁰	$\frac{1}{40}$
5.7ʰ 03′ 00″	"	40⁰	14·00′	"	60⁰	$\frac{1}{42}$
6.7ʰ 17′ 00″	"	20⁰		"		

Man sieht, dass die in der letzten Columne angegebenen Verhältnisse nahezu gleich sind, das Mittel ist ungefähr $\frac{1}{41}$. Der Wert dieses Verhältnisses hängt überdies von allen Umständen ab, welche den Zustand der Atmosphäre modificieren, wie es die vier folgenden Versuche zeigen, welche Coulomb unter vielen anderen gewählt hat, weil das Hygrometer an diesen vier Tagen sehr verschiedene Angaben geliefert hatte, während die Temperatur fast die gleiche war.

Datum der Versuche	Stunde der I. Beobachtung	Feuchtigkeitsgrad	Temperatur	Barometerstand	Mittlerer Wert des Zerstreuungscoefficienten
28. Mai . . .	6ʰ 32′ morgens	75 Grad	15·50⁰	28″ 3‴	$\frac{1}{41}$
29. Mai . . .	5ʰ 45′ —	69 —	15·50	28″ 4‴	$\frac{1}{60}$
22. Juni . . .	11ʰ 53′ —	87 —	15·75	27″ 14‴	$\frac{1}{14}$
2. Juli . . .	7ʰ 43′ —	80 —	15·75	28″ 2‴	$\frac{1}{29}$

Zu dieser Tabelle ist zu bemerken, dass der Feuchtigkeitsgrad nach einer willkürlichen Scala, nämlich nach dem Saussure'schen Haarhygrometer, angegeben ist.

36. Diese Tafeln geben Anlass zu mehreren Bemerkungen. Da die Entfernung der Kugeln in allen Versuchen einer und derselben Reihe constant ist, so ist die abstoßende Kraft der beiden Kugeln der gesammten Torsion des Drahtes proportional.

Man kann daher sagen, dass das Verhältnis der Verminderung der abstoßenden Kraft in der Zeiteinheit (1 Minute) zur mittleren abstoßenden Kraft constant ist und dem Zerstreuungscoefficienten gleich kommt.

Die verschiedenen Beobachtungen wurden in so engen Intervallen angestellt, dass man den Elektricitätsverlust von der einen Beobachtung zur anderen als der Zeit proportional betrachten konnte; dieses Gesetz wird für eine unendlich kleine Zeit der Wahrheit noch näher kommen und man kann von demselben Gebrauch machen, wenn man die Torsion am Ende irgendeiner Zeit rechnet, wobei die Entfernung der Kugeln immer constant vorausgesetzt wird.

Nennen wir A die Gesammttorsion zu irgendeiner Zeit t, ΔA die Verminderung der Torsion während einer unendlich kleinen Zeit Δt und m den Zerstreuungscoefficienten am Tage des Experimentes; die Verminderung der Torsion in der Zeiteinheit wird $\frac{\Delta A}{\Delta t}$, die mittlere Torsion $A - \frac{\Delta A}{2}$, und man wird haben:

$$\frac{\frac{\Delta A}{\Delta t}}{A - \frac{\Delta A}{2}} = m,$$

oder auch

$$\frac{-\frac{\Delta A}{\Delta t}}{A - \frac{\Delta A}{2}.} = -m.$$

Die Torsion A ist eine Function der Zeit, welche um $-\Delta A$ in der Zeit Δt sich ändert; der Zähler $\frac{-\Delta A}{\Delta t}$ hat daher zur

Grenze die Derivierte von A nach der Zeit, und die Gleichung wird dann:

$$\frac{A'}{A} = -m.$$

Hieraus erhält man:

$$A = A_0 e^{-mt},$$

wobei e die Basis der Neper'schen Logarithmen ist und A_0 die Gesammttorsion in dem Momente ist, von welchem man die Zeit zu rechnen beginnt.

Wendet man diese Formel auf die erste Reihe von Coulomb an, die oben genannt wurde, in welcher man für den ersten und letzten Versuch $A_0 = 150$ und $A = 50$ mit $m = \frac{1}{41}$ hat, so findet man für den Zeitraum zwischen diesen beiden Versuchen 45′, während die Beobachtung 44·5′ geliefert hat.

37. Man kann auch daraus das Gesetz des Verlustes an elektrischer Ladung für jeden der beiden vorhandenen Körper ableiten. Die Rechnung bietet keine Schwierigkeiten, wenn die Kugeln identisch sind und dieselbe elektrische Ladung E besitzen. Die abstoßende Kraft F ist dann proportional dem Producte der Ladungen, d. h. dem Quadrate E^2 und man kann, wenn man mit K eine constante Größe bezeichnet, schreiben:

$$E^2 = KF.$$

Die Änderungen der beiden Seiten dieser Gleichung sind immer einander gleich, woraus sich ergibt, wenn man ΔE die Variation der elektrischen Ladung und ΔF die entsprechende Variation der repulsiven Kraft bezeichnet:

$$2E.\Delta E = K.\Delta F.$$

Dividiert man diese Gleichung durch die erste, Glied für Glied, so erhält man:

$$2\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta F}{F}$$

oder auch:

$$\frac{\frac{\Delta E}{\Delta t}}{E} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\Delta F}{\Delta t}}{F},$$

d. h. der Coefficient der Verminderung der elektrischen Ladung ist gleich der Hälfte des Zerstreuungscoefficienten.

Sind die beiden einander gegenüberstehenden Körper nicht mehr identisch oder haben sie verschiedene Ladungen E und E′, so hat man in derselben Weise:

$$E.E' = K.F.$$

Man erhält hieraus, wie oben:

$$E.\Delta E' + E'.\Delta E = K.\Delta F$$

oder auch:

$$\frac{\Delta E'}{E'} + \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta F}{F}.$$

Der Zerstreuungscoefficient ist daher gleich der Summe der Coefficienten der Verminderung der elektrischen Ladung beider Körper.

Nun hat Coulomb durch zahlreiche Versuche gezeigt, dass — wenn die Luft trocken ist und wenn die elektrischen Ladungen nicht beträchtlich sind — der Zerstreuungscoefficient, wie er durch das Experiment festgestellt wurde, unabhängig von den Dimensionen der elektrisierten Körper, von ihrer Form und sogar ihrer materiellen Beschaffenheit ist. Er hat dies verificiert, indem er eine Kugel von einem Fuß im Durchmesser, metallische Cylinder von allen Dicken, kreisförmige Scheiben aus Metall und aus Papier, Kugeln aus Hollundermark oder Kupfer in Anwendung brachte. Er hat das gleiche Resultat erhalten, als er eine der Kugeln mit einem Kupferdrahte versah, der auf $\frac{1}{4}$ Linie im Durchmesser 10 Linien Länge hatte. Gleichwohl liefern die verschieden geformten Körper nur dann diese Gleichheit in der Abnahme, wenn die Ladung bis zu einer bestimmten Grenze vermindert wurde; alle mit Kanten versehenen Körper verlieren zuerst eine große Menge Elektricität und erreichen nach und nach die allgemeine Zerstreuungsgeschwindigkeit.

Die materielle Beschaffenheit der Körper nimmt keinen Einfluss auf das Gesetz der Elektricitätsabnahme, selbst dann, wenn die Körper schlechte Leiter sind; so lieferte eine Kugel aus Siegellack, welche man in der Weise geladen hatte, dass man sie mit einem stark elektrisierten Körper berührte, denselben Coefficient, wie eine Kugel aus Hollundermark oder aus Kupfer.

Wenn man daher in der vorigen Gleichung irgendeinen Körper an die Stelle des einen von den gegenüber befindlichen Körpern setzt, so ändert sich der zweite Theil nicht. Daraus folgt, dass die beiden Glieder der ersten Seite auch einander gleich sind. Demzufolge ist der Coefficient der Verminderung der elektrischen Ladung eines Körpers in allen Fällen der Hälfte des Zerstreuungscoefficienten gleich.

38. Man kann auch aus den Experimenten von Coulomb schließen — wenn er auch dieses Resultat nicht ausdrücklich ausspricht — dass der Zerstreuungscoefficient von der Natur der Elektricität unabhängig ist. Biot[1] hat diese specielle Folgerung verificiert, indem er ein wenig die Methode von Coulomb veränderte.

Die fixe Kugel der Drehwage hatte 3 Centimeter im Durchmesser und die bewegliche Kugel wurde durch eine Scheibe aus Goldpapier, die denselben Durchmesser hatte, ersetzt. Diese beiden Körper wurden elektrisiert, die Scheibe wurde abgestoßen und sie stellte sich in einer gewissen Ablenkung α ins Gleichgewicht ein: es fände sich z. B. die Ablenkung von 76·5°. Man überließ den Apparat sich selbst und nahm die Zeit in Rechnung, welche verfloss, bis die Scheibe eine andere Deviation α' (am Ende einer Stunde und 44 Minuten war die Deviation nicht mehr als 38·5°) einnahm. Da das obere Mikrometer auf Null bleibt, so ist die Gleichgewichtsbedingung der Drehwage dann

$$\alpha \sin \frac{\alpha}{2} . \operatorname{tg.} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4lc} \varphi,$$

wobei φ die elektrische Abstoßung der beiden Kugeln in der Einheit der Entfernung bezeichnet. Am Ende der Zeit t wird

[1] Traité de physique expérimentale et mathématique, t. II., p. 256.

diese Abstoßung übergehen in $\varphi . e^{-mt}$ und dies gibt für den zweiten Versuch den Ausdruck

$$\alpha' . \sin\frac{\alpha'}{2} . \operatorname{tg} . \frac{\alpha'}{2} = \frac{1}{4lc}\varphi . \ e^{-mt} .$$

Man erhält daraus:

$$e^{-mt} = \frac{\alpha' . \sin\frac{\alpha'}{2} . \operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2}}{\alpha . \sin\frac{\alpha}{2} . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

eine Gleichung, welche den Wert von m liefern wird.

Biot arbeitete denselben Tag und fand für m den Wert 0·0203 mit negativer Elektricität und 0·0214 mit positiver Elektricität. Die Natur der Elektricität übt somit keinen Einfluss auf den Verlust aus, wenigstens in dem Falle schwacher Ladungen, wie es jene sind, mit welchen man in der Torsionswage arbeitet. Diese Versuchsart geht schneller vonstatten und ist bequemer, als jene von Coulomb, sie eignet sich aber nur dazu, um die Gleichheit der beiden Verluste nachzuweisen. Die elektrisierten Körper hatten in dem Versuche von Biot zu große Dimensionen im Verhältnis zu ihrer Entfernung, diese Entfernung änderte sich zu sehr und die Bestimmung des Zerstreuungscoefficienten ergab sich aus einer complicierten Rechnung, welche auf das Gesetz der Abstoßungen gegründet war; Coulomb hat im Gegentheile bei seinen Arbeiten kleine Kugeln verwendet und gestrebt, die Entfernung constant zu erhalten, um sicher zu sein, dass die Verringerung der abstoßenden Kraft einzig und allein von dem Elektricitätsverluste herrührt, ohne dass irgendeine andere Fehlerquelle ins Spiel kommen konnte.

Man kann daher annehmen, dass der Elektricitätsverlust für beide Elektricitäten derselbe sei, wenigstens solange es sich um schwache Ladungen handelt. Aus den Versuchen von Faraday folgt im Gegentheile, dass für viel größere Ladungen die negative Elektricität das Bestreben hat, sich schneller zu entfernen.

39. Die großen Variationen, welche der Elektricitätsverlust in der Luft erfährt, hatten Coulomb dazu geführt, die Ur-

sachen zu ergründen, auf welche man sie zurückführen kann. Die atmosphärische Feuchtigkeit spielt in dieser Beziehung unzweifelhaft eine wichtige Rolle. Coulomb rechnete nach den Tafeln von De Saussure das Gewicht des Wasserdampfes, welcher in der Luft existierte, für jede der vier oben mitgetheilten Versuchsreihen und erhielt die folgenden Zahlen:

Datum der Versuche	Feuchtigkeitsgrad	Gewicht des in 1 Cub.' Luft enthaltenen Wasserdampfes	Zerstreuungscoefficient	Barometerstand
29. Mai	69 Grad	6·197 Gran	$\frac{1}{60}$	28″ 4‴
28. Mai	75 „	7·295 „	$\frac{1}{41}$	28″ 3‴
2. Juli	80 „	8·045 „	$\frac{1}{29}$	28″ 2‴
22. Juni	87 „	9·221 „	$\frac{1}{17}$	27″11‴

Wenn man nach dieser Tabelle ein Gesetz zwischen der Wasserdampfmenge und dem Zerstreuungscoefficienten herzustellen sucht, indem man z. B. die Coefficienten m und m' in zwei Experimenten proportional einer Potenz n der Gewichte p und p' des in einem Cubikfuß Luft enthaltenen Dampfes schreibt, also setzt:

$$\frac{m}{m'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^n,$$

so findet man für diese Potenz, indem man die verschiedenen Versuche zwei zu zwei vergleicht:

Aus dem ersten und zweiten $n = 2·76$
„ „ „ „ dritten $n = 2·76$
„ „ „ „ vierten $n = 3·61$
Im Mittel . . $n = 3·04$

Der Zerstreuungscoefficient wird daher fast dem Cubus des Gewichtes des Wasserdampfes proportional sein, welcher in einem bestimmten Luftvolumen herrscht. Gleichwohl darf man dieses Resultat nicht als bewiesen ansehen. Coulomb behauptet auch, festgestellt zu haben, dass die Temperatur keinen wesentlichen Einfluss hat; in den Experimenten ferner, die zur Vergleichung kommen, hat sich der Atmosphärendruck in merklicher Weise umsomehr vermindert, je größer die

Menge Wasserdampf wurde und es ist nicht wahrscheinlich, dass diese Variationen des Druckes ohne Effect blieben.

Der Zerstreuungscoefficient ändert sich überdies — nach Coulomb — unter Einflüssen, deren genaue Angabe nicht leicht ist; dieser Forscher kommt z. B. zu dem Resultate, dass man den Coefficienten verschieden findet an gewissen Tagen, an welchen das Hygrometer, das Thermometer und das Barometer dieselben Angaben liefern. „Man kann," sagt er (1), „diese Verschiedenheiten durch keine andere Ursache erklären als durch die Zusammensetzung der Luft, die aus verschiedenen mehr oder weniger idioelektrischen Elementen besteht, deren Dichte und Verhältnis beinahe continuierlich variiert, und welche verschiedene Affinitätsgrade zu den Wasserdämpfen haben. Die einzige Beobachtung, die ich ziemlich allgemein machte, ist die, dass, wenn die Witterung sich plötzlich ändert und das Hygrometer in einigen Stunden merklich vom feuchten zum trockenen Zustande variiert, der Elektricitätsverlust einige Zeit hindurch größer bleibt, als er nach dem vom Hygrometer angezeigten Grade der Trockenheit sein würde; ebenso umgekehrt, wenn das Hygrometer plötzlich vom trockenen zum feuchten Zustande übergeht."

Es scheint in der That natürlich zu sein, den elektrischen Zustand der Luft bei dieser Erscheinung mit in Anschlag zu bringen, wahrscheinlich aber in einer anderen Weise, als Coulomb es verstanden zu haben schien. Er fügt noch hinzu (2):

„Ich habe — um meine Arbeit zu vervollständigen — mir vorgenommen, die elektrisierten Körper in verschiedene Luftarten zu bringen, dieser Luft verschiedene Grade der Feuchtigkeit und der Dichte zu ertheilen, und dann für jeden Zustand der Luft das Gesetz der Abnahme der Elektricität aufzusuchen u. s. w."

Zu diesem Behufe war ein System von Apparaten und Muße nothwendig, die Coulomb gefehlt zu haben schien; man sieht aber, dass das Programm der Versuche Coulomb's fast dasselbe war, wie jenes, welches später von Matteuci ausgeführt wurde.

(1) Mémoires de l'Académie, p. 626 (1785).

(2) Ibid., p. 624.

Coulomb hat auch den Elektricitätsverlust durch Stützen studiert oder, einfach, er hat gesucht eine Beziehung zwischen der Länge der Stützen und der größten elektrischen Ladung, welche sie zu isolieren im Stande sind, aufzustellen; diese Untersuchung ist aber sehr compliciert und wir werden auf sie zurückkommen, um sie in einer allgemeineren Weise zu behandeln.

Aus den Experimenten, die Coulomb bezüglich dieses Gegenstandes angestellt hat, folgt, dass die Strecke, bis zu welcher die Elektricität sich auf einem schlecht leitenden Körper verbreitet, von der Elektricitätsmenge abhängt, welche der elektrische Körper, der mit dem schlechten Leiter in Verbindung steht, erhält. Nennt man λ die Entfernung, bis zu welcher die Elektricität sich auf der Stütze verbreitet, wenn die mit der Stütze verbundene Kugel die Elektricitätsmenge Q enthält, so war

$$\lambda = kQ^2,$$

wenn k eine von der materiellen Beschaffenheit des Isolators abhängige Constante ist, die ein Maß für die Leitungsfähigkeit desselben abgeben kann.

So fand er, dass ein 4.3^{cm} langes Schellackstäbchen eine dreimal so große Elektricitätsmenge zu isolieren vermochte, als ein Seidenfaden von 40^{cm} Länge; hieraus folgt, dass der Coefficient k für Seide 84mal so groß ist als für Schellack.

40. Übrigens hat das Gesetz des Elektricitätsverlustes in der Luft keine theoretische Bedeutung; es ist nichts anderes, als das Gesetz von Newton für die Abkühlung eines Körpers in einem auf eine niedrigere Temperatur gebrachten Raume. Es besteht in der That die größte Ähnlichkeit zwischen dem elektrischen Zustande eines Körpers und der Temperatur oder, besser gesagt, zwischen der Differenz der elektrischen Zustände eines Körpers und des Mediums, in welchem er sich befindet, einerseits und der Differenz der Temperatur eines Körpers und seiner Umgebung andererseits. Das Gesetz von Coulomb und jenes von Newton stehen daher offenbar auf derselben Stufe und sowohl das eine als auch das andere sind nur eine erste Annäherung einer wahrscheinlich viel complicierteren Beziehung.

Denn sei y eine Function von x, welche wir nach der Reihe von Maclaurin entwickelbar annehmen wollen, es sei also

$$y = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots \quad .$$

Stellt diese Function y die Abkühlung eines Körpers in einem Raume dar und x die Differenz der Temperaturen oder auch y den Elektricitätsverlust eines Körpers, dessen Ladung x ist, so ist das erste Glied des zweiten Theiles der Gleichung Null. Im betrachteten Falle kann das zweite Glied $f'(0)$ nicht Null sein, weil die Erscheinung mit dem Werte von x ihr Zeichen wechselt: ein Körper erwärmt sich in einer Umgebung, die wärmer ist als er selbst und ein im neutralen Zustande befindlicher Körper wird in einem elektrisierten Medium elektrisch.

Da das Glied erster Ordnung für kleine Werte von x das vorherrschende sein wird, so wird übrig bleiben:

$$y = x f'(0) = \mathrm{A}x,$$

d. h. in erster Annäherung ist die Abkühlung eines Körpers proportional dem Überschusse seiner Temperatur über jene der Umgebung und der Elektricitätsverlust proportional der Ladung. Es reicht hin, dass die Erscheinung langsam vonstatten gehe, damit diese Betrachtungsweise anwendbar sei; nichts zeigt aber an, innerhalb welcher Grenzen dieselbe hinlänglich angenähert angesehen werden kann; es ist Sache des Versuches, diese Grenzen zu bestimmen. Im Falle irgendeiner Function wird es auch ohne Zweifel dahin kommen können, dass die erste und zweite Derivierte beide Null werden und die Entwicklung mit dem Gliede dritten Grades beginnen wird; die Curve aber, welche diese Function graphisch darstellt, wird dann im Ursprung einen Inflexionspunkt haben; die Erscheinungen jedoch, um die es sich handelt, sind nicht von der Art, dass sie singuläre Punkte liefern.

Was die Abkühlung anbelangt, so haben die Versuche von Dulong und Petit das Gesetz von Newton ergänzt; durch diese Versuche wurde eine Function bestimmt, welche zwar nicht ein absolutes Gesetz darstellt, aber doch der

Erscheinung für größere Temperaturdifferenzen Genüge leistet. Etwas Ähnliches wurde bezüglich der Elektricitätszerstreuung nicht unternommen; man hat nur gesucht den Sinn der Änderungen festzustellen, welche verschiedene Umstände der Erscheinung ertheilen können.

41. Untersuchungen von Matteuci. Matteuci[1] hat bezüglich dieses Gegenstandes eine sehr ausführliche Untersuchung veröffentlicht, von der wir im Auszuge nur die Hauptresultate geben werden. Er hat den Einfluss der Temperatur, des elektrischen Zustandes der vorhandenen Körper, ihrer Entfernung, der Luftfeuchtigkeit, der Natur des Gases, der Bewegung der Körper und des Druckes auf den Zerstreuungscoefficienten studiert.

Die Wage von Matteuci war vollständig geschlossen; man kann daher in ihr eine künstliche Atmosphäre von was immer für Gasen hervorrufen, die entweder durch Phosphorsäureanhydrid vollständig getrocknet oder auf einen gewissen hygrometrischen Zustand mittelst verschiedener Lösungen von Schwefelsäure in Wasser, also von Lösungen, deren Dampfspannungen man nach den Versuchen von Regnault kennt, gebracht wurden. Die Art und Weise der Beobachtung des Elektricitätsverlustes war im allgemeinen jene von Coulomb.

Einfluss der Bewegung der Luft. Ein erstes genug sonderbares Resultat wurde von Matteuci beobachtet, dass nämlich eine rasche Luftbewegung in der Nachbarschaft der elektrisierten Körper die Elektricitätszerstreuung in einer merklichen Weise vermindert, anstatt sie zu vermehren, wie man von vorneherein annehmen würde. Er bestimmte den Zerstreuungscoefficienten zweier Kugeln, von denen die eine in atmosphärischer Luft in Ruhe war, während die andere in der Zwischenzeit zwischen zwei Beobachtungen lebhaft in der Luft bewegt oder in den Luftstrom eines gewöhnlichen Blasebalges gestellt wurde. In einem solchen Experimente war der Zerstreuungscoefficient $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$ in ruhiger Luft, hingegen $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{13}$ in bewegter Luft. Hier musste er sich aber gegen eine Fehlerquelle schützen, welche von Bedeutung sein kann, nämlich

[1] Annales de Chimie et de Physique, 3e série, t. XXVIII., p. 385.

gegen die Elektrisierung der Luft, die durch einen Blasebalg geschickt wurde. Wie dem auch immer sei, der Einfluss der Bewegung auf den Elektricitätsverlust erscheint gewiss, und man kann sich davon in einer sehr einfachen Weise überzeugen. Man nimmt zwei identische Kugeln, die von isolierenden Stützen getragen werden und man elektrisiert sie, nachdem man sie in Berührung gesetzt hat. Man hält dann die eine von ihnen unbeweglich und bewegt die andere lebhaft in der Luft; am Ende einer beliebigen Zeit nähert man sie einzeln irgendeinem Elektroskope und man weist nach, dass die Kugel, welche bewegt wurde, eine viel größere Ablenkung hervorruft. Es scheint daraus zu folgen, dass der Elektricitätsverlust zum größten Theile durch die Elektrisierung der Luftmolecüle bewirkt wird und dass dieses Medium, da es ein schlechter Leiter ist, eine gewisse Zeit benöthigt, um bei der Berührung mit dem elektrisierten Körper selbst elektrisch zu werden.

Einfluss der materiellen Beschaffenheit des Gases. Die Natur des Gases, welches die Atmosphäre der Drehwage bildet, scheint keinen Einfluss auf den Elektricitätsverlust zu haben, sei es, dass das Gas trocken ist oder irgendwelche Feuchtigkeitsmengen enthält. In vollständig ausgetrockneten Gasen scheint der Elektricitätsverlust das Gesetz von Coulomb nicht zu befolgen. Für elektrische Ladungen, die innerhalb gewisser Grenzen gewählt sind, scheint der Elektricitätsverlust von der Ladung unabhängig zu sein, derart, dass das Verhältnis der Geschwindigkeit der Elektricitätszerstreuung zur elektrischen Ladung, anstatt constant zu sein, wie es Coulomb gefunden hat, im Gegentheile umsomehr wachsen würde, je mehr sich die Ladung verringert. Die von Matteuci erhaltenen Resultate können überdies nur unter ganz speciellen Umständen Geltung haben.

Einfluss der Natur der Elektricität. In der Luft und in trockenen Gasen war der Elektricitätsverlust, sobald die beiden Kugeln auf dieselbe Weise elektrisiert wurden, derselbe für positive und negative Elektricität, solange die Ladungen hinlänglich schwach waren; bei größeren Ladungen aber zeigte sich der Verlust an negativer Elektricität immer größer, wie schon

Faraday es festgestellt hat. Wenn aber die beiden Körper, welche man gegenüberstellt, entgegengesetzte Elektricitätsladungen besitzen, so ist der Elektricitätsverlust geringer, als wenn sie in derselben Weise elektrisch sind; in diesem Falle ist die Verminderung der Ladung des einen der Körper sogar schwächer, als wenn dieser Körper in Luft isoliert und fern von jedem Leiter gewesen wäre. Dieses Ergebnis, welches aus zu wenig zahlreichen Versuchen gefolgert worden zu sein schien, erscheint ganz und gar unvermuthet. (1)

Einfluss der Temperatur und Feuchtigkeit. Der Elektricitätsverlust vergrößert sich hinlänglich rasch mit der Temperatur. So hat Matteuci, als er mit einem vollständig trockenen Gase arbeitete, gefunden, dass zur Erreichung desselben Elektricitätsverlustes 278 Minuten bei der Temperatur 0°, 250 Minuten bei 13·5° und nur 167 Minuten bei der Temperatur von 22° verstreichen mussten. Coulomb ist, ohne directe Versuche bezüglich des Temperatureinflusses gemacht zu haben, zu einem verschiedenen Schlusse gekommen; Versuche, welche bezüglich der elektrischen Entladungen angestellt wurden und von denen wir später sprechen werden, scheinen ebenfalls anzuzeigen, dass die Temperatur an und für sich nur insoferne einen Einfluss auf die Erscheinung ausübt, als die absolute Dichte des Gases mit der Temperatur sich ändert. Die von Matteuci festgestellten Differenzen sind zu groß, als dass sie einzig und allein durch die Ausdehnung des Gases erklärt werden könnten; man kann dieses Ergebnis der Feuchtigkeit zuschreiben, welche sich zufolge der Erwärmung von den Wänden des Glasgefäßes loslöst, wenn auch Matteuci bestimmt angibt, alle Vorsichtsmaßregeln gebraucht zu haben, um mit einem vollständig trockenen Gase zu arbeiten.

In der That übt die Feuchtigkeit einen bedeutenden Einfluss aus. Matteuci hat in seine Drehwage verschiedene Schwefelsäurehydrate gebracht und festgestellt, dass der Elektricitätsverlust mit der Spannung des Wasserdampfes in der

(1) Hat dieses Ergebnis wirklich Giltigkeit, so kann man es dem Umstande zuschreiben, dass die Nachbarschaft der beiden mit entgegengesetzten Elektricitätsmengen geladenen Körper den absoluten Wert des Potentials auf jedem von ihnen vermindert.

Luft größer wird, aber nicht dem Gesetze des Cubus der Dampfmenge Folge leistet, wie es Coulomb angegeben hat: doch sind die Versuche von Matteuci nicht genügend vollständig und die Ergebnisse einer und derselben Beobachtungsreihe sind nicht hinlänglich übereinstimmend, als dass man aus ihnen einen definitiven Schluss ziehen könnte.

Eine andere bemerkenswerte Thatsache würde die sein, dass die Dämpfe verschiedener Substanzen, wie jene vom Kampfer, Assa foetida, von reinen Ölen und von Äther selbst, die in trockener Luft sich vorfinden, keinen Einfluss auf den Elektricitätsverlust ausüben.

Einfluss der Entfernung der Körper. Nähert man die beiden Kugeln der Drehwage einander, so vergrößert sich der Elektricitätsverlust bedeutend, wie man aus folgenden Versuchen ersieht, die in einem trockenen Gase angestellt wurden; man hat in diesen Versuchen die Zeit bestimmt, während welcher sich ein und derselbe Torsionsverlust von 10° herstellte, wenn die Kugeln ungleiche Entfernung hatten.

Entfernung der Kugeln	Dauer eines Torsionsverlustes von 10°	Verhältnis
18°	4.5'	4
25°	6'	4.1
26°	6.5'	4
36°	10.5'	3.4

Man sieht, dass der Elektricitätsverlust in einer gegebenen Zeit fast umgekehrt proportional der Entfernung der beiden elektrisierten Körper ist. Die zwischenliegende Luftschichte dürfte in diesem Falle eine Rolle spielen, die jener eines leitenden Cylinders ganz ähnlich ist, der von einem Elektricitätsstrom, den Ohm'schen Gesetzen entsprechend, durchflossen wird.

Einfluss des Druckes. Die interessantesten Resultate, welche von Matteuci erhalten wurden, sind jene, welche sich auf die Druckänderungen des Gases beziehen. Wenn ein stark elektrisierter Körper in eine verdünnte Gasatmosphäre gebracht

wird, so verliert er zuerst schnell eine große Elektricitätsmenge; erst dann wird der Elektricitätsverlust langsam und regelmäßig. Die größte elektrische Ladung, welche ein Körper in einem Gase zu behalten vermag, ist nahezu dem Drucke proportional. Dieses Gesetz wurde schon von Harris ausgesprochen und Matteuci hat es innerhalb sehr ausgedehnter Grenzen bestätigt gefunden, wobei er den Druck in seinen Versuchen von 5mm bis 768mm variierte. Die fixe Kugel der Wage *a* (Fig. 17) war an einem isolierenden Stäbchen befestigt und in der Axe einer cylindrischen Höhlung aus Metall, die mit dem Erdboden in Verbindung gesetzt war und 10 Centimeter im Durchmesser hatte, aufgestellt. Man bedeckte den

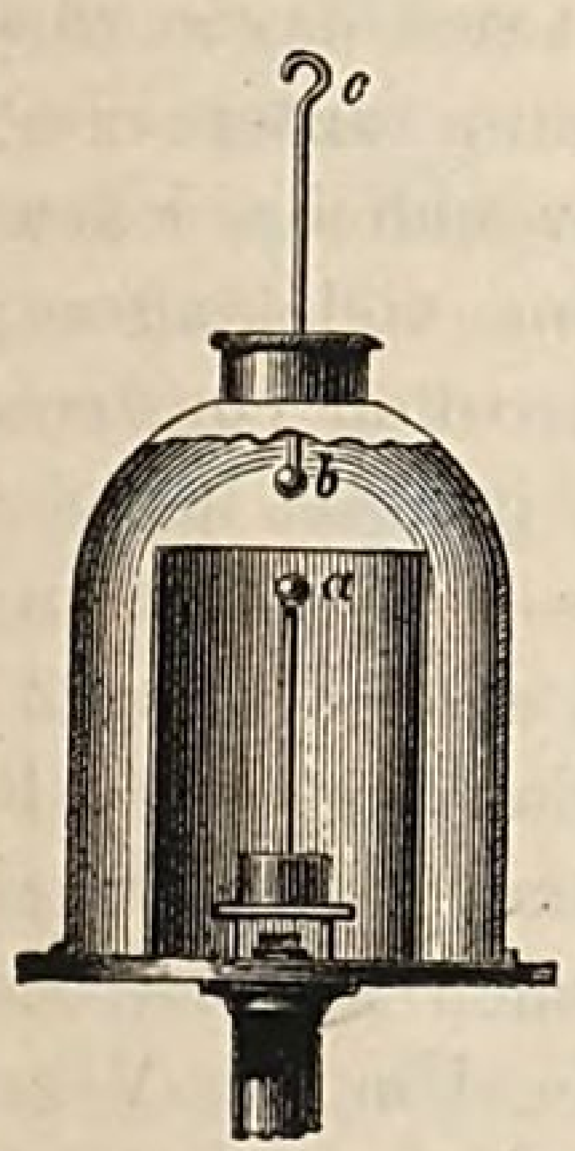


Fig. 17.

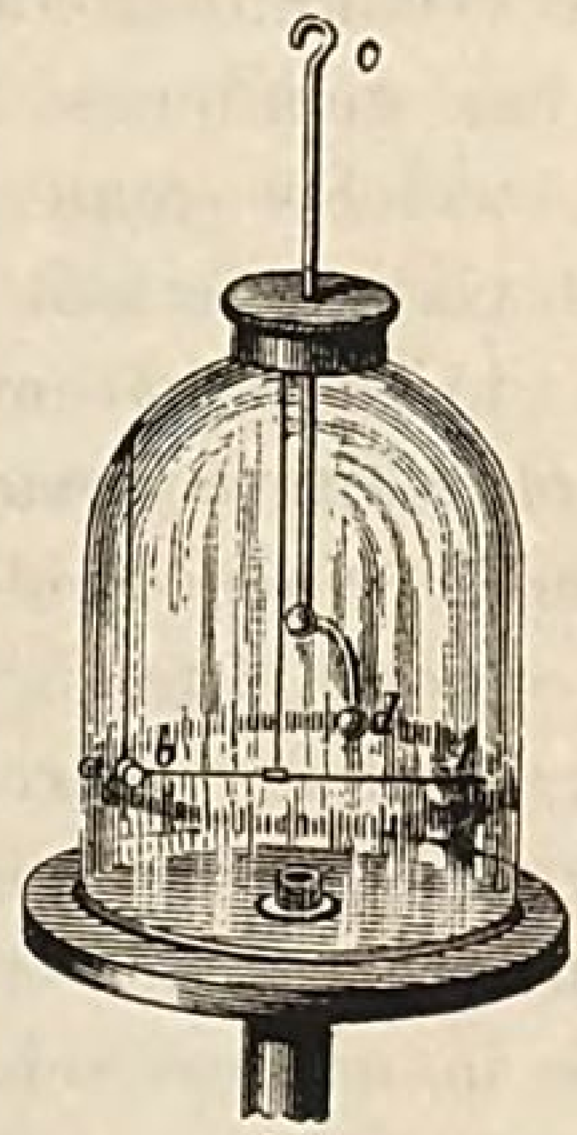


Fig. 18.

Cylinder und die Kugel mit einer Glocke, welche mit einer Fassung versehen war, in welche ein Metallstäbchen hineingeschoben werden kann, das am unteren Ende in eine Kugel *b* und am oberen Ende in einen Haken *c* übergeht. Um die Kugel *a* zu laden, kann man in zweifacher Weise verfahren: man verdünnt zuerst das Gas, bringt das Metallstäbchen in Berührung mit der Kugel, berührt die Spitze dieses Stäbchens mit dem Knopfe einer Leydnerflasche, die durch eine bestimmte Anzahl von Drehungen einer Elektrisiermaschine geladen wurde, die in allen Versuchen dieselbe bleibt, hebt das Stäbchen mit einem isolierenden Körper, lässt hierauf Luft eintreten, nimmt die Kugel *a* weg und bringt sie in die Dreh-

wage; oder aber auch: man ladet die Kugel bei gewöhnlichem Drucke, isoliert sie, verdünnt das Gas und lässt dann Luft in die Glocke eintreten.

Die Ladung, welche die Kugel *a* behält, ist unabhängig von der Operationsweise; sie ist dieselbe, wenn man sie elektrisiert, bevor oder nachdem man die Luft verdünnt hat.

Der Metallcylinder hat den Zweck, die Elektricität aufzusammeln, welche die Kugel entweichen lässt, und zu verhindern, dass die Elektricität sich auf dem Glase der Glocke niederlassen kann, wo sie den Versuchen störend in den Weg treten kann.

Was den regulären Elektricitätsverlust betrifft, so ist er viel schwächer in verdünnten Gasen. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, ein geladenes Elektroskop unter eine Glocke zu bringen, in welcher man das gewöhnliche Vacuum erzeugt hat: die Deviation erhält sich eine viel längere Zeit als in der Luft. Matteuci hat ein Elektroskop construiert, welches aus zwei Goldblättern bestand, die in einer luftleer gemachten Glocke mittelst eines Seidenfadens aufgehängt waren: man konnte diese Goldblättchen mittelst eines krummen Conductors elektrisieren, welcher durch die Fassung der Glocke gieng; den Conductor entfernte man sodann. Der Druck war nur 3^{mm}, die Entfernung der Goldblättchen änderte sich im Laufe zweier Tage in unmerklicher Weise. Um die Versuche untereinander vergleichbarer zu machen, hat er noch eine Art von Drehwage construiert (Fig. 18); dieselbe besteht aus einer Nadel A*b*, die an einem torsionslosen Seidenfaden aufgehängt war und einen kleinen Magnet A trägt, welcher ihr eine schwache Richtkraft ertheilt. Diese Nadel trug an ihrem einen Ende eine leitende Kugel *b*, welche in ihrer Gleichgewichtsposition in Berührung mit einer Kugel *a* war, die an einem Seidenfaden hieng. Man elektrisiert abermals die beiden Kugeln mittelst eines gekrümmten Leiters *cd*. Beim Drucke von $757{\cdot}5^{mm}$ brauchte die Nadel $4^{h}5'$, um von der Ablenkung von 40^{0} bis zur Berührung zu kommen. Wurde der Druck auf 40^{mm} reduciert, so war die ursprüngliche Entfernung der Kugeln anfangs $38{\cdot}5^{0}$ und am Ende von $14^{h}15'$ war sie noch 13^{0}.

42. Man kann sich dadurch erklären, warum verdünnte Luft als ein ausgezeichneter Elektricitätsleiter sich zu verhalten scheint. Die Ursache ist, dass die Maximalladung, welche ein leitender Körper in der Luft erhalten kann, umso kleiner ist, je geringer der Druck ist; die elektrischen Funken können dann in verdünnten Gasen eine beträchtliche Länge erlangen. Gleichwohl ist die Untersuchung in Wirklichkeit complicierter, denn geht man von einem sehr schwachen Drucke aus, so wird der Übergang der Elektricität in einem Gase umso schwieriger, je größer die Verdünnung wird und hört schließlich im absoluten Vacuum vollständig auf. Walsh ist der erste Physiker, der diese wichtige Thatsache festgestellt zu haben scheint, eine Thatsache, auf welche detaillierter zurückzukommen wir später Gelegenheit haben werden.

43. Versuche von Riess und Warburg. Es bleiben in dieser Untersuchung dennoch noch einige dunkle Punkte. Das Gesetz von Coulomb ist, wie wir gesehen haben, eine nahezu evidente Beziehung (innerhalb Grenzen, deren genaue Vorausbestimmung unmöglich ist) unter den Versuchen, welche bei identischen Bedingungen angestellt wurden; der numerische Wert des Zerstreuungscoefficienten kann aber durch irgendeine Änderung modificiert werden, welche man an die eine der Versuchsanordnungen anbringt. So hat Riess(1) beobachtet, dass in freier Luft der Zerstreuungscoefficient mit der Anfangsladung wächst, während das Umgekehrte in dem geschlossenen Gehäuse einer Drehwage stattfindet. Wenn man in einer Drehwage diesen Coefficienten mittelst einer und derselben Kugel, deren Ladung man vergrößert oder verkleinert, bestimmt, so findet man einen kleineren Wert für große Ladungen als für kleine. Um diese Wirkung zu erklären, nimmt Riess an, dass die Luft der Drehwage sich relativ schneller in dem Falle großer Ladungen elektrisiert und dann einem neuen Verluste Widerstand leistet. Doch verschwindet diese Elektrisierung genug schnell, so dass sie in die aufeinander folgenden Versuche, welche durch einen Zeitraum von einigen Minuten getrennt sind, keine Störung bringt.

(1) Reibungselektricität, Bd. I., p. 138.

Die Erklärung von Riess scheint nicht ganz genügend zu sein und mindestens ein Theil der von ihm beobachteten Erscheinung kann den Stützen selbst zugeschrieben werden. Wenn der Schellack nicht absolut isolierend ist, so kann er dem Conductor, besonders wenn die Ladung groß ist, eine beträchtliche Elektricitätsmenge entziehen und sie ihm nach und nach wieder zurückgeben, was die Verminderung der abstoßenden Kraft zu hemmen streben wird. Diese Bemerkung wird sich überhaupt auf die folgenden Versuche von Warburg anwenden lassen. Denn man weiß, wie sehr das Isolierungsvermögen einer Schellackstange vom Zustande ihrer Oberfläche abhängt; Riess hat, als er unter denselben Bedingungen arbeitete, Coefficienten erhalten, welche vom Einfachen zum Doppelten sich änderten, je nachdem die Stützen neu hergestellt sind oder nur einige Tage alt waren.

Warburg(1) hat zuletzt diese Untersuchung wieder aufgenommen; er hat auch diese Veränderungen des Elektricitätsverlustes mit der ursprünglichen Ladung festgestellt und er schreibt sie hauptsächlich der Elektricität zu, mit welcher sich die Schellackträger nach und nach imprägnieren. Seine Versuche führten zu dem Resultate, dass anfänglich durch den Übergang der Elektricität auf die Stützen eine viel bedeutendere Verringerung der Ladung als durch die Zerstreuung in die Luft herbeigeführt wird; erst nach einigen Stunden erhielt er constante Werte des Zerstreuungscoefficienten, die dann von der Stärke der Ladung unabhängig werden. Zur Vermeidung dieser Fehlerquelle machte er eine große Zahl aufeinanderfolgender Versuche in demselben Gase, wobei er Sorge trug, von Zeit zu Zeit die Ladungen des fixen Conductors und der beweglichen Nadel zu erneuern; er nahm als Zerstreuungscoefficienten, die sich auf das umgebende Gas beziehen, nur die Resultate auf, welche er erhielt, wenn die Variationen unmerklich wurden, da er dann die Stützen als mit Elektricität gesättigt betrachten konnte. Warburg wendet eine bifilare Aufhängung an, welche ihm in der Praxis weniger bequem erschien, dagegen aber in ihren Angaben constanter sich erwies

(1) Pogg. Annalen, Bd. CXLV., p. 578 (1872).

wegen des beständigen Wechsels der Torsion, welchen er bei Metalldrähten besorgte. Er hat die Giltigkeit des Gesetzes von Coulomb, die Gleichheit des Verlustes für die beiden Elektricitäten und die Verringerung des Zerstreuungscoefficienten mit dem Drucke bestätigt; er fand aber, dass die Feuchtigkeit keinen Einfluss hat, was allen Ergebnissen entgegengesetzt ist, die von anderen Beobachtern erhalten waren, dass ferner der Elektricitätsverlust in allen trockenen Gasen nicht derselbe ist; derselbe wird z. B. zweimal größer im Wasserstoffgas als in atmosphärischer Luft oder in Kohlensäure.

Ein besonderer Umstand in den Versuchen von Warburg verdient bezeichnet zu werden: Der Umfang des Glasgefäßes war auf der Innenseite mit Metallblättchen versehen, um die Elektrisierung zu vermeiden, welche sich schließlich immer auf den Wänden eines Glasgefäßes erzeugt, und um die in der Drehwage eingeschlossenen Körper jeder elektrischen Wirkung der auswärtigen Körper zu entziehen. Dies ist die eine Vorsichtsmaßregel, welche Faraday schon seit langer Zeit empfohlen hat und welche man in den meisten Versuchen über statische Elektricität unumgänglich in Anwendung bringen muss, wenn man unregelmäßige Störungen vermeiden will, die oft beträchtlich sind.

Warburg erhielt Zerstreuungscoefficienten, die unvergleichlich geringer sind als jene von Coulomb, z. B. $\frac{1}{1000}$, währenddem Coulomb kaum einen kleineren Coefficienten als $\frac{1}{120}$ beobachtet hat; dies ist die Ursache, dass in der That die Versuche kaum verglichen werden können. Das Gehäuse der von Warburg in Anwendung gebrachten Wage war so eng, dass der feste Conductor und die beweglichen Conductoren, die aus Scheiben von $17^{mm.}$ im Durchmesser bestanden, von einander um $30^{mm.}$ entfernt waren, während jeder von ihnen von den Wänden nur um $28^{mm.}$ abstand, ein Umstand, der nicht gleichgiltig sein kann, hauptsächlich wegen der Leitungsfähigkeit der Wände. Nichts zeigt andererseits an, dass alle von Coulomb empfohlenen Vorsichtsmaßregeln in Anwendung gebracht wurden, um sich der Isolierung durch die Stützen zu versichern; wenn nun ein Stab aus Schellack, der mit Elektricität imprägniert oder gesättigt ist, mit einer leitenden

Scheibe in Contact gebracht wird, so ist es klar, dass der Schellack nach und nach der Scheibe Elektricität abgibt, welche sie durch den Contact mit der Luft verliert, und es scheint schwierig zu sein anzunehmen, dass die Verminderung der abstoßenden Kraft, die zwischen den beiden Leitern herrscht, selbst näherungsweise den Elektricitätsverlust anzeigt, der in Wirklichkeit durch die Berührung des den Conductor umgebenden Gases stattfindet. — Zu bemerken ist noch, dass Warburg einen Theil der Abnahme der Zerstreuung der Elektricität bei abnehmender Dichte den in den Gasen schwebenden festen Staubtheilchen zuschreibt, welche von dem elektrisierten Körper angezogen, elektrisiert und abgestoßen werden. Dass in Wasserstoff sowie in verdünnten Gasen die Zerstreuung kleiner wird, dürfte nach Warburg davon herrühren, dass die Staubtheilchen in derartigen Gasen viel schneller zu Boden sinken. Gegen diese Ansicht, welche auch von Boltzmann (1) vertreten wurde, spricht der gewichtige Umstand, dass gewöhnliche und gereinigte (gewaschene und durch Schwefelsäure getrocknete) Luft nahezu denselben Zerstreuungscoefficienten ergab: für diese Ansicht spricht die Thatsache, dass der Wert dieses Coefficienten bei Verdünnung der Luft nicht alsogleich auf den diesem Dichtigkeitsgrade entsprechenden Wert herabgieng; es dürfte also die Verminderung der Zerstreuung zum Theil durch das Herabfallen der festen Staubtheilchen bedingt sein.

Es folgt aus allen diesen Versuchen, dass die allmählige Elektricitätsabnahme eines isolierten Conductors ein sehr compliciertes Phänomen ist, welches von der ursprünglichen elektrischen Ladung, von der Natur und dem Zustande des umgebenden Gases, von der oberflächlichen oder inneren Leitungsfähigkeit der Stützen, von der Art und Weise, in welcher diese Stützen allmählig von der Elektricität durchdrungen werden u. s. w. abhängt; das Gesetz des Elektricitätsverlustes hat keine andere Bedeutung als die einer empirischen Formel, die geeignet ist, um in jedem speciellen Falle den Wert gewisser Correctionsglieder zu bestimmen.

(1) Wiener Sitzungsberichte Bd. 69.

IV. Capitel.

Vertheilung der Elektricität.

44. Die Elektricität verbreitet sich auf der Oberfläche der Leiter. Wir haben schon gesehen, wie Coulomb es nachgewiesen hat, dass die Elektricität sich in einem Körper nicht vermöge einer chemischen Affinität oder einer Wahlanziehung verbreitet, sondern dass sie sich unter verschiedene in Berührung gebrachte Körper vertheilt, in einer Art und Weise, die von deren materiellen Beschaffenheit unabhängig ist und einzig und allein von der Gestalt und den Dimensionen der Körper abhängt. Coulomb hat in der That gefunden, dass die Elektricität sich in gleicher Weise unter zwei Kugeln von demselben Durchmesser vertheilt, von denen die eine aus Kupfer, die andere aus Hollundermark besteht, oder auch unter zwei gleichen Scheiben, von denen die eine aus Papier, die andere aus Eisen ist.

Man könnte in derselben Weise zeigen, dass die Oberfläche der in Berührung stehenden Körper allein auf die Theilung der Elektricität Einfluss nimmt (1).

(1) Lange vor Coulomb haben die Elektriker zu erforschen gesucht, ob die Elektricität sich im Verhältnisse der Maßen oder der Oberflächen mittheilt; schon Gray wies nach, dass es bei der Elektrisierung der Körper nicht auf deren Maße, sondern auf deren Oberfläche ankomme, indem ein hohler Würfel von Eichenholz ebensoviel Elektricität annahm, wie ein massiver von gleicher Größe. Le Monier hat nachgewiesen, dass eine hohle Röhre stärker elektrisch wird als eine Stange, dass eine ausgebreitete Bleiplatte einen stärkeren Funken liefert, als wenn sie auf sich selbst aufgerollt ist. (Mémoires de l'Académie, p. 461) (1746).

Elektrisiert man zwei gleiche Kugeln, die sich berühren, von denen die eine aus Metall, voll oder hohl, die andere aber aus irgendeiner Substanz, Holz, Glas, Schwefel, gebildet ist, welche von einem Metallblatte überkleidet wird, und bringt man dann diese beiden Kugeln auseinander, so haben dieselben genau die gleiche Ladung. Wenn man die eine oder andere Kugel mit einer an einem isolierenden Handgriffe befindlichen Kugel aus Metall berührt, so wird man die gleiche Elektricitätsmenge wegnehmen. Die innerhalb der Kugel gelegene Materie spielt daher keine Rolle und diese Eigenthümlichkeit würde unerklärlich sein, wenn die Elektricität sich anderswo als auf der Oberfläche des elektrisierten Körpers selbst ausbreiten würde.

Um direct diese Eigenthümlichkeit durch den Versuch zu demonstrieren, hat sich Coulomb einer Art von Drehwage [1] oder eines sehr empfindlichen Elektrometers bedient. Die Nadel (Fig. 19) war aus einem Schellackfaden gebildet, der in der Flamme bis zur Dicke eines starken Haares gestreckt war. Diese Nadel war an einem Coconfaden von ungefähr 4 Zoll Länge aufgehängt und trug an dem einen Ende eine Scheibe A von Rauschgold, die 2 Linien im Durchmesser hatte und vom Aufhängefaden um ungefähr 10 bis 12 Linien entfernt war. Das Ganze war in einem Glascylinder aufgehängt, der auf seinem Umfange mit einer Theilung versehen war und von einem Deckel geschlossen wurde, der eine seitliche Öffnung besaß. Die Empfindlichkeit dieses Elektrometers war so groß, dass eine Kraft von $\frac{1}{60000}$ Gran ($\frac{1}{1000}$ Milligramm), die an der Scheibe angriff, hinreichte, um die letztere um mehr als 90 Grade abzulenken.

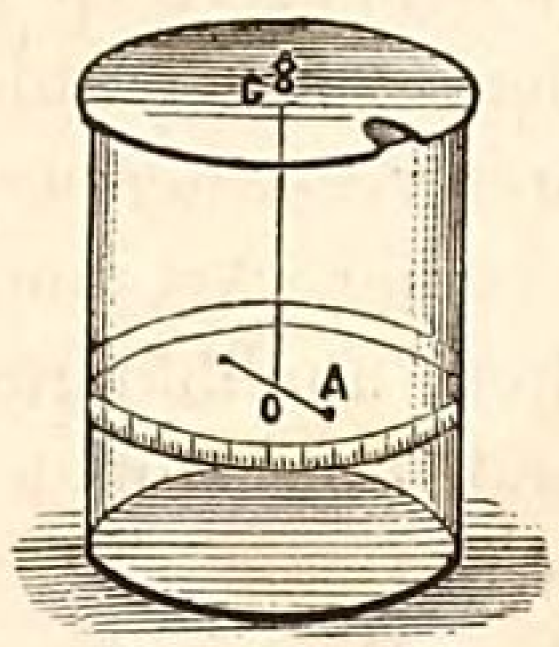


Fig. 19.

Coulomb nahm hierauf einen Holzcylinder von 4 Zoll im Durchmesser, der mehrere Löcher enthielt, die 4 Linien im Durchmesser und 4 Linien in der Tiefe hatten; diesen Cylinder elektrisierte er, nachdem er ihn auf einen vollkommen isolierenden Träger gestellt hatte. Die Scheibe des Elektrometers

[1] Mémoires de l'Académie, p. 73 (1786).

wurde in derselben Weise elektrisiert; nun berührte er die Oberfläche des Cylinders mit einer kleinen Scheibe aus Goldpapier, die ein und eine halbe Linie im Durchmesser hatte und von einem kleinen Schellackstäbchen getragen wurde. Sodann brachte er diese Papierscheibe in das Elektrometer; mit Heftigkeit wurde die Nadel abgelenkt. Er wiederholte denselben Versuch, nachdem er die Papierscheibe in eines der Löcher des Holzcylinders gebracht hatte und nachdem er dieselbe mit Vorsicht zurückgezogen hatte, ohne die Ränder des Loches zu berühren; dann brachte er das Scheibchen der Elektrometernadel gegenüber und es zeigte sich kaum eine merkliche Wirkung. Coulomb fügt diesem Gegenstande Folgendes hinzu: „Da die Scheibe aus vergoldetem Papiere nur $\frac{1}{18}$ Linie Dicke hat, so wird sie, wenn man sie in Berührung mit der Oberfläche des Cylinders setzt, ein Theil dieser Oberfläche, und nimmt demzufolge eine Menge elektrischen Fluidums auf, welche gleich jener ist, die ein Stück der Oberfläche enthält, welches dieser kleinen Kreisscheibe gleichkommt.“ Diese Erklärung von Coulomb ist im Vorbeigehen zu bemerken, weil sie im Widerspruche mit dem steht, was er später über das Probescheibchen sagte.

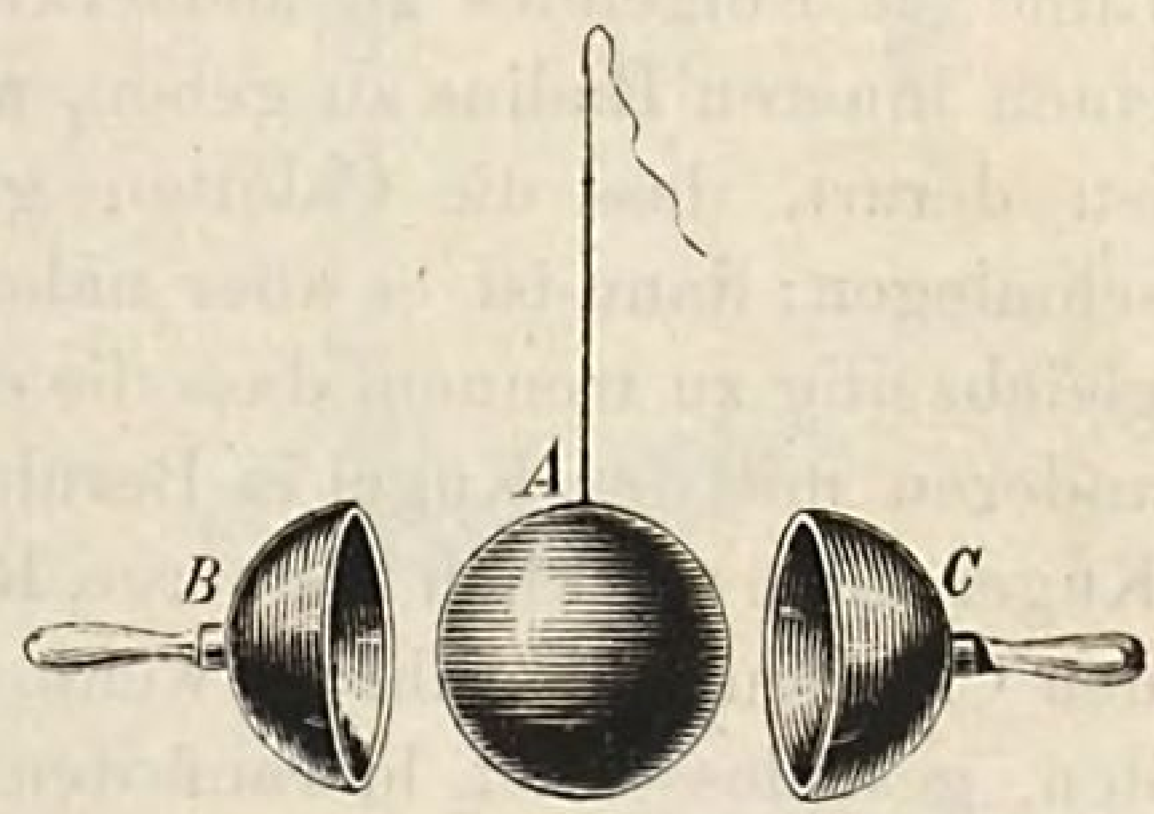


Fig. 20.

Es enthalten daher die in dem Holzcylinder erzeugten Höhlungen keine bemerkenswerte Elektricitätsmenge, die ganze Elektricität fand sich auf der äußeren Oberfläche vor.

45. Es kann überdies die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche der Körper durch eine große Anzahl von Versuchen demonstriert werden, die leichter anzustellen sind.

1. Man elektrisiert z. B., wie es Biot[1] gethan hat, eine Metallkugel A (Fig. 20), die mittelst einer Stütze isoliert ist oder an einem Seidenfaden, der mit Schellack überkleidet ist, aufgehängt ist. Man setzt auf diese Kugel zwei halbkugel-

[1] Traité de physique exp. et math., t. II., p. 264.

förmige Calotten B und C, welche die Kugel ganz bedecken, und die einzeln von isolierenden Handgriffen gehalten werden. Hierauf entfernt man gleichzeitig die beiden Calotten und man nähert allmählig einem beliebigen Elektroskope, z. B. einem elektrischen Pendel zuerst die Kugel, dann die sie früher bedeckenden Calotten. Man weist nach, dass die Kugel keine Spur von Elektricität enthält, und dass die Calotten andererseits stark elektrisch sind.

Dieser Versuch (¹) ist classisch geworden und die Apparate, welche dazu dienen, dieses Experiment zu wiederholen, sind im Allgemeinen mangelhaft construiert. So wird die Kugel zuweilen von einem Glasfuße getragen, der öfters am oberen Ende mit einer Metallfassung versehen ist, welche von den Kugelcalotten nicht bedeckt wird und Elektricität behält. In zweiter Linie ist Folgendes zu bemerken: Man strebt den Calotten einen inneren Radius zu geben, welcher jenem der Kugel gleich ist, derart, dass die Calotten genau sich an die Kugel anschmiegen; dann ist es aber nahezu unmöglich diese Körper so gleichzeitig zu trennen, dass die eine Calotte nicht noch nach der anderen mit der Kugel in Berührung bleibt. Es ist besser, der Kugel einen merklich kleineren Radius zu geben, die Kugel mit den Calotten zu berühren, wenn die Umhüllung, welche sie bilden, geschlossen ist, hierauf den Contact zu unterdrücken und dann die beiden Calotten voneinander zu trennen. Der Versuch gelingt dann unfehlbar und er ist fast in der Weise angestellt, welche ihm schon Cavendish — nach seinen Memoiren — gegeben hat (²).

2. Man elektrisiert eine isolierte Hohlkugel A (Fig. 21), deren Oberfläche eine kleine Öffnung O enthält. Man berührt die innere Oberfläche mittelst einer Kugel oder einer leitenden Scheibe, die an einem isolierenden Handgriffe sitzt, und

(¹) Dieser Versuch wurde bereits 1772 von Cavendish angestellt; er leitete aus demselben auch das Gesetz des umgekehrten Quadrates der Distanz für die Wechselwirkung der Elektricitäten ab. Er stellte ähnliche Versuche mit anders gestalteten Körpern an, um nachzuweisen, dass die Erscheinung von der Gestalt der Körper unabhängig sei. (Man sehe diesbezüglich: Electr. Res. of H. Cavendish, Cambridge 1879.)

(²) Harris, Leçons élémentaires d'électricité, traduct. franç. p. 25.

welche man durch die Öffnung einführt; hierauf entfernt man die Scheibe, wobei man Sorge trägt, die Ränder der Öffnung nicht zu berühren und man findet, dass sie gar nicht elektrisch ist; bringt man sie aber an die äußere Oberfläche, so wird sie stark elektrisch. Man wird dieselben Resultate an einer geschlossenen Oberfläche von was immer für einer Form beobachten. Gleichwohl ist das Experiment delicater Natur: es kommt öfters vor, dass die Scheibe Spuren von Elektricität liefert, ja sogar von Elektricität, die jener des Leiters entgegengesetzt ist, und bisweilen verschwindet diese Elektricität nicht, wenn man die Scheibe mit der Hand berührt. Diese Fehlerursachen werden durch die Influenz veranlasst, welcher der Träger der Scheibe unterworfen ist, wenn er nicht vollständig isolierend ist; man kann diesen Fehlerursachen nur aus dem Wege gehen, wenn man Stützen aus Schellack in Anwendung bringt, der mit großer Sorgfalt ausgesucht ist.

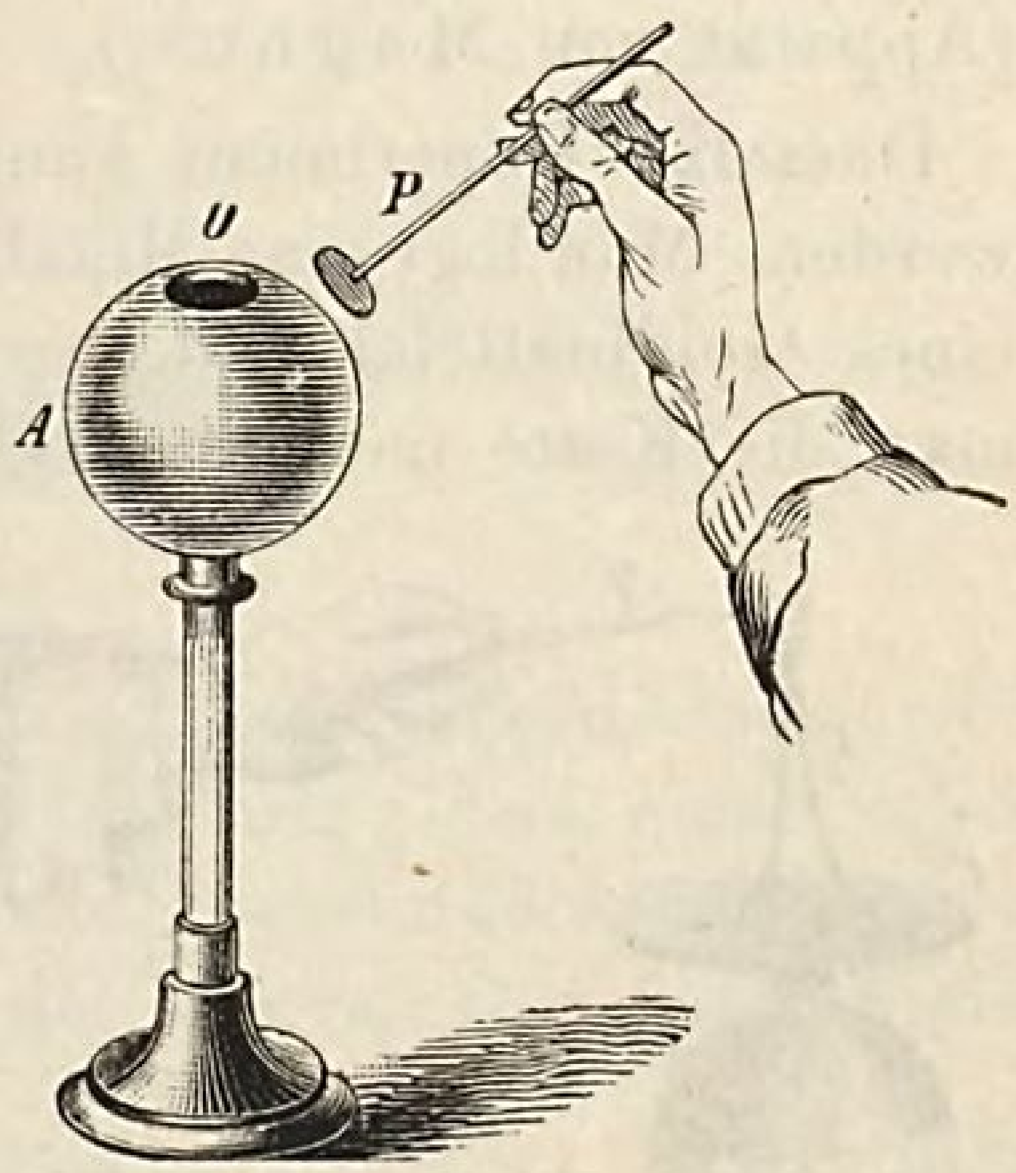


Fig. 21.

3. Ein einfacher hierher gehöriger Vorlesungsversuch [1] ist auch folgender: Ein Goldblattelektroskop mit kugelförmigem Glasgefäße wird in ein großes Becherglas gestellt und mit einer hohlen Kappe aus Blei bedeckt, deren Gewicht bedeutender als der Auftrieb ist, den das Elektroskop in dem mit Wasser gefüllten Cylinderglase erhält. Man gießt anfänglich nur so viel Wasser ein, dass das Niveau desselben einige Millimeter unter dem unteren Rande der Bleikappe bleibt. Man kann den Goldblättchen Elektricität mittheilen und es zeigt sich eine starke Divergenz derselben. Gießt man nun noch so viel Wasser nach, dass dieses den Rand der Bleikappe berührt, so divergieren die Goldblättchen nicht mehr, wenn man das Wasser etwa durch Vertheilung elektrisch macht.

[1] Mach, Carl Rep. 6, 1870.

Es ist also im Innern eines ringsum geschlossenen Leiters keine Elektricität vorhanden.

4. Auf einer Glaswelle rollt man ein langes Stanniolband zusammen, welches zwei leitende Pendel trägt; man elektrisiert das Band, die Pendel divergieren.

Rollt man durch Drehen des Cylinders das Band auf, so nähern sich die Pendel; man rollt es vom neuen zusammen und die Pendel nehmen ihre ursprüngliche Divergenz wieder an. (Apparat von Magnus.)

Dasselbe Experiment kann in einfacherer Weise gemacht werden. Man legt eine Metallkette C (Fig. 22) auf die Scheibe eines Goldblattelektroskopes, welche man elektrisiert. Wenn man die Kette mit einem Glashäkchen hebt, so sieht man die Goldblättchen sich nähern (Lage *a'b'*), und wenn man die Kette zurückfallen lässt, so nehmen die Goldblättchen fast die ursprüngliche Divergenz *ab* wieder an.

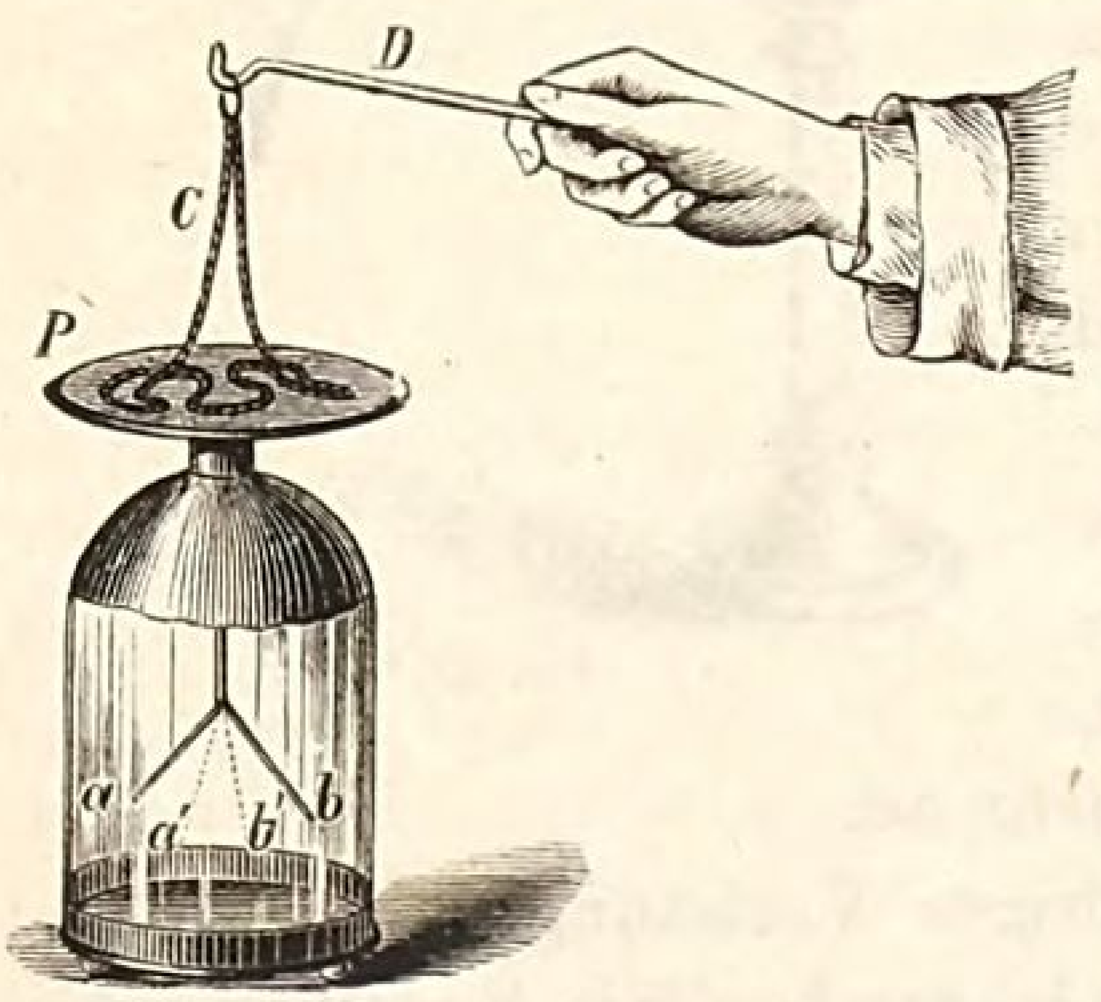


Fig. 22.

Aus diesen Versuchen ersieht man, dass bei constanter Ladung die Elektricitätsmenge, welche sich in einem Punkte eines Körpers vorfindet, umso schwächer ist, je größer seine Oberfläche ist, wobei das Volumen dasselbe bleibt.

5. Es ist sogar nicht einmal nothwendig, dass die Oberfläche des Conductors continuierlich sei, damit sich dieselbe Wirkung zeige; Faraday hat dies durch einige sinnreiche Versuche gezeigt.

Ein kegelförmig geformter Gazesack (Fig. 23), der von einem isolierten kreisförmigen Metalldrahte getragen wird, ist mit zwei Seidenfäden M und N versehen, die an der Spitze befestigt sind und nach beiden Seiten gehen. Man elektrisiert den Sack und findet — wenn man wie früher vorgeht — im Innern keine Elektricität. Man kehrt den Sack mit den Seidenfäden um, die Oberflächen vertauschen ihre Rolle; die neue

äußere Oberfläche ist elektrisiert, währenddem die jetzt auf der Innenseite befindliche Fläche es nicht mehr ist.

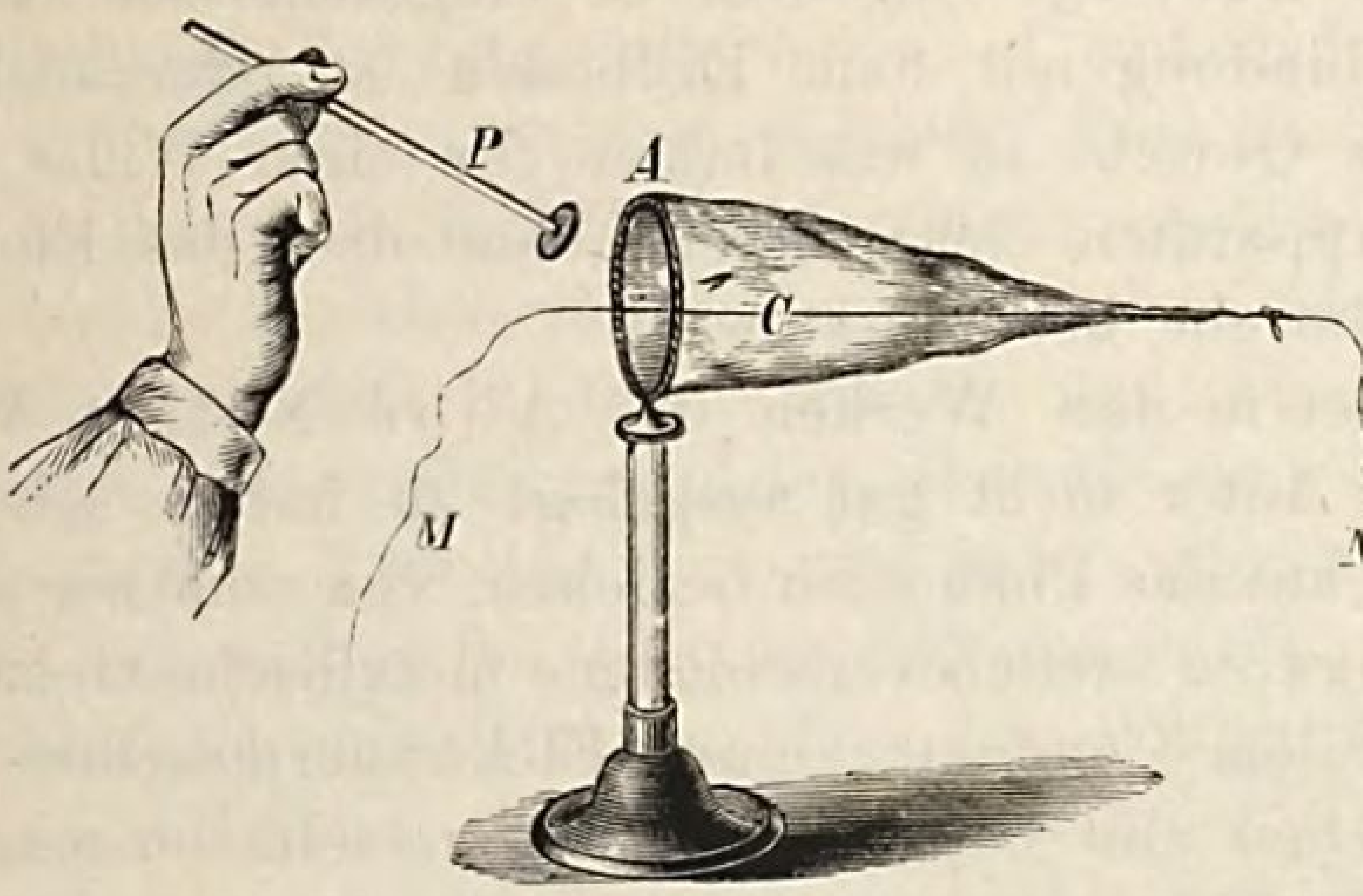


Fig. 23.

Ebenso findet man keine Elektricität im Innern einer cylindrischen Oberfläche C (Fig. 24), die aus einem metallischen Gewebe, das elektrisiert wird, gebildet wird und auf einen isolierenden Träger gestellt ist; auf der äußeren Oberfläche findet man aber Elektricität.

46. Die Eigenthümlichkeit geschlossener leitender Umhüllungen ist noch allgemeiner. Eine solche Oberfläche, die elektrisiert ist, übt keine Wirkung auf irgendeinen Körper aus, der sich in dem Raume befindet, welchen diese Oberfläche einschließt, und sie schützt sogar diesen Körper vor jeder elektrischen Wirkung, die von außen kommt.

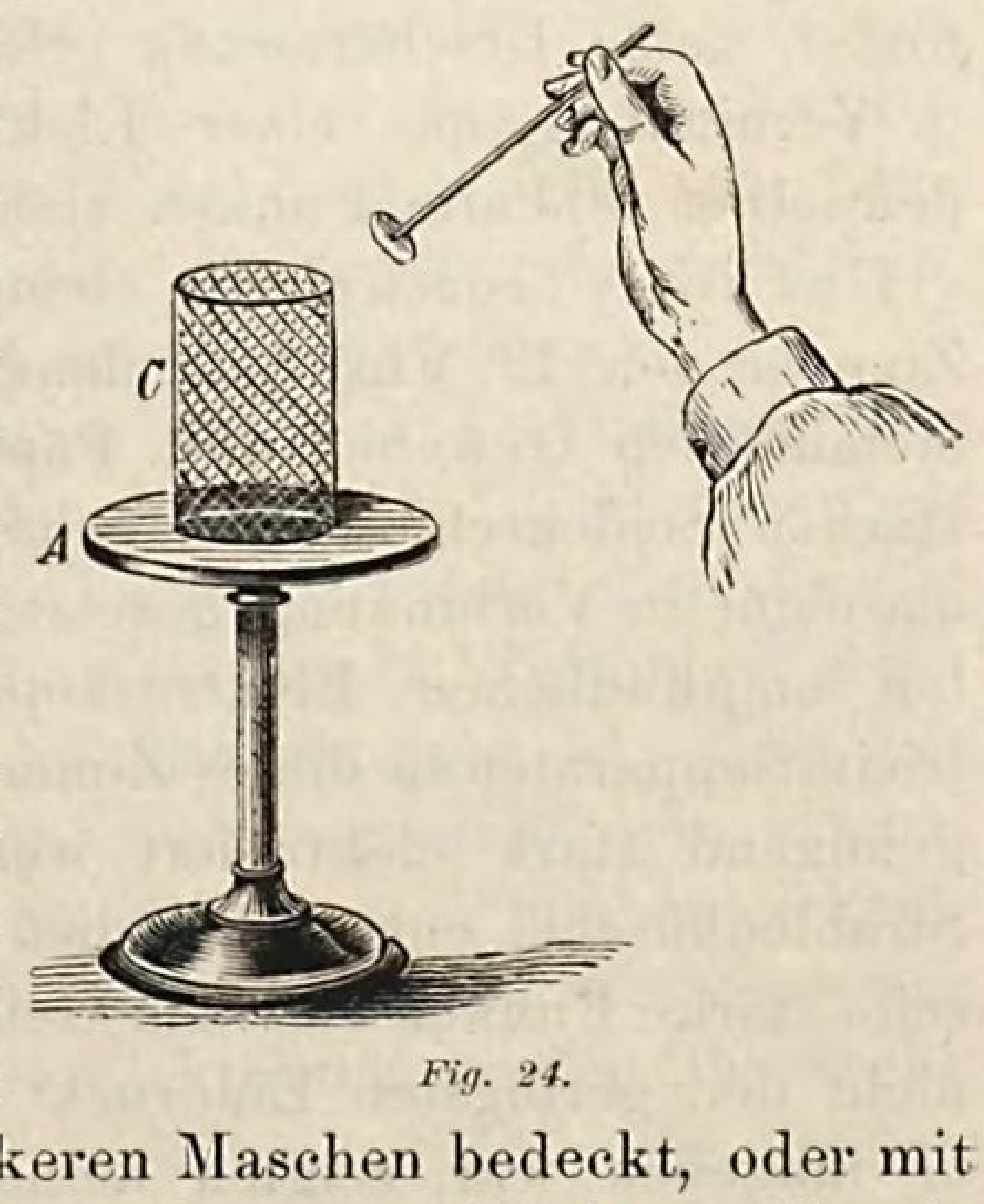


Fig. 24.

Wenn man z. B. ein sehr feines Elektroskop — wie es Faraday gethan hat — mit einem Gewebe aus Baumwolle oder aus Leinen mit sehr lockeren Maschen bedeckt, oder mit einer jener aus Metallgewebe verfertigten Glocken, die als Speisebehälter dienen, oder auch mit einem sehr weitmaschigen

Salatkorb, so wird das Elektroskop gegen die Einwirkung jedes äußeren elektrisierten Körpers vollkommen unempfindlich, ob nun das Gewebe, von dem es eingeschlossen ist, in leitender Verbindung mit dem Erdboden ist oder nicht. Man kann dieses Gewebe in was immer für einer Weise mit den stärksten Apparaten elektrisieren, ohne dass das Elektroskop von dem Gewebe beeinflusst wird.

Man findet in den Werken des Abbé Nollet Versuche, welche der Autor nicht gut ausgelegt zu haben scheint und welche sich auf das Phänomen beziehen, von dem wir sprechen. Gewisse Figuren stellen verschiedene metallische Gehäuse dar, welche mit dem Conductor einer Elektrisiermaschine in Verbindung stehen und Gegenstände der verschiedensten Art, so Pflanzen, Früchte, Thiere u. dgl. einschließen. Man setzt voraus, dass der Versuch im Dunkeln gemacht werde, dann sieht man brillante Strahlenbüschel von allen äußeren eckigen Theilen sich lostrennen, und jeder der in das Gehäuse gestellten Gegenstände erscheint nicht leuchtend.

Faraday hat dieses Experiment auf mannigfaltige Weise reproduciert. Er hat nachgewiesen, dass ein Thier, wie z. B. eine Maus, die sich im Innern eines leitenden Gehäuses befindet, keine Erschütterung erfährt, wenn man dieses Gehäuse in Verbindung mit einer Elektrisiermaschine setzt und aus demselben lebhafte Funken zieht.

Faraday construierte ebenso mit Latten ein cubisches Zimmer von 12 Fuß Seitenlänge und versah die Wände mit metallischen Geweben und Papier. Dieses Gehäuse war an starken Seidenschnüren aufgehängt und mit einer Elektrisiermaschine in Verbindung gesetzt; Faraday schloss sich selbst mit empfindlichen Elektroskopen und verschiedenen Elektricitätsapparaten in dieses Zimmer ein. Nachdem das Gehäuse genügend stark elektrisiert war, so dass es aus allen Seiten Strahlenbüschel entweichen ließ und als man auf der Außenseite starke Funken aus dem Gehäuse zog, verspürte Faraday nicht den geringsten Eindruck und die Apparate, von denen er umgeben war, zeigten keine Spur von Elektricität an.(1)

(1) Faraday, Experimental Researches, t. I., p. 365.

47. Es folgt aus allen diesen Versuchen, dass die Elektricität sich auf der äußeren Oberfläche leitender Körper befindet, wie gering auch sonst die Dicke der Substanz, aus welcher diese Oberfläche besteht, sein möge. Coulomb hat sogar durch den Versuch zu zeigen versucht, dass die Elektricität auf dem Leiter eine Schichte bildet, deren äußere Dicke unmerklich ist; er hat eine elektrisierte leitende Kugel mit einem bloßen Kupferdrahte berührt, sodann mit einem anderen Kupferdrahte, der dem ersten gleich, aber mit einer isolierenden Schellackschichte bedeckt war, und hat nachgewiesen, dass alle beide genau dieselbe Ladung aufnehmen. (1)

Man stellt sich zuweilen vor, dass das elektrische Fluidum den Raum einnehme, der zwischen der äußeren Oberfläche des Leiters und einer anderen inneren Oberfläche, welche der ersten unendlich benachbart ist, liegt; die Theorie zeigt aber an, dass in keinem Punkte innerhalb eines leitenden Mediums Elektricität sich vorfinden kann; es scheint, dass man das elektrische Fluidum als auf der Außenseite der elektrischen Körper befindlich betrachten muss, auf welchen es durch den Druck des umgebenden Mediums erhalten wird. Wie auch immer diese Schichte beschaffen sein mag, die Elektricitätsmenge, welche einem Oberflächenelemente $d\sigma$ entspricht, wird $\varepsilon\rho d\sigma$ sein, wenn die mittlere Dichte dieser Schichte in einem Punkte, in welchem die Dicke der Schichte ε ist, ρ ist: man kann die Elektricitätsmenge durch den Ausdruck $\mu d\sigma$ darstellen, wobei μ die oberflächliche Dichte bezeichnet.

48. Theoretische Folgerungen aus der Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche der Leiter. Die direct mit der Torsionswage angestellten Versuche haben ohne Zweifel festgestellt, dass das Gesetz der elektrischen Wirkungen jenes des umgekehrten Quadrates der Entfernungen ist: aber, mit welcher Sorgfalt die Messungen auch angestellt sein mögen, der Versuchsfehler ist immer genügend groß, und man kann aus diesen Messungen nicht die strenge Giltigkeit des Gesetzes erschließen. Die Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche von Conductoren kann andererseits mit einer sehr großen

(1) Mém. de l'Académie, p. 452 (1786).

Strenge festgestellt werden und sie zieht auch als Folgerung das Gesetz des Quadrates der Entfernungen nach sich. Wir geben im Nachstehenden beinahe wörtlich die Betrachtung Coulomb's an (1).

Betrachten wir zuerst einen homogenen Kegel (Fig. 25) mit der unendlich kleinen Winkelöffnung ω, der aus einer Substanz besteht, die auf die Spitze O des Kegels im umgekehrten Verhältnisse der n^{ten} Potenz der Entfernung wirkt; sei m die Masse des Punktes O, ρ die Masse der Volumseinheit des Kegels. Beschreiben wir vom Punkte O als Mittelpunkt und mit den Radien r und $r+\delta r$ zwei Kugeloberflächen, die unendlich nahe sind, so werden dieselben aus dem Kegel ein Volumelement MN' herausschneiden. Die Wirkung dieses Volumelementes auf den Punkt O wird, wenn man mit φ die Wirkung der Masseneinheit auf eine gleiche Masse in der Entfernungseinheit bezeichnet, ausgedrückt werden durch:

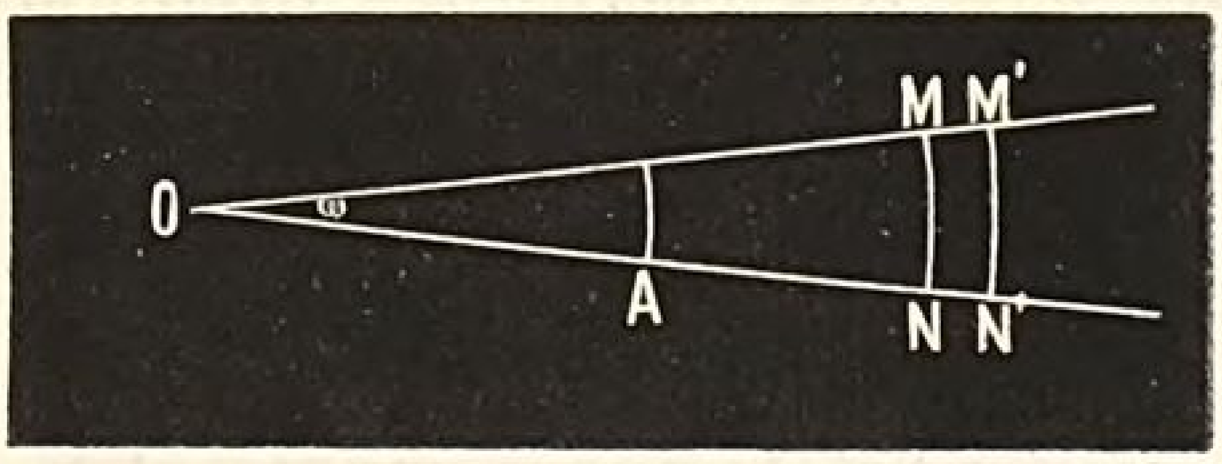


Fig. 25.

$$\varphi \frac{m\rho\omega r^2 \delta r}{r^n} = \varphi m\omega\rho \frac{\delta r}{r^{n-2}};$$

dieser Ausdruck ist die Variation δf der Wirkung f, welche auf den Punkt O von einem Theil des Kegels, der durch eine Kugeloberfläche vom Halbmesser r begrenzt wird, ausgeübt wird. Man hat daher zur Grenze

$$\lim \left(\frac{\delta f}{\delta r}\right) = \varphi m\omega\rho \frac{1}{r^{n-2}} = f'.$$

Die Wirkung jener Schichte, die von einer Kugel mit dem Halbmesser a und einer zweiten mit dem Halbmesser r begrenzt wird, wird sein:

$$f = \varphi m\rho\omega \frac{1}{3-n} [r^{3-n} - a^{3-n}].$$

Wenn $n > 3$ ist, wird das Glied a^{3-n} um so größer, je mehr a sich verkleinert, und convergiert gegen Unendlich, so

(1) Mémoires de l'Académie (1785), p. 587.

dass die Wirkung der dem Punkte O benachbarten Schichten die vorherrschende ist.

Wenn $n = 3$ ist, so ist das Integral dann

$$f = \varphi m \rho \omega \,(\log. r - \log. a),$$

wobei das Zeichen log. den Neper'schen Logarithmus bedeutet; das zweite Glied log. a convergiert wieder gegen Unendlich, wenn a bis 0 abnimmt; die benachbarten Schichten haben noch immer das Übergewicht.

Ist $n < 3$, so kann man $n = 3 - \alpha$ schreiben und es resultiert:

$$f = \frac{\varphi m \rho \omega}{\alpha} (r^\alpha - a^\alpha).$$

In diesem Falle convergiert das Glied a^α immer gleichzeitig mit a gegen Null. Die Wirkung der entfernteren Schichten darf nicht mehr gegen jene der benachbarten Schichten vernachlässigt werden.

Wenn im Speciellen $n = 2$ ist, so hat man einfach:

$$f = \varphi m \rho \omega \,(r - a),$$

d. h. die Wirkung, welche auf die Kegelspitze von einer Schichte, die eine gewisse Dicke $r - a$ besitzt, ausgeübt wird, ist unabhängig von der Entfernung; es wird nämlich die Verkleinerung der Elementarkräfte genau compensiert durch die Zunahme des Querschnittes der Schichte.

Diese Eigenthümlichkeiten wurden mittelst eines Kegels von unendlich kleiner Öffnung erörtert, sie gelten aber ebenso für einen Kegel, dessen Winkelöffnung endlich ist.

Es scheint aus dieser Rechnung zu folgen, dass die Cohäsion und die Adhäsion, welche Kräfte die Erscheinungen der Capillarität hervorrufen, ferner die Elasticität und die chemischen Wirkungen sich nach Gesetzen ändern müssen, in welchen eine höhere als die dritte Potenz der Entfernung vorkommt, weil die am nächsten liegenden Theilchen den überwiegenden Einfluss ausüben.

Man hat bei dieser Betrachtung vorausgesetzt, dass der Kegel homogen sei; die Folgerungen sind aber noch in dem

Falle richtig, in welchem die Dichte in continuierlicher Weise sich ändern wird, wenn sie nur im Punkte O nicht unendlich wird, was physikalisch unmöglich ist.

49. Betrachten wir nun einen elektrisierten leitenden Körper ([1]) und setzen voraus, dass das elektrische Fluidum continuierlich in seiner ganzen Ausdehnung verbreitet sei. Schneiden wir auf diesem Körper eine unendlich kleine Calotte AMB (Fig. 26) ab und nehmen auch auf der anderen Seite des Schnittes ein Volumen AM'B, das zur Calotte symmetrisch ist. Die Kraft, welche auf ein Element des Fluidums, das in der Mitte O des Schnittes AB liegt, wirkt, kann aus drei Theilen bestehend betrachtet werden, der Wirkung f der Calotte AMB, der Wirkung f', welche von dem symmetrischen Volumen AM'B herrührt und selbstverständlich im entgegengesetzten Sinne sich äußert und der Wirkung des übrig bleibenden Volumens. Wenn Gleichgewicht herrschen soll, so muss die Resultierende dieser drei Kräfte Null sein.

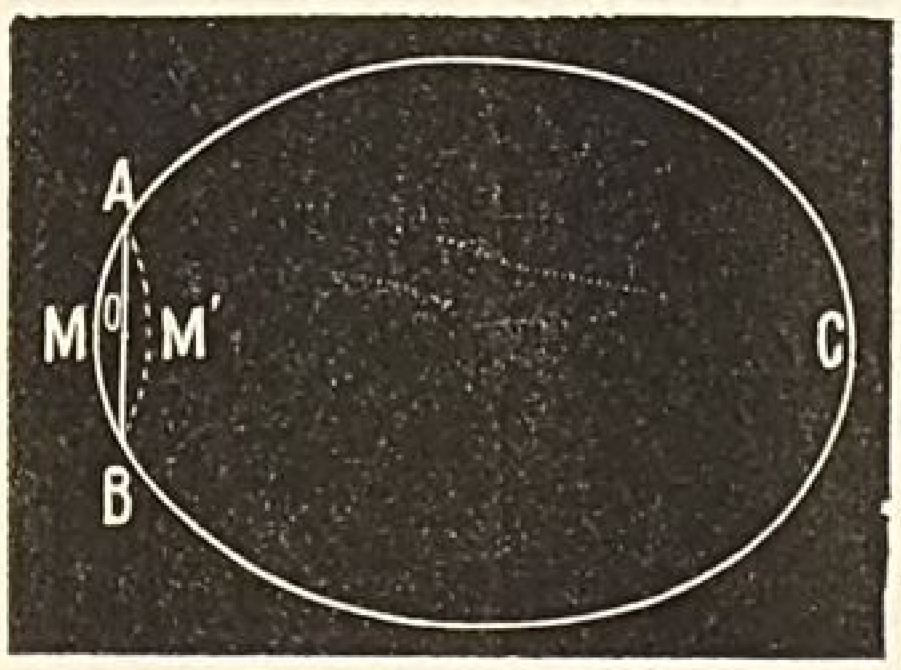


Fig. 26.

Wenn es im Innern des Körpers elektrisches Fluidum gibt, so wird jedenfalls dessen Dichte in stetiger Weise variieren; die beiden Kräfte f und f' müssen unendlich wenig voneinander verschieden sein und ihre Resultante ist unendlich klein im Verhältnis zu jeder von ihnen.

Soll Gleichgewicht möglich sein, so muss daher die Kraft F unendlich klein im Verhältnis zu f' sein, d. h. die am nächsten liegenden Theile üben eine hervorragende Wirkung aus und es variiert die Kraft mindestens im umgekehrten Verhältnisse der dritten Potenz der Entfernung. Wenn im Gegensatze die Kraft umgekehrt proportional einer Potenz der Entfernung ist, die kleiner als drei ist, dann kann die Wirkung der entfernteren Theile nicht mehr vernachlässigt werden und es ist Gleichgewicht nur dann möglich, wenn $f' = 0$ ist, d. h. wenn im Innern des Körpers sich keine Elektricität vorfindet, was dem Experimente entspricht. Man kann somit schließen,

([1]) Mémoires de l'Académie (1786), p. 76.

dass für Elektricität und für jedes Agens, das in analoger Weise sich regelmäßig auf der Oberfläche vertheilt, n kleiner als 3 ist.

50. Um zu zeigen, dass die Kraft genau umgekehrt dem Quadrate der Entfernung proportional ist, wird man sich auf die andere experimentell erwiesene Thatsache stützen, dass auf der inneren Oberfläche eines geschlossenen Conductors keine Elektricität vorhanden ist und dass ein ebensolcher Körper keine Wirkung auf die von ihm eingeschlossenen Körper ausübt.

Suchen wir die Wirkung zu rechnen, welche von einem homogenen Medium PQ (Fig. 27), das zwischen zwei ähnlichen und ähnlich gelagerten Ellipsoiden enthalten ist, auf einen Punkt M, der innerhalb P gelegen ist, ausgeübt wird — unter der Voraussetzung, dass die Elementarkräfte im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Distanz sich ändern.

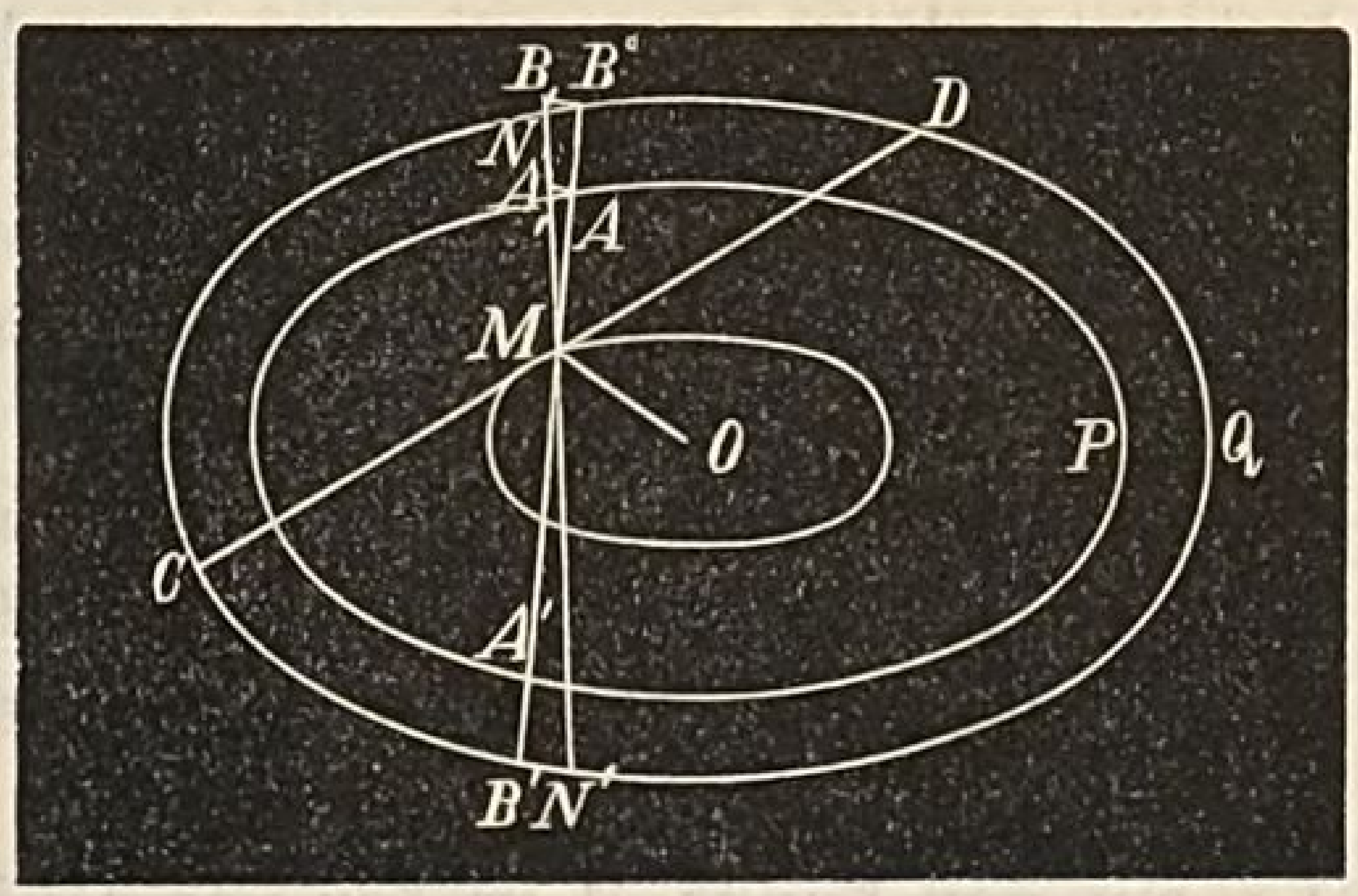


Fig. 27.

Zeichnen wir vom Punkte M als Mittelpunkt einen Kegel mit einer Winkelöffnung, die bezüglich der Entfernung der beiden das Medium begrenzenden Flächen unendlich klein ist.

Die Wirkung, welche das Medium, das den durch den Kegel ausgeschnittenen Raum NA ausfüllt, auf den Punkt M ausübt, kann ersetzt werden durch die Wirkung des Raumes BB_1A_1A, der zwischen der Kegelfläche und den beiden Kugelflächen, die vom Punkte M als Mittelpunkt mit den Radien MA und MB beschrieben wurden, liegt. Es kommt dies darauf hinaus auf der einen Seite ein Volumelement, das unendlich klein in Bezug auf NA ist, hinzuzufügen, auf der anderen Seite ein ebensolches wegzuschneiden. Nun ist die Wirkung des Kegels AB_1 — wie wir gesehen haben — proportional seiner Höhe AB. Wird derselbe Kegel nach der anderen Seite er-

weitert, so schneidet er aus dem Medium ein Volumen A'N' heraus, dessen Wirkung auf den Punkt M der ersten gerade entgegengesetzt und ebenfalls proportional A'B' ist. Da die Theile AB und A'B' der Sehne, welche zwischen den beiden Oberflächen liegen, einander gleich sind, wie man leicht zeigen kann, wenn man in Rücksicht zieht, dass wegen der Confocalität der beiden Ellipsoide

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

ist, wobei a, b, c die Axen des einen, a', b', c' jene des zweiten Ellipsoides bedeuten, so ist die Resultante der Wirkungen, die von den beiden Volumina AN und A'N' ausgehen, Null. Auf diese Weise kann die ganze Schichte in Elemente zerlegt werden, deren Wirkungen zwei zu zwei sich aufheben; demzufolge ist die allgemeine Resultierende Null.

Stellen wir uns andererseits vor, das Gesetz der Wirkungsweise sei ein anderes. Zeichnen wir durch den Punkt M die Ebene CD, welche parallel zur Diametralebene ist, die der Sehne MO conjugiert ist. Wenn die Kräfte rascher als nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernungen variieren, wenn also n größer als 2 ist, so wird die Wirkung des Elementes AN auf den Punkt M größer sein als jene des Elementes A'N'; alle Elemente der Schichte, welche ober der Ebene CD gelegen sind, werden ebenso größere Wirkungen ausüben als jene den ersteren correspondierenden Elemente, welche unter dieser Ebene gelegen sind. Setzt man die Kräfte als abstoßende voraus, so wird die Resultierende der auf den Punkt M ausgeübten Wirkungen nicht Null sein, und eine Richtung unter die Ebene CD besitzen. Wenn andererseits der Exponent n kleiner als 2 ist, so wird man in derselben Weise zeigen, dass die Resultierende wieder nicht Null ist, und dass sie ober die Ebene CD gerichtet ist. In den beiden letzterwähnten Fällen, in welchen die Resultante nicht Null ist, wird daher auf der Innenseite einer geschlossenen leitenden Umhüllung Elektricität vorhanden sein können, und ein ebenso beschaffener Conductor wird auf von ihm eingeschlossene Körper wirken müssen, was den Versuchen von Faraday zuwiderläuft.

51. Gleichwohl können die vorangegangenen Betrachtungen nicht hinreichend erscheinen, weil in ihnen vorausgesetzt wurde, dass die Wirkung zweier Elemente sich nach einer Potenz der Entfernung ändert. Laplace hat nachgewiesen, dass diese Einschränkung nicht nothwendig ist und er hat — ohne eine specielle Form des Gesetzes der Entfernung vorauszusetzen — dargethan, dass die Vertheilung des elektrischen Fluidums auf der Oberfläche der Leiter nur mit dem Gesetze von Coulomb verträglich ist. Die Rechnungen von Laplace erfordern ziemlich ausgedehnte mathematische Entwicklungen, Bertrand(¹) hat aber vor Kurzem eine sehr einfache Darstellung dieser wichtigen Eigenschaft gegeben.

„Sei $\varphi(r)$ die Wirkung, welche von der Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung r ausgeübt wird, und setzen wir $r^2.\varphi(r) = F(r)$; ich behaupte, dass $F(r)$ constant ist. Wenn dies nicht der Fall wäre, so würde sich diese Größe vermehren oder vermindern. Seien r_1 und r_2 zwei so nahe aneinander liegende Grenzen, dass $F(r)$ immer größer wird, wenn r von r_1 zu r_2 sich ändert. Ich nehme eine homogene sphärische Schichte, welche unendlich dünn ist und einen Durchmesser $AB = r_1 + r_2$ besitzt (Fig. 28) und einen Punkt P auf dem Durchmesser AB, so dass $AP = r_1$, $BP = r_2$ ist. Durch diesen Punkt P lege ich eine Ebene RS perpendikulär auf AB, welche die Kugel in zwei Theile RAS und RBS theilt. Ich behaupte, dass der Punkt P infolge der von diesen beiden homogen vorausgesetzten Kugeltheilen nicht im Gleichgewichte bleiben kann. Denn zeichnen wir zwei unendlich kleine Kegel mit der Öffnung $d\omega$, zu entgegengesetzten Seiten der Spitze, welche die Schichte in K und H schneiden; ihre Wirkungen auf P haben die entgegengesetzten Richtungen und werden durch die Ausdrücke:

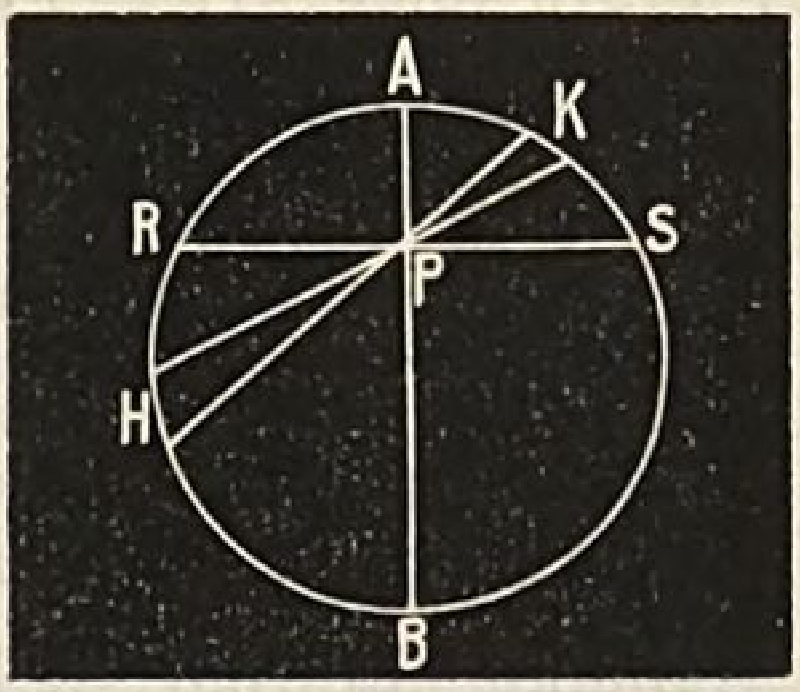


Fig. 28.

$$\frac{d\omega.\overline{PK}^2}{\text{Sin } V_1}\varphi(PK) \text{ und } \frac{d\omega.\overline{PH}^2}{\text{Sin } V_2}\varphi(PH)$$

(¹) Journal de physique, t. II., p. 418 (1873).

dargestellt, wobei V_1 und V_2 die Winkel sind, unter welchen der Kegel die Kugel schneidet. Diese Winkel sind gleich; wenn man daher PK $= \rho_1$ und PH $= \rho_2$ setzt, so verhalten sich die beiden Wirkungen wie $F(\rho_1)$ zu $F(\rho_2)$; aber ρ_1 und ρ_2 liegen zwischen r_1 und r_2; ρ_2 ist größer als ρ_1; daher ist $F(\rho_2)$ größer als $F(\rho_1)$. Alle unterhalb von RS gerichteten Wirkungen überwiegen daher einzeln die entsprechenden aufwärts gerichteten Wirkungen und demzufolge wird der Punkt P hinuntergezogen. Es ist also dieser Punkt nicht im Gleichgewichte und das Gesetz des umgekehrten Quadrates der Entfernung ist das einzige, unter dem die ganze Kugelschichte ohne Wirkung auf die inneren Punkte ist."

52. Experimentelle Bestimmung der Vertheilung der Elektricität. Die Elektricität bildet also eine sehr dünne Schichte auf der Oberfläche der leitenden Körper. Diese Schichte ist nur in dem Falle einer Kugel gleichförmig; in allen anderen Fällen wird man annehmen können, dass diese Schichte in verschiedenen Punkten eine veränderliche Dichte hat, dabei aber die Dicke constant angenommen wird, oder dass die Schichte eine variable Dicke bei gleichförmiger Dichte besitzt, oder dass Dicke und Dichte veränderlich sind. Die Wahl der Hypothese ist vollständig gleichgiltig, da die Dicke äußerst gering sein muss; man wird daher elektrische Ladung in einem Punkte oder elektrische Dichte den Grenzwert des Verhältnisses der Elektricitätsmenge, welche auf einem kleinen, den betrachteten Punkt umschließenden Flächenstücke ausgebreitet ist, zur Größe dieses Flächenstückes bezeichnen. Man gibt zuweilen dieser Größe den Namen „elektrische Spannung", doch ist das Wort Spannung in der Elektricitätslehre wenigstens in drei verschiedenen Bedeutungen im Gebrauche. Man hat so bald die elektrische Dichte oder die Wirkung, welche ein Element der elektrischen Oberfläche auf einen äußeren Punkt ausübt, die in der That der Dichte proportional ist, genannt; bald den Druck, den die auf diesem Oberflächenelemente ausgebreitete Elektricität auf das umgebende Medium ausübt, welcher — wie wir im weiteren Verlaufe sehen werden — dem Quadrate der Dichte proportional ist; bald endlich eine Function von einer ganz verschiedenen Natur, welche lange

schlecht definiert wurde und eine wichtige Rolle in der Theorie der elektrischen Ströme spielt. Es ist daher besser, die Anwendung des Wortes „Spannung" zu vermeiden, wenigstens so lange, als man nicht Sorge trägt, die diesem Worte ertheilte Bedeutung genau anzugeben.

Coulomb hat in einer gewissen Anzahl einfacher Fälle die Art und Weise, wie die Elektricität auf der Oberfläche der Conductoren, die im elektrischen Gleichgewichtszustande sich befinden, vertheilt ist, experimentell bestimmt. Es ist dies überdies ein Problem, dessen Lösung eine directe Consequenz aus dem Gesetze des Quadrates der Entfernungen ist. Die Elektricitätsschichte, welche auf der Oberfläche eines Conductors verbreitet ist, muss der Bedingung genügen, dass ihre Wirkung auf einen beliebigen inneren Punkt des Körpers Null ist. Denn, wäre diese Wirkung nicht Null, so würden zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf die beiden Fluida, das positive und negative, welche das im betrachteten Punkte neutrale Fluidum zusammensetzen, hervorgerufen werden; es würde eine neue Zersetzung und eine Bewegung der elektrischen Fluida resultieren, was der Annahme des Gleichgewichtes widersprechen würde. Die Rechnung bietet im allgemeinen sehr große Schwierigkeiten; Poisson hat das Problem für eine gewisse Anzahl Fälle behandelt und wir werden sehen, dass die Ergebnisse der Theorie völlig im Einklange mit jenen sind, welche Coulomb durch das Experiment erhalten hat.

53. Methode des Probescheibchens. Die experimentelle Methode von Coulomb beruht auf dem Gebrauche des Probescheibchens, d. h. eines kleinen ebenen Conductors, der isoliert ist und mit dem man die Punkte berührt, deren elektrischen Zustand man bestimmen will. Jenes Probescheibchen, dessen sich Coulomb[1] bediente, besteht aus einer Scheibe *e* von Goldpapier (Fig. 29) von 5 bis 6 Linien im Durchmesser und von $\frac{1}{18}$ Linie Dicke; es war dieses Scheibchen an einem Stäbchen *edc* von Schellack, welcher in einer Flamme geschmolzen und in einen Faden von der Feinheit eines Haares

[1] Mémoires de l'Académie (1787), p. 425.

ausgezogen worden war, befestigt; selbst war dieser Stab an einer Röhre *cb* von Glas oder von im Feuer getrocknetem Holze, das mit Schellack überzogen war, getragen. Eine praktische Schwierigkeit, auf welche man Rücksicht nehmen muss, ist die, dass die Schellackfäden nicht vollständig undurchdringlich für Elektricität sind; sie sind es weniger an feuchten, als an sehr trockenen Tagen; ebenso ist die Wahl des Schellacks nicht ohne Einfluss: der weniger helle ist im allgemeinen jener, welcher die besten Dienste leistet. Man untersucht überdies, ob ein Stäbchen aus Schellack genügend isoliert, wenn man mit seiner Spitze einen elektrisierten Körper berührt und es dann in eine Drehwage bringt, deren bewegliche Kugel mit gleichnamiger Elektricität geladen ist; bemerkt man eine merkliche Abstoßung, so muss der Schellack verworfen werden. Wenn man mit einer unvollkommen isolierten Probeplatte abwechselnd zwei sehr ungleich geladene Punkte berührt, wird der Schellack während des zweiten Versuches einen Theil der Elektricität, welche die Probescheibe im ersten Versuche empfieng, behalten können und die Resultate werden anders ausfallen.

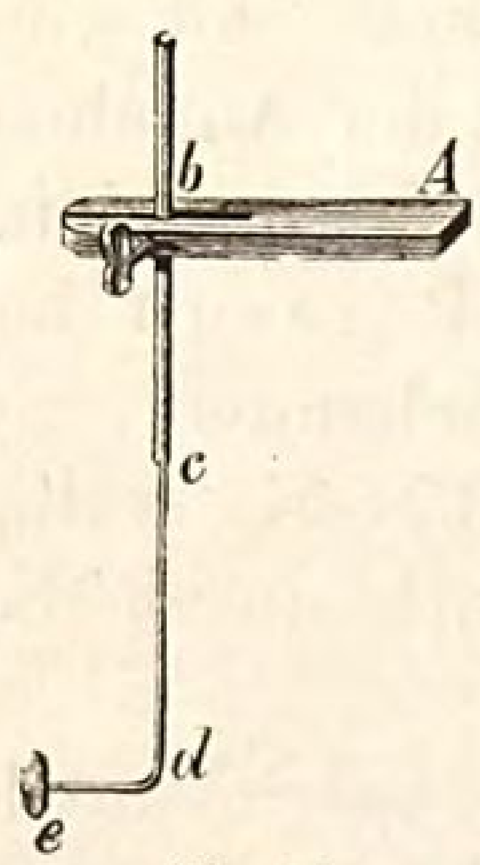


Fig. 29.

Um das Verhältnis der elektrischen Dichten zweier Punkte A und B eines Conductors zu erhalten, geht man in der nachstehenden Weise vor:

1. Man ladet zuerst die bewegliche Kugel einer Drehwage mit Elektricität, welche mit jener des Conductors gleichnamig ist.

2. Man berührt mit dem Probescheibchen den einen der Punkte A und bringt es hierauf in die Drehwage an die Stelle der fixen Kugel. Man sucht die Torsion T, welche man dem oberen Index geben muss, damit die bewegliche Kugel in einer bestimmten Winkelentfernung α ins Gleichgewicht komme.

3. Man bringt das Probescheibchen, nachdem man es zuvor entladen hat, zum zweiten Punkte B, führt es sodann in die Drehwage ein und bestimmt die Torsion T′, welche nöthig ist, um das Gleichgewicht in derselben Winkelentfernung α herzustellen.

Wegen seiner kleinen Dimensionen nimmt das Probescheibchen auf dem Conductor die Ladung auf, welche eine Fläche, die gleich der Fläche des Scheibchens ist, in diesem Punkte besitzt oder wenigstens eine Elektricitätsmenge, die der elektrischen Dichte des Conductors an der berührten Stelle proportional ist. Das Verhältnis der elektrischen Abstoßungen ist gleich $\frac{T + \alpha}{T' + \alpha}$ und dieses Verhältnis ist, wenn kein Elektricitätsverlust stattgefunden hat, gleich jenem der Ladungen der Probeplatte oder dem der elektrischen Dichten in den berührten Punkten. Man hat hierbei aber Folgendes zu bemerken: Wenn das Probescheibchen vollständig an einer Stelle des elektrisierten Körpers anliegt, so geht auf seine Hinterfläche die Elektricität der berührten Körperstelle über; es bildet nämlich bei der Berührung das Scheibchen mit dem elektrisierten Körper einen Conductor. Beim Abheben trennt sich das Scheibchen nie mit allen Punkten gleichzeitig vom Körper; es bildet daher im Trennungsaugenblicke der elektrisierte Körper mit dem Probescheibchen ein stetiges, aber sehr irregulär gestaltetes Leitersystem und es tritt eine Elektricitätsvertheilung ein, die sich von der früheren viel unterscheiden kann. Bei der Entfernung des Scheibchens bleibt die während der letzten Berührung enthaltene Elektricitätsmenge zurück. Weiter hat man in Erwägung zu ziehen, dass das wiederholte Abheben (insbesonders an verschiedenen Stellen eines Leiters) nicht gleichartig ausgeführt werden kann und dass man daher aus den eben besprochenen Gründen nicht strenge die Quantität der auf dem Probescheibchen befindlichen Elektricität jener Elektricität, die an der berührten Körperstelle vorhanden ist, proportional setzen kann. Bei der Berührung von schlechten Leitern ist diese Annahme ohne Bedenken zulässig, weil die Elektricität von der Seite nur langsam zuströmt.

54. Man hat einigemale versucht, dieses Princip, dass die durch das Probescheibchen weggenommene Elektricitätsmenge der elektrischen Dichte im berührten Punkte proportional ist, zu bewahrheiten und zwar durch die folgenden Versuche:

1. Man berührt mit der Probeplatte einen Punkt einer elektrisierten Kugel und bestimmt in gewöhnlicher Weise die

Torsion, welche durch die von dem Scheibchen entführteLadung hervorgerufen wird; man bringt sodann die Kugel in leitende Verbindung mit einer anderen gleichen Kugel, die sich in neutralem Zustande befindet, trennt sodann die beiden Kugeln und berührt die erste neuerdings mit dem Probescheibchen. Die Gesammttorsion des Drahtes ist nun im zweiten Falle um die Hälfte kleiner als im ersten.

2. Man weist nach, dass das Verhältnis der Elektricitätsmengen, welche durch das Probescheibchen in zwei Punkten eines beliebig gestalteten Conductors aufgenommen wurden, unabhängig von der gesammten Ladung ist, ebenso dass das Verhältnis der elektrischen Dichten auch davon unabhängig sein muss.

Aus diesen Versuchen kann man nichts erschließen. Nimmt man an — was evident erscheint — dass das elektrische Gleichgewicht auf einem Conductor nur in einer einzigen Weise stattfinden kann und dass das Gesetz der Elektricitätsvertheilung unabhängig von der Gesammtladung ist, so ist es klar, dass die Probeplatte, die einen elektrisierten Körper in einem Punkte berührt, mit demselben einen Conductor von besonderer Gestalt zusammensetzt; die Elektricitätsmenge, welche sich auf dem Scheibchen vorfindet, ist also der Gesammtladung des Conductors proportional und demzufolge der elektrischen Dichte im berührten Punkte; das ist es allein, was das erste Experiment bestätigt.

In zweiter Linie kann die Ladung des Probescheibchens nur von der Gestalt der Oberfläche an der Berührungsstelle, d. h. von den beiden Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 abhängen; man kann diese Ladung m durch den Ausdruck

$$m = \mu f(\rho_1, \rho_2)$$

darstellen, wo μ die elektrische Dichte ist und f eine unbekannte Function der Krümmungshalbmesser der Oberfläche bedeutet, welche Function auch von den Dimensionen des Scheibchens abhängt. An einer anderen Berührungsstelle wird man in derselben Weise haben:

$$m' = \mu' f(\rho_1', \rho_2')$$

und demzufolge:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{f(\rho_1, \rho_2)}{f(\rho_1', \rho_2')}.$$

Das Verhältnis $\frac{m}{m'}$ ist gleichzeitig mit $\frac{\mu}{\mu'}$ constant, aber diese beiden Verhältnisse sind nicht nothwendigerweise einander gleich.

Überdies wird, wenn das Prüfungsscheibchen sehr klein im Verhältnis zu den Krümmungsradien ist, die Anlegung dieses Scheibchens auf die Oberfläche nicht merklich die Gestalt der Oberfläche verändern, und es ist einleuchtend, dass man als Grenze für eine unendlich kleine Platte haben muss:

$$\frac{f(\rho_1, \rho_2)}{f(\rho_1', \rho_2')} = 1.$$

Die wahre Rechtfertigung der Methode wird daher darin bestehen, dass man das Verhältnis der elektrischen Dichten in zwei Punkten mit Probescheibchen von verschiedenen Größen bestimmt und nachweist, dass man immer das gleiche Resultat erhält, so lange die Dimensionen des Scheibchens unter einer gewissen Grenze liegen.

Maxwell (¹) hat an Stelle eines Probescheibchens die Verwendung einer Probehalbkugel vorgeschlagen. Man kann sich auch einer kleinen metallenen Probekugel bedienen, die an einem Schellackstäbchen befestigt ist. Die Theorie, die wir später besprechen werden, lehrt, dass, wenn man diese kleine Kugel an eine große anlegt, erstere nach der Berührung eine Elektricitätsmenge Q besitzt, die durch die Formel:

$$Q = \frac{a^2}{b} \frac{\pi}{6} e$$

dargestellt wird, wobei a der Radius der Probekugel ist, während b den Radius der großen Kugel und e die auf der Einheit der berührten Oberfläche befindliche Elektricität bedeutet. Es ist somit die auf der kleinen Kugel nach der

(¹) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism., pg. 279.

Berührung befindliche Elektricitätsmenge ihrer Oberfläche proportional.

Hat der berührte Körper nicht die Gestalt einer Kugel, ist er aber in den verschiedenen Richtungen nicht zu verschieden und auch nicht zu stark gekrümmt, so lässt sich immer die zuletzt angegebene Formel anwenden, wobei man sich den Körper an der berührten Stelle kugelförmig gekrümmt (mit dem mittleren Krümmungsradius b) denkt. — Sind die oben erörterten Bedingungen nicht mehr vorhanden, so bietet die Anwendung einer solchen Probekugel keine weiteren Vortheile.

55. Coulomb hat durch das folgende Experiment das Verhältnis, welches zwischen der Ladung des Scheibchens und jener der berührten Oberfläche besteht, zu bestimmen gesucht([1]).

Eine Kugel A von 8 Zoll Durchmesser wurde isoliert und elektrisiert; er berührte sie dann mit einer Kugel B von 1 Zoll Durchmesser und als er diese Kugel in die Drehwage, deren bewegliche Kugel geladen war, einführte, wurde das Gleichgewicht bei einer Gesammttorsion des Drahtes von 144^0 erreicht. Er setzte hierauf die Kugel A in Berührung mit einer ebenen Scheibe von 16 Zoll im Durchmesser und berührte, nachdem er diese beiden Körper auseinander gebracht hatte, neuerdings die Kugel A mit der Kugel B und erhielt in der Drehwage eine Torsion von 47^0. Die Verminderung der Torsion $144^0 - 47^0 = 97^0$ entspricht der von der Scheibe entführten Elektricitätsmenge, so dass im Augenblicke der Berührung das Verhältnis der Ladungen der Kugel und der Scheibe $\frac{47}{97}$ oder ungefähr $\frac{1}{2}$ war. Das Verhältnis der Oberflächen der beiden Körper war ebenfalls $\frac{1}{2}$; es folgt daraus, dass die elektrische Theilung zwischen den beiden Körpern sich proportional der Gesammtoberfläche eines jeden von ihnen vollzieht.

„Ich habe“, sagt Coulomb, „durch eine sehr große Anzahl von Experimenten, welche mit kleineren Scheiben, als die vorhergehende war, angestellt wurden, gefunden, dass dieses Ergebnis sich jederzeit herausstellte; d. h. welches auch immer der Durchmesser der Kugel und jener der Scheibe war, immer vertheilte sich — so oft die Scheibe die Kugel leitend be-

([1]) Mémoires de l'Académie (1788), p. 674.

rührte — die Elektricität der Kugel im Verhältnisse der Summe der Ausdehnung der beiden Oberflächen der Platte zu jener der Kugel. Der Versuch gab insbesonders dann dieses Resultat in einer sehr genauen Weise, wenn die Scheibe, welche mit der Kugel in Berührung gebracht wurde, einen sehr kleinen Durchmesser in Bezug zu jenem der Kugel hatte (1)."

„Wie auch immer die Gestalt des Körpers sein mag, der Versuch lehrt, dass eine kleine Scheibe, die mit diesen Oberflächen in Berührung gebracht wird, immer in dem Augenblicke, in welchem man die Berührung aufhebt, eine Elektricitätsmenge angenommen hat, welche doppelt so groß als jene des Theiles der berührten Fläche ist. Der Versuch gibt dasselbe Verhältnis 2 auch dann, wenn man eine sehr kleine Scheibe mit einer großen elektrisierten Scheibe zur Berührung bringt (2)."

Der Versuch, dessen Einzelnheiten wir angegeben haben, ist so sehr von den Bedingungen, unter welchen man sich des Probescheibchens bedient, entfernt, dass ihm keine beweisende Kraft zukommt. Die anderen Versuche, von denen Coulomb spricht, lassen keine Erörterung zu, weil er die Ergebnisse derselben nicht angegeben hat; es ist wohl schwierig anzunehmen, dass das Probescheibchen eine elektrische Ladung aufnimmt, welche seinen beiden Oberflächen zusammengenommen proportional ist, d. h. welche doppelt so groß wäre als jene, welche auf dem berührten Flächenstücke vorhanden wäre. Der Widerspruch erscheint insbesonders dann offenkundig, wenn es sich um die Berührung einer Scheibe mit einer anderen handelt.

56. Nichtsdestoweniger hat Coulomb diese Eigenthümlichkeit noch durch die nachstehende Betrachtung darzulegen gewünscht:

Wir haben (28) gesehen, dass die Wirkung einer homogenen Kugelschichte auf einen äußeren Punkt A dieselbe ist, als wenn die ganze elektrische Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre. Weiter ist die Wirkung der Schichte DEC (Fig. 30), die von einem die Kugel tangierenden Kegel begrenzt wird, der

(1) Mémoires de l'Académie (1788), p. 675.
(2) Mémoires de l'Académie (1788), p. 676.

seine Spitze in A besitzt, gleich der Wirkung der Schichte DE'C, da der Punkt B zum Punkte A conjugiert ist, und da alle Elemente, welche von Kegeln, die den Punkt B zur Spitze haben, ausgeschnitten werden, auf den Punkt A Wirkungen ausüben, deren zu AO parallelen Componenten zwei zu zwei gleich sind. Die Wirkung der Calotte DEC ist daher die Hälfte der Gesammtwirkung, d. h., wenn man dieselben Bezeichnungen wie oben anwendet und μ hier die elektrische Dichte auf der Oberfläche bedeutet.

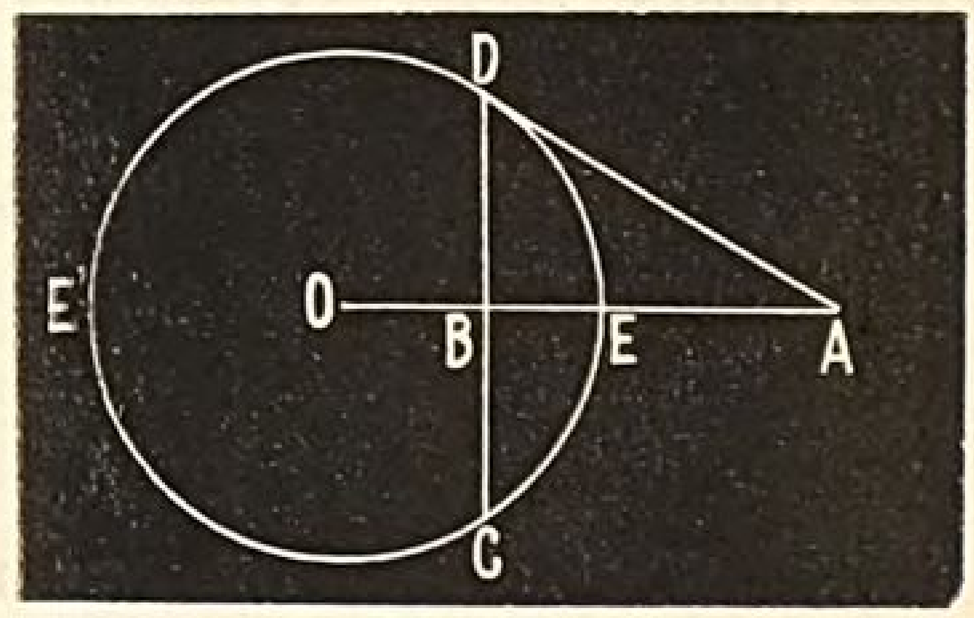


Fig. 30.

$$\varphi m \frac{2\pi R^2 \mu}{(R+d)^2}.$$

Wenn die Distanz d sehr klein ist, oder wenn der Kugelradius immer größer wird, so reduciert sich diese Wirkung auf:

$$\varphi . m . 2\pi . \mu .$$

Dieses Resultat ist unabhängig von dem Kugelhalbmesser, und wird für eine beliebige Oberfläche gelten, wenn nur die Entfernung des betrachteten Punktes sehr klein im Verhältnisse zu den Dimensionen der Calotte ist, welche der durch diesen Punkt gelegte Berührungskegel aus der Oberfläche ausschneiden wird; es gilt auch dieses Resultat dann noch, wenn die Dichte anstatt constant zu sein — wie wir vorausgesetzt haben — von einem Oberflächenpunkte zum anderen variiert.

Endlich ist das Theorem in gleicher Weise noch giltig für eine unendliche Ebene, die mit einer gleichförmigen Elektricitätsschichte bedeckt ist; die Wirkung dieser Ebene auf einen beliebigen Punkt ist auch gleich

$$\varphi . m . 2\pi\mu ,$$

sie ist dieselbe, wie jene eines Oberflächenelementes auf einen unendlich nahen Punkt, wie man übrigens leicht direct zeigen könnte.

57. Betrachten wir nun eine kleine ebene Scheibe *cd* (Fig. 31), deren eine Seite mit einer homogenen Schichte von der Dichte μ' geladen ist und die in einer kleinen Entfernung *ab* von einer Kugel sich befindet, deren elektrische Dichte μ ist. Wenn die Entfernung *ab* genügend klein ist, um dem Übergange der Elektricität keinen Widerstand darzubieten, oder wenn dieser Übergang durch einen kleinen Metalldraht gebildet wird, so muss — wenn Gleichgewicht herrschen soll — die Resultante der Kräfte, welche auf einen Punkt dieses Drahtes wirken, Null sein. Nun ist die Wirkung der Kugel $\varphi.m.4\pi\mu$, jene der Ebene $\varphi.m.2\pi\mu'$. Man muss deshalb haben $\mu' = 2\mu$ oder auch — wenn man will — es wird die elektrische Dichte auf jeder der beiden Flächen der Scheibe *cd* gleich μ sein.

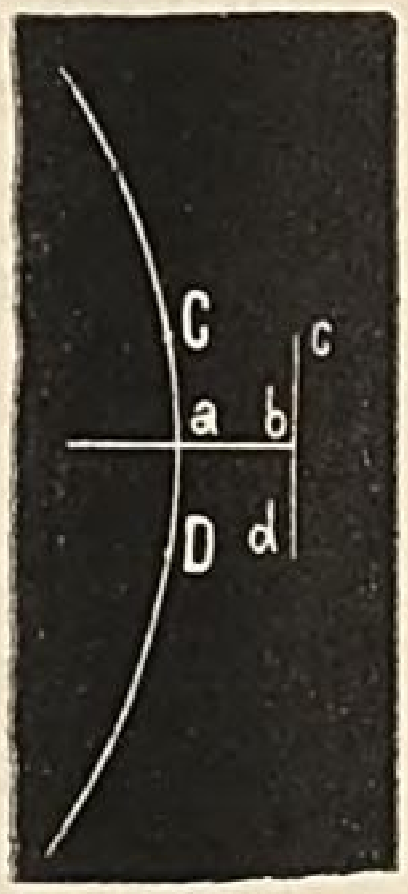


Fig. 31.

Dieser letztere Theil der Coulomb'schen Betrachtungen ist unrichtig, weil im Berührungspunkte der beiden Körper keine Elektricität vorhanden sein kann[1]; die dem Punkte *a* benachbarte Fläche CD ist nicht elektrisiert und die Wirkung der Kugel ist reduciert auf jene des entfernteren Theiles, d. h. auf $\varphi.m.2\pi\mu$; daraus folgt dann $\mu' = \mu$. Nach dem muss die Probeplatte eine Ladung aufnehmen, welche gleich jener ist, die auf dem Oberflächentheile herrscht, an welchem sie angelegt wurde.

Coulomb zeigt überdies in der folgenden Weise, dass im Berührungspunkte der beiden Körper A und B (Fig. 32) keine Elektricität vorhanden sein kann.

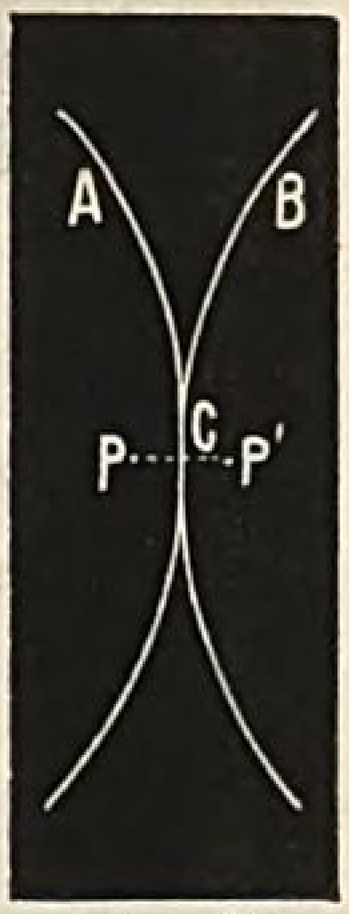


Fig. 32.

Wäre Elektricität auf dem Oberflächenelemente, das den Berührungspunkt C umgibt, so würde die Wirkung f derselben in einem unendlich benachbarten Punkte P endlich sein, wie man zeigen kann, und proportional der elektrischen Dichte auf diesem Elemente; die Wirkung dieses Elementes auf einen

[1] So werden wir später strenge beweisen, dass die Dichte der Elektricität im Berührungspunkte zweier Kugeln Null ist, was übrigens vorausgesehen werden kann, da ja der Contactpunkt als innerer Punkt der Gesammtmasse beider Kugeln anzusehen ist.

auf der anderen Seite gelegenen Punkt P' wird die gleiche sein, aber die entgegengesetzte Richtung haben. Da die Resultierende immer Null sein muss, so würde die Wirkung der entfernten Theile der Conductoren A und B um eine endliche Größe gleich $2f$ variieren, wenn man vom Punkte P zum unendlich benachbarten Punkte P' fortschreiten würde, was augenscheinlich unmöglich ist. Es muss daher die Kraft f Null sein, d. h. es muss die elektrische Dichte in der Nachbarschaft des Berührungspunktes C Null sein.

58. Nach dieser Art der Betrachtung kann man noch andere sehr einfache Resultate ableiten.

Die Wirkung irgendeines elektrisierten Leiters auf einen äußeren unendlich benachbarten Punkt P (Fig. 33) ist die doppelte jener Wirkung, welche das dem Punkte P benachbarte Oberflächenelement auf diesen Punkt ausübt.

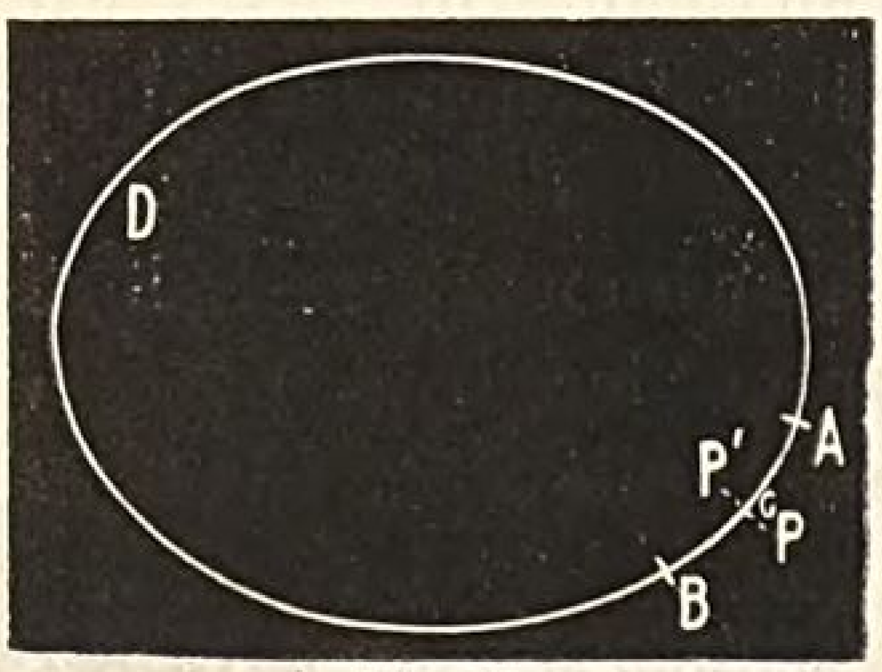


Fig. 33.

Denn auf einen innerhalb des Körpers gelegenen Punkt P' ist die Resultierende der Wirkungen der ganzen elektrischen Schichte Null, die Wirkung des Theiles ADB der Oberfläche ist daher gleich und entgegengesetzt jener des Elementes ACB. Wenn man vom Punkte P' zum Punkte P, der unendlich nahe ist, fortschreitet, ändert die Wirkung von ACB ihr Zeichen, während jene von ADB sich nicht ändert; die Gesammtwirkung in P ist daher doppelt so groß als jene des Elementes ACB.

Nun ist die Wirkung von ACB auf eine äußere unendlich benachbarte Masse m gleich $\varphi . m . 2\pi\mu$, wobei μ die Dichte im Punkte C bedeutet; die gesammte Wirkung ist daher $\varphi . m . 4\pi\mu$, sie ist gleich jener einer gleichförmigen sphärischen Schichte, deren Dichte dieselbe sein wird, wie jene der betrachteten Oberfläche in dem Punkte, der dem angezogenen Punkte am nächsten liegt.

Im Speciellen: die Elektricität, welche auf einem Oberflächenelemente $d\sigma$ des Körpers selbst verbreitet ist, ist $\mu d\sigma$ und die

Wirkung, welche die ganze Schichte auf diese Elektricität ausübt, ist dargestellt durch:

$$\varphi.4\pi\mu.\mu d\sigma = \varphi.4\pi\mu^2 d\sigma.$$

Diese Kraft ist ein Druck, welchen das Fluidum auf das umgebende Medium ausübt, ein Druck, welchem das Gleichgewicht gehalten wird durch einen Druck von Seite dieses Mediums, der dem ersteren gleich und entgegengesetzt ist. Der Druck für die Einheit der Oberfläche wird daher sein:

$$\varphi.4\pi\mu^2;$$

man sieht, dass derselbe dem Quadrate der Dichte proportional ist und dieser Druck ist es, den man zuweilen mit dem Namen der elektrischen Spannung bezeichnet.

Thomson reduciert im Gegensatze hiezu den elektrischen Druck auf $\varphi.2\pi\mu^2$. Er bemerkt, dass eine ebene elektrisierte Oberfläche wegen ihrer Symmetrie auf sich selbst keine normale Wirkung ausüben kann. Ebenso darf die Wirkung eines Elementes irgendeiner Oberfläche auf sich selbst nicht in die darauf errichtete Normale fallen und man darf nur die entfernten Theile in Rechnung ziehen. Diese Betrachtungsweise erscheint genügend glaubhaft, es ist aber in keinem Falle zweifelhaft, dass der Druck dem Quadrate der Dichte proportional ist, weil er der Gesammtladung und jener des Elementes selbst proportional ist.

Thomson(¹) hat die Repulsion gerechnet, welche eine mit Elektricität belegte Kugelfläche auf ein Element derselben ausübt. Bei dieser Berechnung setzen wir voraus, dass $\varphi = 1$ ist, d. h., dass die Wirkung zweier Elektricitätseinheiten in der Entfernung 1 gleich der Krafteinheit angenommen werde.

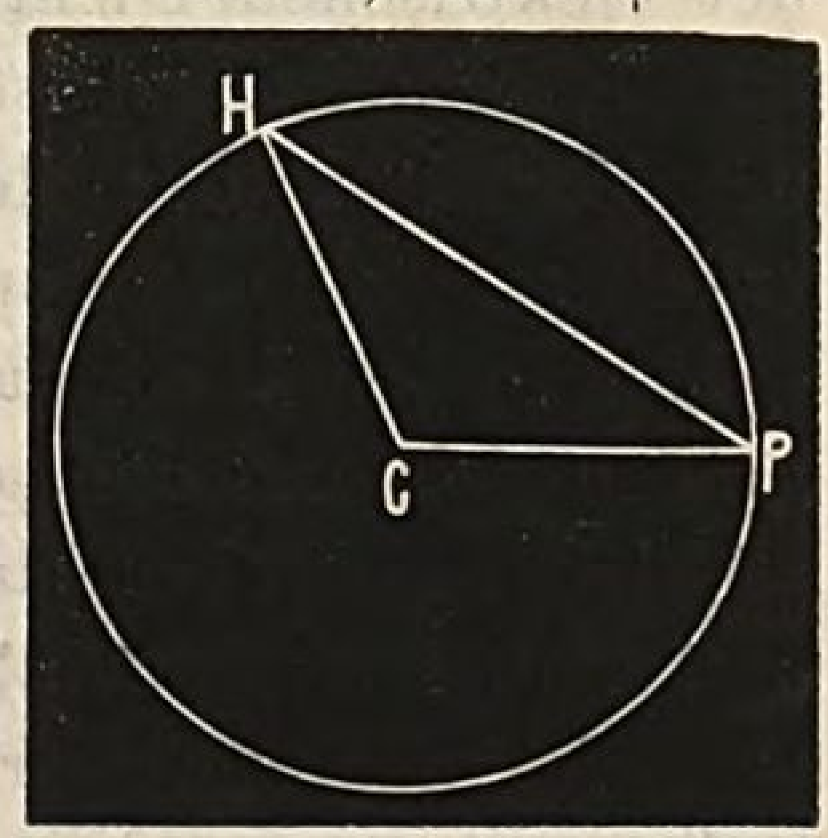


Fig. 34.

Sei σ der Flächeninhalt eines unendlich kleinen, in P liegenden Oberflächenelementes; in einem anderen Punkte H sei ein kleines Element, das vom Punkte P unter dem körperlichen

(¹) Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism. London 1872, pg. 59.

Winkel ω gesehen wird. Der Inhalt dieses Elementes wird gleich sein:

$$\frac{\omega . PH^2}{\cos CHP}.$$

Es werden sich die beiden Elemente in H und P mit einer Kraft abstoßen, die durch die Formel

$$\frac{\mu^2 \omega \sigma}{\cos CHP}$$

dargestellt ist, wenn μ die elektrische Dichte bedeutet. Die gesammte in P herrschende Abstoßung hat die Richtung CP; die Componente der von dem Elemente H herrührenden Abstoßung in dieser Richtung ist $\omega \mu^2 \sigma$.

Construiert man die zu den verschiedenen Elementen der Kugelfläche gehörigen Kegel mit der Spitze in P, so liegen dieselben alle auf derselben Seite der Tangentialebene, die man in P zeichnen kann; es ist dem entsprechend die resultierende Abstoßung auf das Element σ

$$\mu^2 \sigma \Sigma \omega = 2\pi \mu^2 \sigma,$$

somit auf die Flächeneinheit

$$2\pi \mu^2.$$

59. Ohne tiefer in die Einzelnheiten der Erscheinungen einzugehen, welche bei der Berührung des Probescheibchens stattfinden, ist man berechtigt, den Grundsatz anzunehmen, dass die Probeplatte eine Elektricitätsmenge aufnimmt, welche der elektrischen Dichte des Punktes, auf welchen sie gesetzt wurde, proportional ist; um aber mit genügender Genauigkeit das Verhältnis der elektrischen Dichten in zwei Punkten zu erhalten, muss man specielle Vorsichtsmaßregeln gebrauchen.

Man arbeitet, so gut es möglich ist, mit Conductoren von großen Dimensionen, damit das Probescheibchen selbst nicht zu klein zu sein braucht und ansehnliche elektrische Ladungen annimmt, selbst dann, wenn die Dichte ziemlich schwach ist, was wegen des Elektricitätsverlustes jederzeit besser ist. Man isoliert diese Conductoren entweder dadurch, dass man sie an Seidenfäden aufhängt, die mit Schellack überstrichen sind,

oder — wie es die Coulomb entlehnte Figur 56 zeigt — indem man die Conductoren auf Füße von Schellack setzt.

Bei jeder Berührung entnimmt das Probescheibchen dem Conductor eine bestimmte Elektricitätsmenge. Dieser Verlust kann im allgemeinen vernachlässigt werden, man eliminiert ihn aber vollständig, wenn man dafür Sorge trägt, dass man die Probeplatte nicht berührt, bevor man sie vom neuen auf den Conductor anlegt, so dass die gesammte Ladung des letzteren keine Änderung erfährt.

60. Correction wegen der Elektricitätszerstreuung. Die schwerwiegendste Fehlerquelle ist die Elektricitätszerstreuung, die während der aufeinander folgenden Versuche stattfindet; Coulomb corrigierte dieselbe durch die Methode der alternativen Versuche, indem er auf folgende Weise vorgieng. Man berührt eine Stelle A des Körpers, bringt das Probescheibchen in die Drehwage, deren bewegliche Kugel ursprünglich mit gleichnamiger Elektricität geladen worden war; man erhält sodann das Gleichgewicht der Kugel in einer gewissen Winkeldistanz bei einer Gesammttorsion A_0. Dasselbe Experiment wird nun für den Punkt B wiederholt: man erhält in derselben Weise die Torsion B_0. Man bringt hierauf das Probescheibchen zum ersten Punkt A zurück und findet eine neue Torsion A_1, welche kleiner als A_0 ist. Diese verschiedenen Zahlen zu zwei und zwei verglichen liefern nicht das Verhältnis der Ladungen in den beiden Punkten A und B wegen der Elektricitätszerstreuung, welche von einem zum anderen Versuche stattfindet; wenn aber die Versuche rasch aufeinander gemacht werden und wenn die Beobachtungen nahezu aequidistant sind, so kann man annehmen, dass das arithmetische Mittel $\frac{A_0 + A_1}{2}$ jene Torsion ist, welche man für den Punkt A erhalten würde, wenn der Versuch zur selben Zeit gemacht worden wäre, wie der im Punkte B angestellte. Die Verringerung der Torsionen, die sich auf einen und denselben Punkt beziehen, ist eine Wirkung, die zusammengesetzt ist aus jener, welche vom Elektricitätsverluste des Körpers selbst, ferner der Probeplatte und endlich der beweglichen Kugel der Drehwage selbst herrührt. Wenn aber die Träger gut isolierend sind, dann sind

alle diese Verluste der Zeit proportional, die Torsionen, welche sich auf einen und denselben Punkt beziehen, variieren ebenfalls proportional der Zeit, und die Torsion zu einer gewissen Zeit ist das arithmetische Mittel von jenen, welche man zu zwei anderen Zeiten erhalten würde, welche gleich weit von der ersten abstehen.

Wie auch immer der Elektricitätsverlust zustande komme, wenn er nur langsam ist, so corrigiert man ihn in vollständiger Weise mittelst der Methode der alternativen Versuche. Man kann dies überdies verificieren, wenn man mehrere alternative Versuche in den beiden Punkten A und B wiederholt und auf diese Weise für diese Stellen die successiven Torsionen A_0, A_1, A_2 . . . B_0, B_1, B_2 bestimmt; wenn man irgend drei aufeinander folgende Versuche vergleicht, so kann man nachweisen, dass man eine Reihe von gleichen Verhältnissen erhält:

$$\frac{\frac{A_0 + A_1}{2}}{B_0} = \frac{A_1}{\frac{B_0 + B_1}{2}} = \frac{\frac{A_1 + A_2}{2}}{B_1} = \dots$$

Wir werden diesbezüglich mehrere Beispiele erwähnen, welche den Coulomb'schen Versuchen entlehnt sind.

61. Die Nothwendigkeit, äquidistante Beobachtungen zu machen, kann als eine mühevolle Arbeit wegen der Schwingungen der beweglichen Nadel erscheinen; in Wirklichkeit aber erhält man, wenn man dem Aufhängedrahte mittelst des oberen Index kleine Torsionen in dem einen und anderen Sinne ertheilt, wobei man die Schwingungen der Nadel umkehrt, bald das Gleichgewicht in der gewünschten Entfernung und man ist fast Herr der Zeit der Beobachtungen.

Gleichwohl kann man sich an diese Bedingung nicht binden; Coulomb hat sie überdies niemals außeracht gelassen. Nehmen wir z. B. an, dass die aufeinander folgenden Ablesungen A_0, B_0 und A_1 in den Zeiten 0, t und t' gemacht worden wären. Das Zeitintervall t' ist genug klein, dass man den Verlust an Elektricität proportional der Zeit ansehen kann; man sieht dann ein, dass der Torsionsverlust in der Zeiteinheit für die Versuche, welche sich auf den Punkt A beziehen,

$\frac{A_0 - A_1}{t'}$ ist; während der Zeit t wird er daher sein $(A_0 - A_1)\frac{t}{t'}$. Würde man daher die auf den Punkt A bezügliche Beobachtung zur Zeit t gemacht haben, also gleichzeitig wie jene auf den Punkt B bezugnehmende, so würde die Gesammttorsion $A_0 - (A_0 - A_1)\frac{t}{t'}$ gewesen sein, so dass das Verhältnis der elektrischen Dichten der beiden Punkte dargestellt ist durch den Ausdruck:

$$\frac{A_0 - (A_0 - A_1)\frac{t}{t'}}{B_0}.$$

Coulomb hat zuweilen die Probescheibchen durch kleine Kugeln ersetzt und er hat mit letzteren genau dieselben Resultate erhalten. Es ist einleuchtend, dass das Princip des Probescheibchens auf sie anwendbar ist, und dass ein sehr kleiner Körper von was immer für einer Gestalt, wenn er mit einem elektrisierten Conductor in Berührung gebracht wird, in jedem Punkte eine Elektricitätsmenge aufnimmt, welche der entsprechenden Dichte proportional ist.

62. Anwendung zweier Probekörper. (Methode der gepaarten Probekörper.) Riess hat ein wenig die Methode von Coulomb geändert, indem er gleichzeitig zwei Probekörper, sei es identische Probescheibchen oder identische Probekugeln anwendet; man braucht dann nur einmal den Conductor, den man studiert, berühren.

Nehmen wir zunächst an, man habe die elektrische Identität der zwei Probekugeln nachgewiesen. Man setzt sie gleichzeitig auf zwei Punkte eines elektrisierten Conductors an, die Kugel a im Punkte A und die Kugel b in B. Man gibt nun die Kugel b beiseite und hängt sie in das Innere einer der Torsionswage an Größe gleichen Glasglocke dergestalt, dass sie keinerlei äußeren Wirkung unterworfen ist; die Kugel a führt man in die Drehwage, deren bewegliche Kugel geladen ist, ein und man erhält eine Torsion A_0; man thut dann dasselbe mit der Kugel b und beobachtet eine Torsion B_0; man dreht ein wenig den Draht zurück und wartet, bis die Nadel zur selben Stelle zurück-

kehrt; die Torsion ist dann nur mehr B_1. Dieser letzte Versuch gestattet die Bestimmung des Elektricitätsverlustes.

Die Beobachtungen wurden zu den Zeiten o, t und t' angestellt; man erkennt, dass der Torsionsverlust, der sich auf die Kugel b bezieht, in der Zeiteinheit $\frac{B_0 - B_1}{t' - t}$ ist, und dass während der Zeit t derselbe $(B_0 - B_1)\frac{t}{t'-t}$ gewesen wäre, eine Größe, welche man zur Torsion B_0 hinzufügen muss, um jene Torsion zu erhalten, welche man beobachtet haben würde, wenn man mit der Kugel b zur selben Zeit wie mit der Kugel a gearbeitet hätte. Das Verhältnis der elektrischen Dichten an den beiden Stellen A und B ist daher:

$$\frac{A_0}{B_0 + (B_0 - B_1)\frac{t}{t'-t}}.$$

Sind die beiden Kugeln identisch und wechselt man ihre Rollen, berührt also den Punkt A mit der Kugel b und B mit a, so muss man dasselbe Verhältnis wie im ersten Falle erhalten. Sind die Probekörper nicht ganz gleich, so kann man durch Vertauschung derselben ihre Ungleichheiten eliminieren.

Es ist auch gut, die Probekörper alternierend verschieden lange Zeit in die Drehwage zu bringen, um dadurch den Elektricitätsverlust während des Aufbewahrens bis zum Versuche zu eliminieren; dieser Verlust wird im allgemeinen nicht derselbe sein wie in der Drehwage.

Riess hat die Identität der beiden Prüfungskörper der Scheiben oder der Kugeln nachgewiesen, indem er sie gleichzeitig auf den Knopf einer Leydnerflasche anlegte. Er hat in dieser Weise für zwei Probescheibchen successiv die Verhältnisse [1]

$$\frac{250{\cdot}8}{246} = 1{\cdot}02$$

$$\frac{233}{234{\cdot}3} = 0{\cdot}99$$

(1) Reibungselektricität, Bd. I., p. 137.

erhalten; für zwei Probekugeln erhielt er:

$$\frac{93}{92{\cdot}5}=1{\cdot}005,$$

$$\frac{175}{175{\cdot}3}=0{\cdot}998.$$

Diese Verhältnisse sind der Einheit so nahe, wie man es nur erwarten kann. Riess fügt hinzu, dass die beiden Prüfungskörper, Kugeln oder Scheiben, in allen Fällen mit ebensoviel Bequemlichkeit und Genauigkeit angewendet werden können, wie die Scheibe von Coulomb; er behauptet aber nicht, dass seine Methode den Vorzug verdiene; sie scheint in der That nicht die bessere sein zu sollen. Die zweite Probekugel, von der man sich, während man mit der ersten experimentiert, nicht frei machen konnte, kann nur unbequem sein; die beiden Kugeln können niemals absolut identisch sein, besonders wenn man an die Schwierigkeit, gleichmäßig isolierende Stützen zu finden, denkt; ferner wendet man den Zerstreuungscoefficienten, welcher durch die beiden letzten Versuche erhalten wurde, auf das Intervall der beiden ersten an, d. h. außerhalb jener Grenzen, innerhalb welcher er bestimmt wurde. Endlich ist die Anordnung einer Reihe von alternativen Versuchen nicht so bequem, als die Versuchsart von Coulomb.

Die erwähnte Modification von Riess bietet einen wirklichen Fortschritt in dem Falle, in welchem man die Elektricitätsvertheilung auf einem Körper bestimmen will, dessen elektrischer Zustand sehr variabel ist, wie z. B. auf einem Conductor einer in Bewegung gesetzten Elektrisiermaschine oder auf einem Leiter, dessen Elektricitätsverlust sehr rasch vorsichgeht; berührt man gleichzeitig zwei Punkte eines solchen Conductors, so wird man ein Ergebnis erhalten, welches von den Änderungen, die der Conductor erfahren kann, unabhängig sein wird. Die Methode von Coulomb wäre dann nicht mehr anwendbar.

63. Verschiedene Methoden, das Verhältnis der elektrischen Dichten zweier Punkte und die Theilung der Elektricität unter zwei Leitern zu bestimmen. Man hat bis jetzt immer vorausgesetzt, dass die bewegliche Nadel der Drehwage ursprünglich mit Elektricität geladen worden war, welche das-

selbe Zeichen, wie jene des Körpers, den man studierte, hatte. Der Nutzen dieser Vorsicht ist der, dass man stärkere Abstoßungen erhalten kann, und dass die erhaltenen Torsionen den Ladungen des Probescheibchens, d. h. den elektrischen Dichten der berührten Stellen direct proportional sind.

Man kann indessen in anderer Weise vorgehen, wenn man jedesmal die bewegliche Kugel in den neutralen Zustand versetzt und sie mit dem Probescheibchen selbst elektrisiert. Bezeichnet man mit q die Ladung des Probescheibchens, nq den Bruchtheil dieser Ladung, welchen die bewegliche Kugel aufnimmt, so bleibt auf dem Scheibchen $q\,(1-n)$, so dass die gesammte Torsion proportional $nq(1-n)\,q = q^2(1-n)n$, d. h. proportional dem Quadrate der Ladung des Probescheibchens sein wird. Demzufolge wird das Verhältnis der Dichten in den beiden berührten Punkten gleich der Quadratwurzel aus dem Verhältnisse der Torsionen, welche man bei dieser Art des Vorganges erhalten wird, sein. Diese Methode wird die allein anwendbare in dem Falle sein, in welchem die beiden Stellen, deren elektrische Dichten man vergleichen will, entgegengesetzte Elektricitätsmengen besitzen.

Endlich wird man auch nicht jedesmal gezwungen sein wollen, die bewegliche Kugel immer in dieselbe Entfernung zurückzubringen. Wenn die Probeplatte in die Drehwage eingeführt worden ist, würde man einfach die Winkelentfernung α bestimmen, in welcher die bewegliche Nadel sich im Gleichgewichte erhält; die Abstoßung der beiden Körper in der Einheit der Entfernung würde dann sein:

$$4lc\alpha \sin\frac{\alpha}{2}.\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Wenn die bewegliche Kugel ursprünglich geladen war, so ist das Verhältnis der elektrischen Dichten in den beiden Punkten, welche zu den Ablenkungen α und β Veranlassung geben:

$$\frac{\alpha.\ \sin\frac{\alpha}{2}.\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\beta.\ \sin\frac{\beta}{2}.\ \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}.$$

Wenn andererseits die bewegliche Kugel jedesmal mit dem Probescheibchen geladen und dann in den neutralen Zustand gebracht wird, so muss man die Quadratwurzel dieses Bruches nehmen, um das Verhältnis der Dichten zu erhalten.

Diese letztere Methode kann sehr schnell in Anwendung gebracht werden, sie liefert aber nicht dieselbe Gewähr für die Richtigkeit. Will man diese Methode in einer Reihe von Untersuchungen anwenden, so wird man gut thun, noch den Apparat auf experimentellem Wege zu graduieren, indem man dem Probescheibchen eine Reihe von Ladungen ertheilt, welche immer in dem Verhältnis von 1 : 2 stehen werden, und eine Tafel der entsprechenden Ablenkungen sich anlegt.

64. Wenn zwei elektrisierte Conductoren in Berührung sind, so kann man mittelst des Probescheibchens die Vertheilung der Elektricität auf jedem von ihnen bestimmen und demzufolge das Verhältnis der gesammten Elektricitätsmengen angeben, welche diese beiden Körper besitzen. Das Problem ist aber viel einfacher, wenn man nur das Verhältnis der Ladungen zu bestimmen sucht, d. h. die Theilung der Elektricität unter die beiden Conductoren.

Zu diesem Behufe wird der eine der Conductoren A allein elektrisiert, man bringt die Probeplatte in einem Punkte P an und stellt sie in die Drehwage, deren bewegliche Kugel mit derselben Elektricität geladen ist; man erhält für einen gewissen Ausschlag eine Gesammttorsion T. Man berührt hierauf den Conductor A mit dem anderen Conductor B, entfernt diesen letzteren, und erhält, nachdem man die Probeplatte in demselben Punkte P des Leiters A aufgelegt hat, eine neue Torsion T'. Das Verhältnis $\frac{T}{T'}$ ist gleich dem Verhältnisse der Dichten in demselben Punkte P und daher auch gleich dem Verhältnisse der Elektricitätsmengen M und M', welche der Körper A vor und nach der Berührung mit B besitzt. Dieser letztere Leiter hat beim Contacte die Ladung M — M' erhalten. Nun erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{T}{T'} = \frac{M}{M'}$$

$$\frac{T'}{T - T'} = \frac{M'}{M - M'}.$$

Dies ist also das Verhältnis der Elektricitätsmengen der beiden Conductoren A und B, wenn sie in Berührung gebracht worden sind.

65. Coulomb hat öfters eine Methode in Anwendung gebracht, die sich von der beschriebenen ein wenig unterscheidet. Anstatt die elektrische Dichte in einem Punkte des einen Leiters A auszuwerten, führt er diesen Leiter selbst in die Drehwage an die Stelle der fixen Kugel ein und bestimmt die Torsion, die nothwendig ist, um die zu Beginn des Versuches geladene

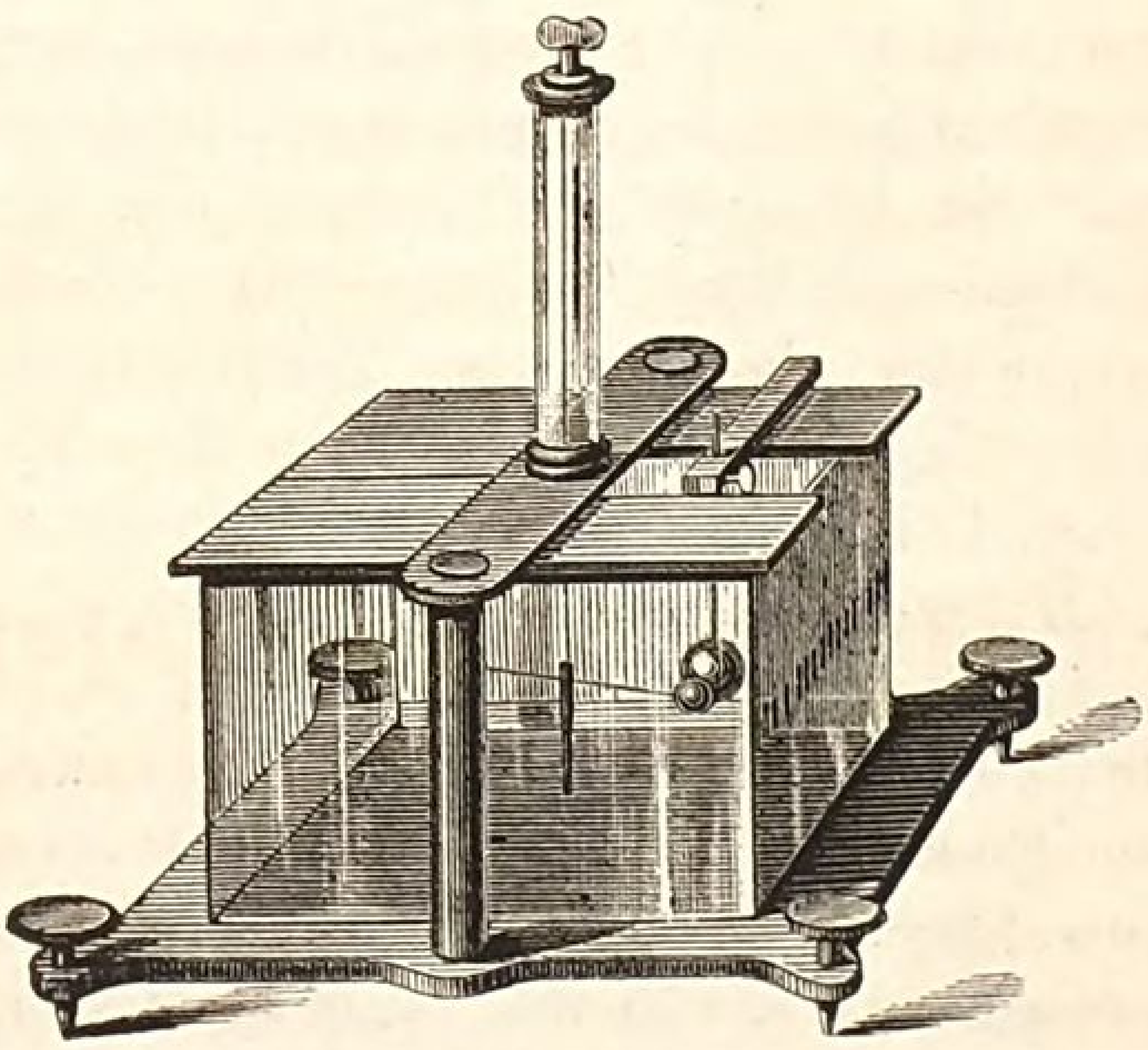


Fig. 35.

Nadel in eine bestimmte Entfernung zu bringen. Er entfernte dann diesen Conductor, brachte ihn einen Augenblick mit dem Conductor B in Berührung, brachte dann den ersteren in die Drehwage zurück und machte eine zweite Beobachtung. Das Verhältnis der auf diese Weise erhaltenen Torsionen T und T' ist wieder gleich dem Verhältnisse der Elektricitätsmengen M und M' des Leiters A vor und nach seiner Berührung mit dem zweiten Conductor und das Verhältnis der auf den beiden in Berührung befindlichen Conductoren A und B angesammelten Elektricitätsmengen ist:

$$\frac{T'}{T - T'}.$$

Für diese Art von Versuchen bediente sich Coulomb einer größeren Drehwage (Fig. 35), welche ihm gestattete, Metallkugeln von vier Zoll im Durchmesser einzuführen und stärkere Metalldrähte, z. B. Kupferdrähte (Nr. 12 im Handel) anzuwenden.

Das Gehäuse dieser Drehwage war viereckig und aus Spiegelgläsern von 2 Fuß Länge auf 15 bis 16 Zoll Höhe gebildet, welche in trockenes Holz gefasst waren; dieses Gehäuse war von Glasplatten überdeckt, welche beweglich waren, um mehr oder weniger große Öffnungen zu lassen. Die Glasröhre, welche das Mikrometer trug und der Metalldraht wurde von einem Querstücke aus Holz, das mit der Basis verbunden war, getragen; eine Theilung, welche gleichen Centriwinkeln entspricht, ist auf der einen Seitenfläche des Gehäuses entworfen. Man erkennt leicht, wie sich die Versuche veranstalten lassen.

Beispiele der Vertheilung der Elektricität.

Es ist nur eine kleine Anzahl von Versuchen gemacht worden, um die Vertheilung der Elektricität auf einem einzigen Körper zu bestimmen; die Rechnung bietet überdies unübersteigbare Schwierigkeiten, wenn die Form der Körper nicht äußerst einfach ist.

66. Kugel und Ellipsoid. Es ist klar, dass in dem Falle einer Kugel die Vertheilung der Elektricität auf derselben zufolge der Symmetrie eine gleichförmige sein muss.

Man weiß, dass eine homogene Schichte, die zwischen zwei concentrischen und homothetischen Ellipsoiden liegt, keine Wirkung auf einen inneren Punkt ausübt; eine solche Schichte von sehr kleiner Dicke, die auf der Oberfläche eines Ellipsoides sich befindet, kann daher dazu dienen, um die Vertheilung der Elektricität auf dem Ellipsoide darzustellen. Die elektrische Dichte in einem Punkte P (Fig. 36) ist der Dicke PN der Schichte in diesem Punkte proportional, d. h. der Entfernung

HH' der beiden Tangentialebenen, die durch die zwei homologen Punkte P und P' der beiden Schichten gelegt werden. Sei $1 + \alpha$ das Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Oberflächen, wobei α sehr klein ist, p das Perpendikel OH, welches vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die Tangentialebene, die durch P gelegt ist, gefällt wurde, dann ist HH' gleich $p\alpha$ und die Dichte μ im Punkte P ist

$$\mu = K.p\alpha.$$

Bezeichnet man mit a, b, c die Halbaxen des Ellipsoides, so ist das Volumen der Schichte:

$$\frac{4}{3}\pi abc\,[(1+\alpha)^3 - 1],$$

oder nahezu $4\pi abc\alpha$. Die gesammte Elektricitätsmenge ist daher

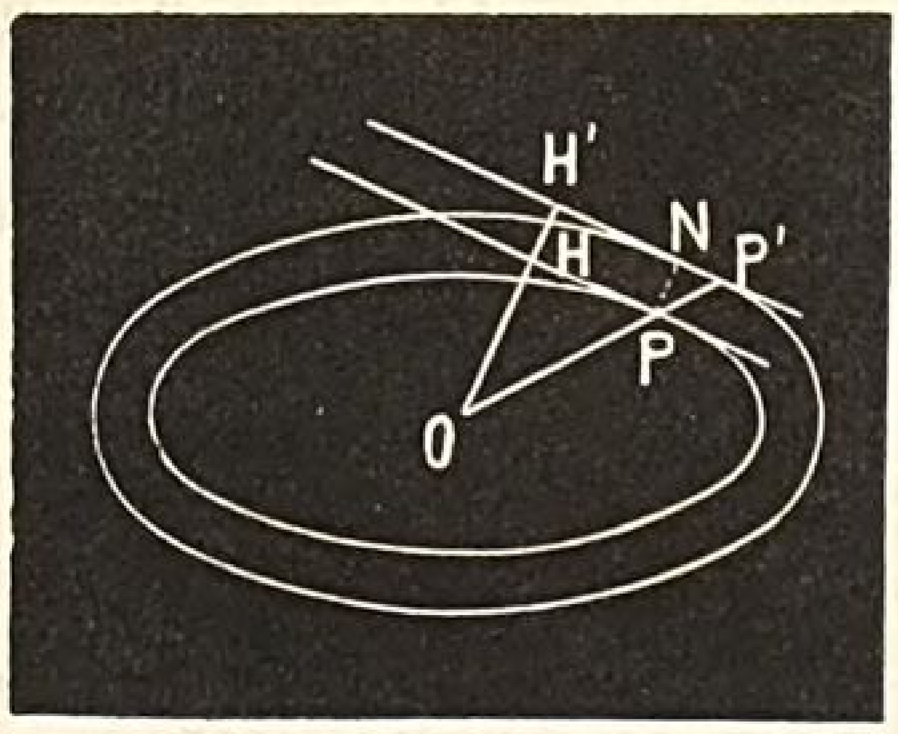


Fig. 36.

$$M = 4\pi abc\alpha K,$$

woraus man erhält:

$$\mu = M\frac{p}{4\pi abc};$$

es ist also die Elektricität auf einem Ellipsoide derart verbreitet, dass die Dichte in jedem Punkte der Länge des Perpendikels p proportional ist. Dies gilt, wie wir im theoretischen Theile nachweisen werden, überhaupt für alle Oberflächen zweiten Grades mit einem Mittelpunkte.

Man hat außerdem

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}};$$

es folgt daraus, dass die Dichte auf jedem Endpunkte einer Axe proportional der Länge der entsprechenden Axe ist.

Nimmt man an, dass eine der Axen, etwa c, sehr klein wird, so geht das Ellipsoid in eine unendlich dünne Platte über. Weil

$$\lim.\ \frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

ist, so hat man

$$\mu = \frac{M}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}};$$

die Curven gleicher Dichte sind concentrische und homothetische Ellipsen. Die elektrische Dichte wächst umsomehr, je mehr man sich vom Mittelpunkte auf einem Radius entfernt. Gleichwohl kann diese Formel für keinen wirklichen Fall passen, weil die Dichte auf dem Rande der Platte selbst unendlich würde, was offenbar unmöglich ist.

Ich kenne überdies keinen Versuch, in welchem man versucht hat, das Gesetz der Elektricitätsvertheilung auf einem Ellipsoide zu bewahrheiten.

67. Vertheilung der Elektricität auf einem Streifen. Biot(¹) hat einige Versuche erwähnt, welche er in den Schriften von Coulomb aufgefunden hat, die dieser Physiker ohne Zweifel für die Veröffentlichung nicht geeignet hielt.

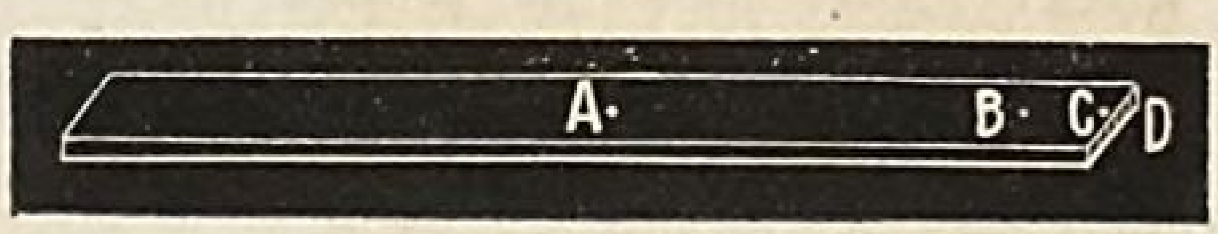


Fig. 37.

Der eine von diesen Versuchen bezieht sich auf die Vertheilung der Elektricität auf einen Stahlstreifen (Fig. 37) von 11 Zoll Länge, 1 Zoll Breite und $\frac{1}{2}$ Linie Dicke. Wenn er diesen Streifen abwechselnd mit einem Probescheibchen in der Mitte A und im Punkte B, welcher einen Zoll vom Ende lag, berührte, erhielt er nachstehende Gesammttorsionen:

In A	370		350		320
In B		440		395.	

Diese Zahlen geben für das Verhältnis der Dichten an den Stellen B und A drei Werte: 1·22, 1·20, 1·18, deren Mittel 1·20 ist.

In gleicher Weise erhielt er, als er die Stelle A mit dem Rande C des Streifens in Vergleich zog:

(¹) Traité de physique expérimentale et mathématique, t. II., p. 273.

In C	400	 390		300
In A		195		185,

woraus man für das Dichtenverhältnis die Zahlen 2·02, 2·05 und 2·00, deren Mittel 2·02 ist, erhält.

Coulomb hat sodann die Probeplatte in die Verlängerung des Streifens selbst (nach D), anstatt sie an die Oberfläche anzulegen, gebracht und er hat gefunden:

In A	305		285	
In D		1175		1137,

was die Verhältniszahlen 3·98 und 4·05, deren Mittel 4·01 ist, liefert.

Dieses Verhältnis ist fast das doppelte jenes Verhältnisses, welches für den Punkt C erhalten wurde. Biot schließt daraus, dass das Probescheibchen im letzteren Versuche der Influenzwirkung der beiden Oberflächen des Streifens unterworfen war, und dass die Elektricitätsmenge, welche es aufnahm, dem doppelten der Dichte im berührten Punkte proportional war. Es scheint zweifelhaft, ob Coulomb diesen Gesichtspunkt sich zueigen gemacht hätte; das Probescheibchen, mit seiner Schneide an einen elektrisierten Körper angelegt, ändert so sehr die Gestalt der Oberfläche im Berührungspunkte, dass die Methode in keiner Weise mehr anwendbar ist. Andererseits ist es gewiss, dass, wenn man irgendeinen Punkt des Streifens, C oder B, mit einem auf seine Schneide gestellten Probescheibchen berührt, man eine viel größere Elektricitätsmenge wegnimmt, und es ist gar nicht nöthig — um dieses Resultat zu erklären — den Einfluss der unteren Fläche des Streifens in Betracht zu ziehen; es ist aber keine einfache Beziehung zwischen den Ladungen aufzustellen, welche das Probescheibchen in diesen zwei verschiedenen Lagen aufnehmen kann.

Für einen anderen Streifen von 22 Zoll Länge erhielt er dasselbe Verhältnis 2 zwischen der Dichte am Ende und jener in der Mitte des Streifens.

Biot schließt daraus, dass für Streifen, welche im Verhältnisse zu ihrer Breite hinlänglich lang sind, das Gesetz der elektrischen Vertheilung an den Enden unabhängig von

der Länge des Streifens ist. Diese Consequenz scheint wenig Wahrscheinlichkeit für sich zu haben.

68. Kreisförmige Scheibe. Biot[1] berichtet noch nach den Manuscripten von Coulomb von Messungen, welche an einer kreisförmigen Kupferscheibe von 10 Zoll Durchmesser gemacht wurden. Die folgende Tabelle gibt das Resultat dieser Versuche an: die erste Spalte zeigt die Entfernung des berührten Punktes vom Rande der Scheibe, die zweite das Verhältnis der Dichte in diesem Punkte zu jener in der Mitte an.

Entfernung vom Rande	Dichte		
	beobachtet	gerechnet nach der Formel von Biot	gerechnet von W. Thomson
5 Zoll (Mitte)	1	1	1
4 „	1·001	1·014	1·020
3 „	1·005	1·051	1·090
2 „	1·17	1·17	1·250
1 „	1·52	1·57	1·667
0·5 „	2·07	2·041	2·294
0 (Rand)	2·90	2·90	∞

Biot hat die Beziehung, welche zwischen der elektrischen Dichte y in einem Punkte und der Entfernung x dieses Punktes vom Rande einer Scheibe, deren Radius r ist, besteht, durch die folgende Formel, welche er für die Vertheilung des Magnetismus in den Magneten aufgestellt hatte, dargestellt:

$$y = 1 + A\left[a^{x} - a^{2r-x}\right].$$

A und a sind zwei Constante, die durch Beobachtung bestimmt werden. Die Resultate der dritten Columne der Tafel wurden mittelst dieser Formel gerechnet, indem man in ihr $A = 1·9$ und $a = 0·3$ setzte.

Die Übereinstimmung der Rechnung mit den Beobachtungen ist so genügend, als man nur wünschen kann; es ist aber nicht zu verwundern, dass eine Formel, welche passend gewählt ist und zwei Constante enthält, sechs Versuche mit diesem Grade der Genauigkeit darstellt; eine solche Bestätigung bietet über-

(1) Ibidem, p. 277.

dies kein Interesse, weil die Formel keine theoretische Bedeutung hat.

Wenn man in der Formel, die sich auf ein sehr abgeplattetes Ellipsoid (66) bezieht, annimmt, dass die Axen a und b einander gleich sind, so wird die Figur eine Art von kreisförmiger Scheibe werden und die elektrische Dichte in einem Punkte, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der Scheibe r ist, wird gleich werden

$$\mu = \frac{M}{4\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Thomson(1) hat mittelst dieser Gleichung die Dichten in den verschiedenen Punkten, wie sie in dem Versuche von Coulomb beobachtet wurden, gerechnet und die Ergebnisse dieser Rechnung wurden in der vierten Columne der Tafel angegeben. Wenn man diese Zahlen vergleicht, so nimmt man wahr, dass die Dichte auf einer Scheibe von constanter Dicke immer geringer ist, als jene, welche im entsprechenden Punkte eines unendlich dünnen Ellipsoides stattfinden würde, selbst in einer hinlänglich großen Entfernung vom Rande.

Aus der Gleichung für die elektrische Dichte

$$\mu = \frac{M}{4\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$$

erkennt man, dass die Dichte von der Mitte gegen den Rand der Scheibe zunimmt; diese Zunahme findet anfangs langsamer, dann schneller statt. (Man sehe auch die Zahlen der 4. Columne voriger Tabelle.) Bei einer unendlich dünnen Platte würde die Dichte am Rande selbst unendlich werden. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass trotz der unendlich großen Dichte am Rande der Scheibe die auf der Scheibe befindliche Elektricität nicht in so überwiegender Menge am Rande angehäuft sein würde, dass man dagegen die auf den inneren Partien der Platte befindliche Elektricitätsmenge vernachlässigen dürfte(2).

(1) Reprint of papers, p. 179.

(2) Man sehe: Clausius, die mechanische Behandlung der Elektricität, Braunschweig 1879, und Grinwis: Wiskundige Theorie der Wrijvings Electriciteit, Utrecht, 1869.

Theilen wir uns die ganze Kreisfläche durch einen zum Randkreise gezogenen concentrischen Kreis mit dem Radius b in zwei Theile, so können wir die auf dem Mittelkreise und dem Kreisringe befindlichen Elektricitätsmengen rechnen; wir wollen die beiden einander unendlich nahe gegenüberliegenden parallelen Grenzflächen der Scheibe gemeinsam betrachten und die auf ihnen befindlichen Elektricitätsmengen zusammenfassen; es ist dann die Elektricitätsmenge auf dem Innenkreise:

$$Q = \frac{M}{2\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = M\left(1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)$$

daher jene auf dem Kreisringe:

$$Q' = M\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Auf Grund dieser Formeln sind folgende Zahlen gerechnet:

Wenn	$b = \frac{3}{5}a$ ist, so ist	$Q = \frac{1}{5}M$,	$Q' = \frac{4}{5}M$
„	$b = \frac{4}{5}a$ „ „ „	$Q = \frac{2}{5}M$,	$Q' = \frac{3}{5}M$
„	$b = \frac{12}{13}a$ „ „ „	$Q = \frac{8}{13}M$,	$Q' = \frac{5}{13}M$
„	$b = \frac{24}{25}a$ „ „ „	$Q = \frac{18}{25}M$,	$Q' = \frac{7}{25}M$.

Hieraus erkennt man leicht die Richtigkeit unserer oben aufgestellten Behauptung.

69. Vertheilung der Elektricität auf einem Cylinder, der von zwei halbkugelförmigen Calotten begrenzt ist. Dieser Versuch wurde ebenfalls von Coulomb gemacht und er hat davon selbst die Ergebnisse veröffentlicht. Er benützte bei seinen Versuchen einen Cylinder von 30 Zoll Länge und 2 Zoll im Durchmesser und erhielt für die Dichten in verschiedenen Punkten nachfolgende Zahlen:

In der Mitte	1
2 Zoll vom Ende	1·25
1 „ „ „	1·80
Am Ende	2·30.

Das Anwachsen der Dichte vom Mittelpunkte aus findet schneller als in den beiden vorhergehenden Fällen statt, in der Nachbarschaft der Enden sind aber die Änderungen geringer.

70. Vertheilung der Elektricität auf einem Messingwürfel. (1) Die Versuche, welche von Riess bezüglich dieses Gegenstandes gemacht wurden, erschienen uns ganz und gar illusorisch. Denn man kann nicht annehmen, dass, wenn man eine Probekugel auf die Kante eines Würfels anlegt, man eine Elektricitätsmenge wegnimmt, welche der in diesem Punkte herrschenden Dichte proportional ist; die Anlegung dieser Kugel muss gründlich den elektrischen Zustand in der Nachbarschaft ändern und es ist unter keiner Bedingung der Zustand der Kugel mit jenem vergleichbar, wie er auf einer continuierlichen Oberfläche stattfindet; umsoweniger noch ist es gestattet, diese Kugel an eine Ecke des Würfels anzulegen.

Wie dem auch immer sei, wir werden — wie es die Fig. 38 angibt — über die von Riess erhaltenen Resultate berichten.

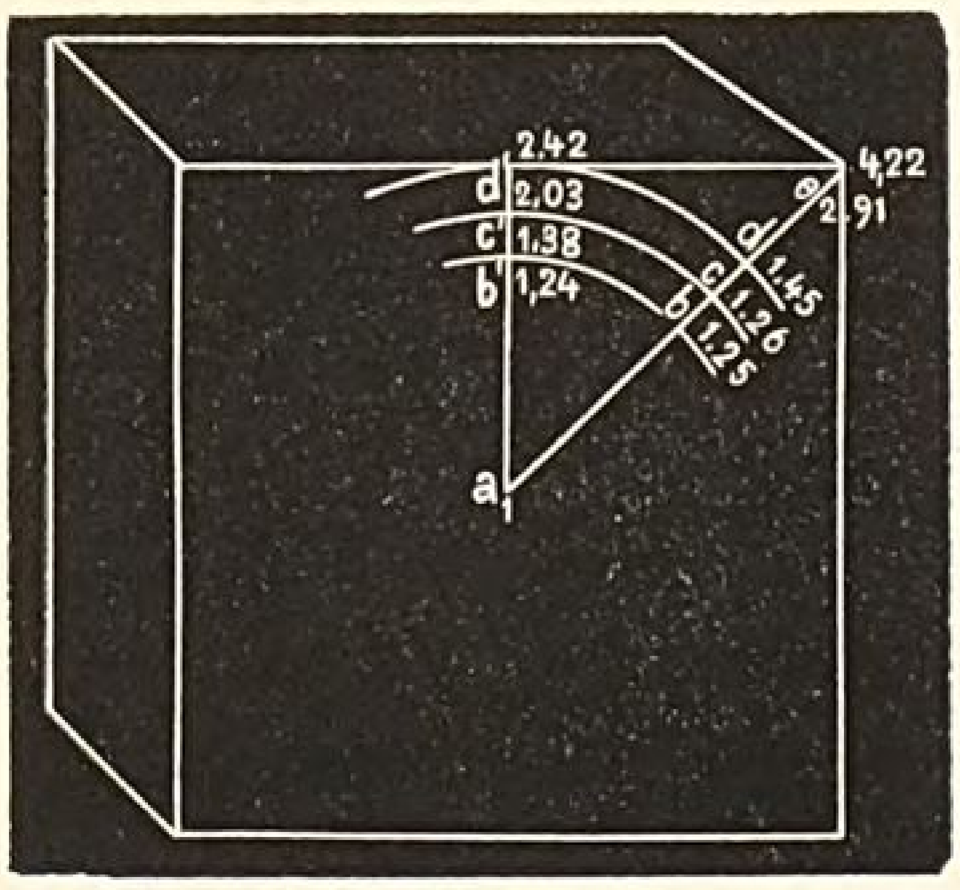


Fig. 38.

Der Würfel hatte 37 Linien, d. h. 3 Zoll und 1 Linie zur Seitenlinie, die Punkte b und b' liegen auf einem und demselben Kreise, der aus dem Mittelpunkte a_1 einer der Seitenflächen mit einem Radius gleich 13 Linien beschrieben wurde; die Punkte c, c' und d, d' befinden sich ebenso in den Entfernungen von 15 und 18·5 Linien vom Punkte a_1; die zur Seite eines jeden Punktes eingetragenen Zahlen stellen die elektrische Dichte in diesem Punkte vor. Die beiden Zahlen, welche beim Punkte d' angegeben sind, beziehen sich die eine auf den Fall, in welchem die Kugel auf die eine Seitenfläche angelegt wurde, die zweite auf jenen, in welchem die Kugel auf die Kante gesetzt wurde; ebenso entspricht die größere Zahl im Punkte e dem Falle, in welchem die Kugel auf die Ecke des Würfels selbst gelegt wurde. Diese Zahlen scheinen weder eine theoretische noch auch eine experimentelle Bedeutung haben zu können.

(1) Riess, Reibungselektricität I., p. 156.

71. Spitzen. Betrachtet man ein Ellipsoid, dessen eine Axe im Verhältnis zu den anderen sehr groß ist, so wird man eine Art abgestumpfter Spitze erhalten, welche jenen ziemlich ähnlich ist, die man bei den Versuchen in Anwendung bringt; die elektrische Dichte muss, da sie in einem Endpunkte einer Ellipsoidenaxe der Länge der entsprechenden Axe proportional ist, am Ende der betrachteten Spitze sehr groß sein. Sie ist in der That so groß, dass die Elektricität sich sehr schnell von ihr entfernt und dass solche Körper nur äußerst geringe Ladungen bewahren können. — Man kann durch einen sehr einfachen Versuch der folgenden Art(¹) leicht zeigen, dass an stärker gekrümmten Stellen die Elektricität sich stärker anhäuft. Man stellt aus mit Stanniol überzogener Pappe ein beiderseits offenes Prisma her und hängt an die eine horizontale Kante ein Hollundermarkkügelchen-Paar. Wenn man, nachdem das Prisma elektrisiert wurde, dasselbe mittelst isolierender Handhaben zusammendrückt, so dass der Flächenwinkel, der den obenerwähnten Kanten entspricht, spitzer wird, so divergieren die Pendelchen stärker als ursprünglich, als noch der Flächenwinkel größer war. — Um eine Vorstellung von der Vertheilung der Elektricität auf einer Spitze zu haben, hat Riess seine Methode der Probekugeln auf Kreiskegeln angewendet. Die Kegel, welche er zu diesem Behufe gebrauchte, hatten alle eine Grundfläche von 13·37 Linien im Durchmesser, und der Winkel an der Spitze war für den einen Kegel 90°, für die beiden anderen 45° und 22·5°. Riess hat zuerst einige Versuche mit einem Probescheibchen von $5^1/_2$ Linien im Durchmesser gemacht, dann hat er aber Probekugeln von 2 Linien im Durchmesser den Vorzug gegeben. Es ist nicht nöthig, vom neuen auf die Unvollkommenheit dieser Experimente hinzuweisen, in allen Fällen waren die Dimensionen der Kegel im Verhältnis zu den Dimensionen der Probekörper viel zu klein.

Als Riess den Kegel von 90° mit seiner Basis nach einander auf die beiden anderen anlegte, erhielt er eine Vertheilung der Elektricität, welche genügend durch die in den folgenden

(¹) Mach, Carl's Repert. Bd. 6, 1870.

Figuren eingeschriebenen Zahlen angedeutet ist. Das Maximum der Dichte fand an dem Scheitelpunkte des spitzigsten Winkels statt; die Spitze des Kegels von 90° bietet ebenfalls ein Dichtigkeitsmaximum im Verhältnis zu den Dichten der be-

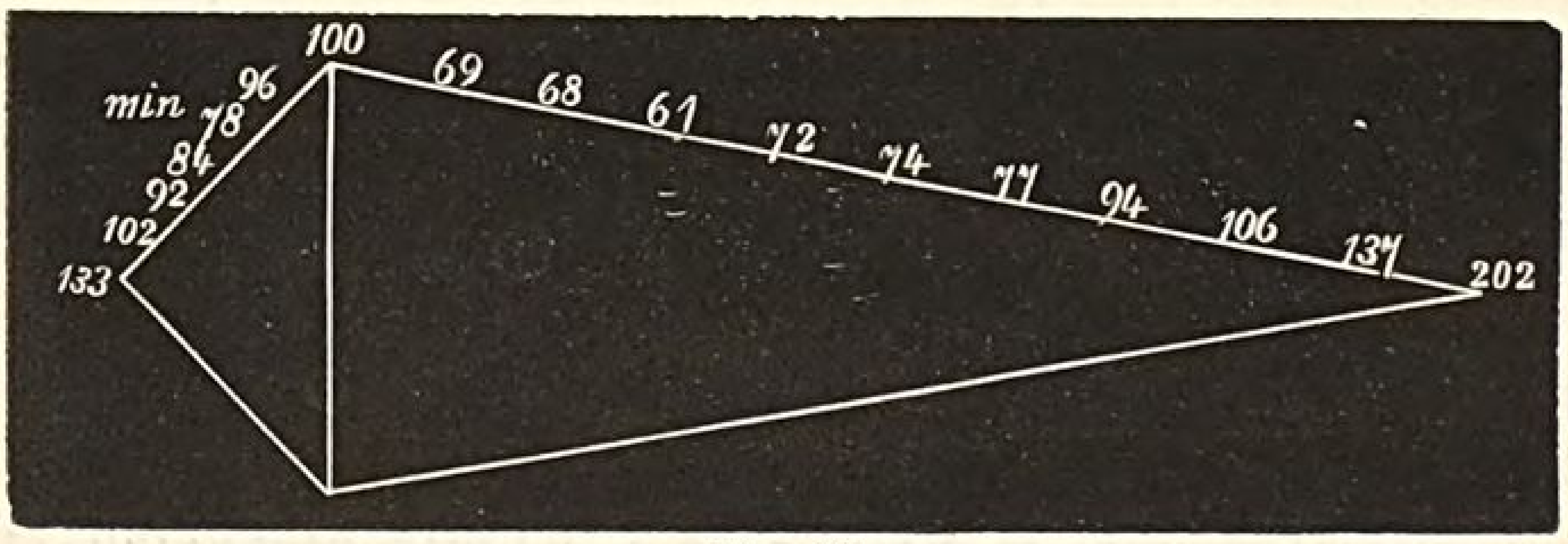


Fig. 39.

nachbarten Punkte und ebenso verhält es sich auf der Peripherie der Grundflächen. Diese Resultate waren leicht vorauszusehen. Die Dichtenminima finden sich auf den Seitenoberflächen der Kegel vor, und zwar ungefähr im dritten Theile der Höhe von der Basis aus gerechnet.

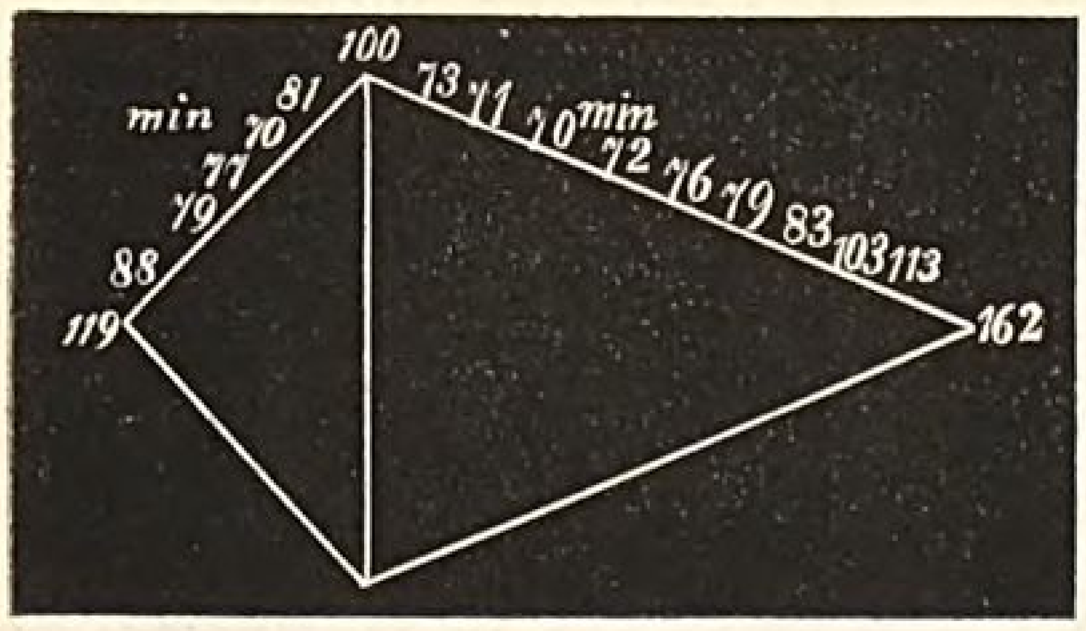


Fig. 40.

R i e s s hat hierauf diese Kegel auf eine Seitenfläche des früher in Anwendung gebrachten Würfels gestellt und — wie die Zahlen der folgenden Tafel anzeigen — die elektrischen Dichten an der Spitze des Kegels, der Ecke des Würfels und der Mitte der einen Seitenfläche des Würfels verglichen:

Winkel des Kegels	Dichten		
	in der Mitte einer Seitenfläche des Würfels	in einer Ecke der oberen Seite des Würfels	an der Spitze des Kegels
90°	1	4·12	2·83
45	1	4·24	5·33
22·5	1	4·18	8·24

Endlich hat R i e s s auf den Würfel stählerne Nähnadeln aufgesetzt.

Die erste hatte $7\frac{1}{2}$ Linien Länge, $\frac{1}{2}$ Linie in der Basis und einen Winkel von 1^0; die Dichte an der Spitze war 3·52, d. h. kleiner als auf dem Metallkegel von 45^0.

Die zweite war $6\frac{1}{2}$ Linien lang und man erhielt als elektrische Dichte an der Spitze 3·3.

Die dritte war $4\frac{11}{12}$ Linien lang und als Dichte ergab sich 2·6.

Er hat sodann von Pflanzen stammende Spitzen angewendet und er hat unter diesen eine einzige gefunden (Dorn einer Euphorbie), welche an der Spitze eine größere Dichte als die metallischen Spitzen hatte und welche demzufolge Veranlassung zu einer größeren Zerstreuung der Elektricität gab.

Es ist nicht möglich Beispiele zu wählen, bei welchen die Methode der Probekörperchen unanwendbarer gewesen wäre. Alle diese Zahlen scheinen überdies zu klein zu sein und wir werden sehen, dass sie sich beträchtlich von jenen unterscheiden, welche Coulomb mittelst einer correcteren Methode erhalten hat.

72. Eigenschaften der Spitzen. Die merkwürdigen Eigenschaften der Spitzen wurden seit langer Zeit beobachtet und eine der Erscheinungen war es, welche das Augenmerk der Physiker in hohem Grade auf sich lenkte.

Wenn man eine Spitze auf den Conductor einer Elektrisiermaschine, die mit einem Elektroskop versehen ist, setzt, so sieht man das Elektroskop unmittelbar fallen; wenn man auch die Scheibe der Elektrisiermaschine fortwährend dreht, gelangt man doch nicht dazu, die Maschine vom neuen zu laden, denn die Elektricität fließt in demselben Maße, als sie entsteht, durch die Spitze ab; der Verlust an Elektricität hört augenblicklich auf, wenn man die Spitze in eine Kugel von Wachs oder Hollundermark endigen lässt; das letztere ist der Fall bei den Versuchen von Riess, in welchen eine Probekugel auf die Spitze eines Kegels gesetzt wurde.

Gleichwohl hängt die Wirkungsweise einer in der erwähnten Weise auf einem elektrisierten Conductor angebrachten Spitze eher von deren Länge und allgemeinen Gestalt, als von der Art und Weise des Endes ab, wie dies aus den Versuchen von Coulomb hervorgeht, welche er an Cylindern und einer

Reihe von Kugeln anstellte; die Wirksamkeit der Spitze hängt auch von der Lage, welche die Spitze auf dem Conductor einnimmt, ab. Hat dieser Conductor schon selbst eine längliche Gestalt, wie die Cylinder einer Elektrisiermaschine, dann ist es einleuchtend, dass der Elektricitätsverlust viel größer wird, wenn man die Spitze an das Ende des Cylinders setzen wird, als wenn man sie an dem mittleren Theile des Cylinders anbringt.

Macht man den Versuch in der Dunkelheit, so sieht man die Spitze leuchtend werden; ist der Conductor mit positiver Elektricität geladen, so sieht man in der Verlängerung der Spitze ein brillantes Strahlenbüschel von blauvioletter Farbe;

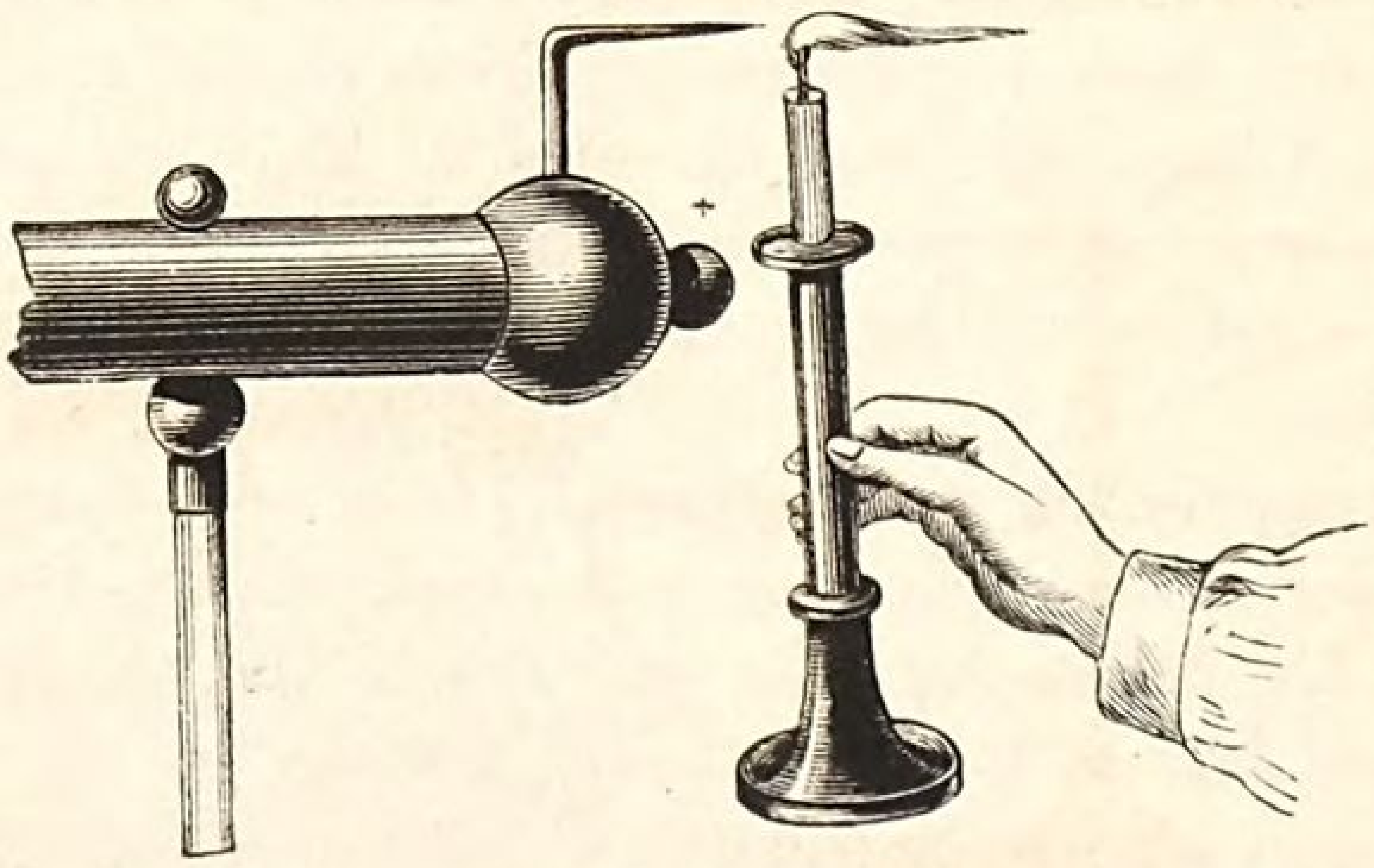


Fig. 41.

man beobachtet nur einen glänzenden Punkt, wie einen weißen Stern, wenn die entweichende Elektricität negativ ist.

Hält man die Hand vor die Spitze, so erhält man das Gefühl eines Luftstromes, dem man den Namen des e l e k t r i s c h e n W i n d e s gegeben hat; der Wind, welcher durch eine auf eine Elektrisiermaschine aufgesetzte Spitze hervorgerufen wird, kann so stark sein, dass er ein Kerzenlicht verlöscht (Fig. 41).

Man erklärt den elektrischen Wind durch die Bewegung der Luftmolecüle, welche der Spitze benachbart sind; diese werden durch Berührung mit letzterer elektrisiert und dann kräftig abgestoßen. Wenn diese Erklärung richtig ist, so müssen die Luftmolecüle ihrerseits die Spitze selbst abstoßen und diese wird zurückweichen, wenn sie genügend beweglich

ist: dies ist das Experiment des elektrischen Rädchens von Hamilton[1]. Dieser kleine Apparat besteht (Fig. 42) aus Metallstäbchen, welche in Radien um ein Käppchen angeordnet sind und sämmtlich in Spitzen ausgehen und in demselben Sinne umgebogen sind. Die Kappe wird auf einen leitenden Zapfen O aufgesetzt, der mit einer Elektrisiermaschine verbunden ist. Der Apparat dreht sich rasch in einem der Richtung der Spitzen entgegengesetzten Sinne.

Wir werden später auf die Theorie des elektrischen Rädchens und auf die verschiedenen Versuche, zu welchen dieser Apparat Veranlassung gibt, zurückkommen.

73. Vertheilung der Elektricität auf mehreren in Berührung stehenden Körpern. Das Studium der Theilung der

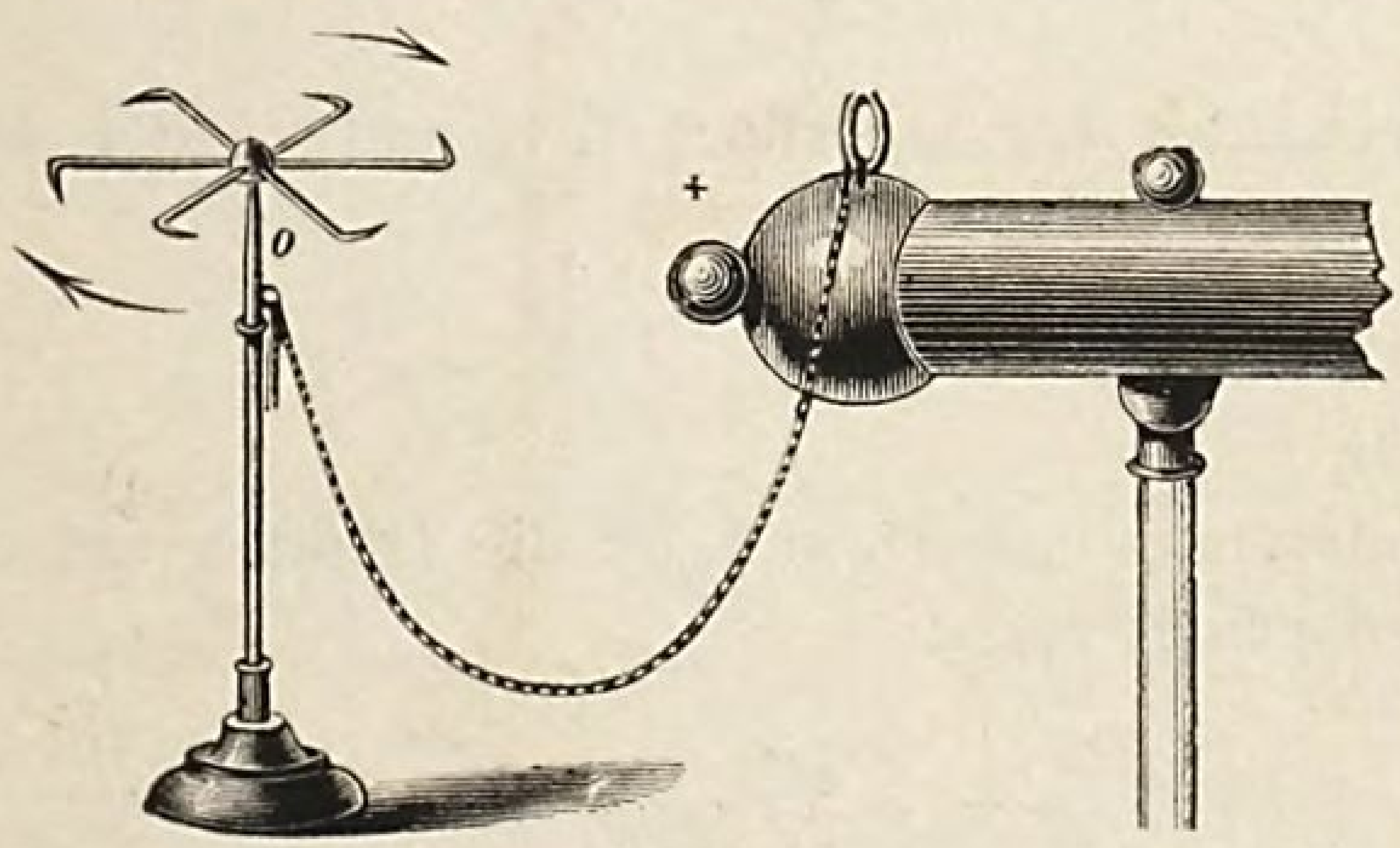


Fig. 42.

Elektricität unter Conductoren kann von zwei Gesichtspunkten aus unternommen werden, je nachdem man allein die Verhältnisse der gesammten Elektricitätsmengen, welche die Conductoren nach ihrer Trennung besitzen, zu bestimmen sucht, oder die Vertheilung der Elektricität auf diesen Conductoren, während der Contact hergestellt ist, kennen lernen will.

Wir geben im Nachstehenden einige der Versuche von Coulomb an.

74. Fall zweier Kugeln. 1. Theilung der Elektricität. Coulomb führte z. B. in die Drehwage eine elektrisierte Kugel C von 6 Zoll 3 Linien Umfang ein und erhielt in der Entfernung von 30° eine Gesammttorsion von 145°. Er berührte

[1] Phil. trans. abridged, vol. XI., p. 504 (1760).

mit dieser Kugel eine zweite Kugel von 24 Zoll Umfang und die von der ersten hervorgerufene Torsion wurde auf 12° reduciert.

Das Verhältnis dieser beiden Torsionen ist 12·1; andere Beobachtungen ergaben in derselben Weise die Verhältniszahlen:

$$\frac{259}{21} = 12{\cdot}3; \ \frac{255}{21} = 12{\cdot}1; \ \frac{231}{19} = 12{\cdot}1.$$

Bezeichnet man mit M und M′ die Ladungen der beiden Kugeln nach dem Contacte, so hat man daher für die erste Beobachtung z. B.

$$\frac{M'}{M} = \frac{145 - 12}{12} = \frac{133}{12} = 11{\cdot}1.$$

Das Verhältnis der Oberflächen S und S′ der beiden Kugeln ist

$$\frac{S'}{S} = 14{\cdot}8.$$

Bezeichnet man mit D und D′ die Dichten auf den beiden Kugeln, so erhält man:

$$\frac{M'}{M} = \frac{S'D'}{SD} \text{ oder daraus:}$$

$$\frac{D}{D'} = \frac{\frac{S'}{S}}{\frac{M'}{M}} = 1{\cdot}33.$$

Der Elektricitätsverlust war am Tage dieses Versuches, $\frac{1}{50}$ per Minute und der Zeitraum zwischen zwei Beobachtungen war nur 50″, weshalb es nicht nöthig ist eine auf die Zerstreuung der Elektricität bezügliche Correction vorzunehmen.

Als Coulomb ebenso mit anderen Kugeln experimentierte, erhielt er die folgenden Ergebnisse:

Dimensionen der Kugeln C	C'	$\frac{S'}{S}$	$\frac{M'}{M}$	$\frac{D}{D'}$
6'' 3''' Umfang	11'' 6''' Umfang	3·36	3·8	1·09
6'' 3''' „	24'' „	14·8	11·1	1·33
1'' ungefähr Durchmesser	8'' Durchmesser	62	37·6	1·65

75. Ist das Verhältnis der Oberflächen sehr groß, so verliert die kleine Kugel fast ganz ihre Elektricität, wenn man sie in Berührung mit der größeren bringt, und die Torsion, welche man in der zweiten Beobachtung erhalten wird, ist fast unmerklich; es muss dann der Versuch ein wenig geändert werden und dies fand im letzten Falle statt. Die größere Kugel C' wurde außer der Drehwage elektrisiert und vollkommen isoliert. Man berührte sie mit der kleinen Kugel C, brachte diese in die Drehwage und erhielt in der Winkelentfernung von 44° eine Gesammttorsion von 244°.

Man brachte nun diese Kugel C in den neutralen Zustand, berührte zwanzigmal nacheinander mit ihr die große Kugel, wobei man nach jeder Berührung die kleine Kugel in den neutralen Zustand versetzte, mit Ausnahme der letzten Berührung; brachte man sie dann in die Drehwage zurück, so war die Torsion nur mehr 126° für dieselbe Deviation der Nadel von 44°.

Nach 20 neuerdings vorgenommenen Berührungen war die Torsion nur mehr 66°.

Bei diesem Versuche spielte die kleine Kugel im Verhältnis zur großen die Rolle der Probescheibe. Die Verminderung der Torsion, wie sie durch die 20 ersten Berührungen verursacht war, betrug $244^0 - 126^0 = 118^0$; der 20. Theil von ihr ist $5{\cdot}9^0$; die mittlere Ladung der großen Kugel entsprach der Torsion $\frac{244^0 + 126^0}{2} = 185^0$. Das Verhältnis der durch jede Berührung entführten Elektricitätsmenge zur mittleren Ladung ist daher $\frac{5{\cdot}9}{185} = \frac{1}{31{\cdot}4}$. Dieses ist das Verhältnis $\frac{M}{M'}$ der Ladungen der beiden Kugeln.

Man muss aber bemerken, dass von einer Beobachtung zur anderen in der für die zwanzig Berührungen nöthigen Zeit die Elektricität der großen Kugel sich um fast $\frac{1}{8}$ oder $\frac{4}{32}$ verringert hat, was nahezu 4 Berührungen gleichkommt. Es verhält sich daher ganz so, als ob 24 Berührungen stattgefunden hätten und man muss deshalb für das Verhältnis der Ladungen setzen:

$$\frac{M'}{M} = \frac{185}{\frac{118}{24}} = 37{\cdot}6.$$

Die Rechnung kann noch in einer anderen Weise geführt werden. Sei A die ursprüngliche Ladung der Kugel C'; die Kugel C nimmt bei jedem Contact von ihr einen Bruchtheil $\frac{1}{n}$. Die erste Berührung entfernt daher eine Menge $\frac{A}{n}$ an Elektricität und es bleibt auf der ersten Kugel

$$A - \frac{A}{n} = A\,\frac{n-1}{n}.$$

Beim zweiten Contacte wird von der großen Kugel eine Menge $A\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}$ weggeführt und es bleibt auf dieser Kugel zurück:

$$A\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Nach 20 Berührungen bleibt die Elektricitätsmenge $A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{20}$ auf der Kugel C' und die Kugel C hat aufgenommen

$$A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{19}\frac{1}{n}.$$

Da man wegen der Elektricitätszerstreuung zwischen den beiden ersten Beobachtungen 24 Berührungen und 25 Berührungen zwischen den beiden folgenden rechnen muss, im ganzen somit 49, so wird die schließliche Torsion der Elektricitätsmenge

$$A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{49}.\frac{1}{n}$$

entsprechen, woraus für das Verhältnis der Torsionen in der ersten und letzten Beobachtung folgt:

$$\frac{\frac{A}{n}}{A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{49}\frac{1}{n}}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{49}=\frac{244}{66},$$

woraus man $n = 38{\cdot}04$ erhält.

Das Verhältnis der Ladungen der beiden Kugeln betrug daher bei der ersten Berührung

$$\frac{A\frac{n-1}{n}}{\frac{A}{n}}=n-1=37{\cdot}04,$$

welche Zahl wenig sich von jener unterscheidet, welche die einfachere Rechnung ergab.

Coulomb nahm einen Mittelwert unter den Ergebnissen vieler Beobachtungen, die entweder nach der vorhergehenden Methode oder nach der Methode des Probescheibchens gemacht wurden und bildete die nachstehende Tabelle, welche die Art und Weise darstellt, wie das elektrische Fluidum sich unter zwei Kugeln von verschiedenen Durchmessern theilt.

Verhältnis der Radien der Kugeln	Verhältnis der mittleren Dichten	
	beobachtet	gerechnet
1	1	1
2	1·08	1·16
4	1·30	1·32
8	1·65	1·44
∞	2	$1{\cdot}65 = \frac{\pi^2}{6}$

Die letzte Colonne umfasst die Resultate der von Poisson ausgeführten Rechnungen; man sieht, dass die Übereinstimmung eine genügende ist.

Die horizontale untere Reihe entspricht dem Grenzfalle, in welchem man eine elektrisierte Kugel mit einer anderen unendlich kleinen Kugel berührte; Coulomb glaubte, dass das Dichtenverhältnis dann gegen 2 convergiert, Poisson hat gefunden, dass dieses Grenzverhältnis genau gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist.

76. 2. **Dichten in den verschiedenen Punkten während der Berührung.** Coulomb hat auch die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln während des Contactes gesucht. Er hat zuerst das Verhältnis der elektrischen Dichte Δ auf der kleinen Kugel am Ende B des gemeinschaftlichen Durchmessers (Fig. 43) zur mittleren Dichte der großen Kugel bestimmt. Es genügt zu diesem Zwecke zuerst den Punkt B und dann irgendeinen Punkt der anderen Kugel zu berühren, nachdem die beiden Kugeln voneinander getrennt worden waren. Coulomb hat die nachstehende Tabelle als die Zusammenfassung zahlreicher Versuche angegeben und wir fügen ihr die Resultate der von Poisson angestellten Rechnungen bei. Coulomb vermuthete nach dem Gange der Beobachtungen, dass das Verhältnis der elektrischen Dichten gegen 4 für den Fall convergiert, wo die eine der Kugeln unendlich klein wird; Poisson hat gefunden, dass der Grenzwert dieses Verhältnisses gleich 4·20721 ist.

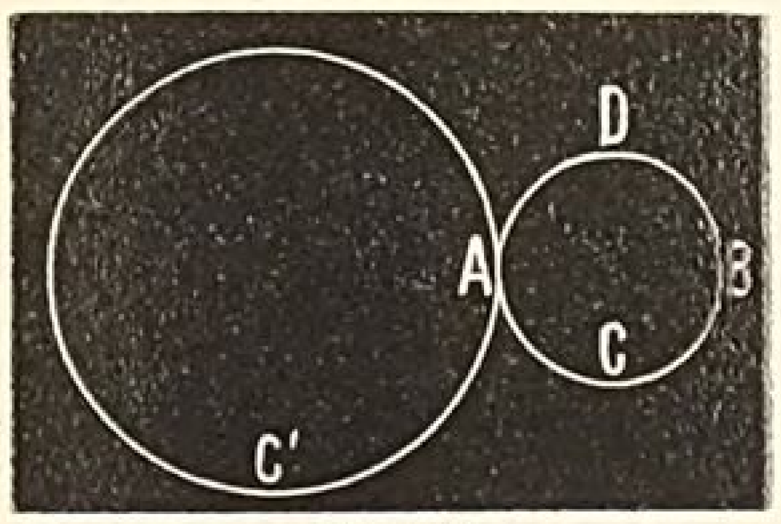


Fig. 43.

Verhältnis der Kugelhalbmesser	Verhältnis der Dichten $\frac{\Delta}{D}$	
	beobachtet	gerechnet
1	1·27	1·32
2	1·55	1·83
4	2·35	2·48
8	3·18	3·09
∞	4	4·21

77. Wenn die beiden in Berührung stehenden Kugeln einander gleich sind, so befindet sich keine merkliche Elektricität in der Nachbarschaft des Berührungspunktes A (Fig. 44) und

bis zu einer Winkelentfernung von ungefähr 20°. Geht man von da aus, so wird die Dichte in einer ziemlich raschen Weise größer bis zum Punkte D, der 90° vom Berührungspunkte absteht, dann nimmt sie in langsamerer Weise zwischen diesem Punkte und dem Ende B des gemeinschaftlichen Durchmessers zu. Die folgende Tabelle gibt die Dichte in den verschiedenen Punkten F, E... an, indem man als Einheit die Dichte im Punkte D nimmt.

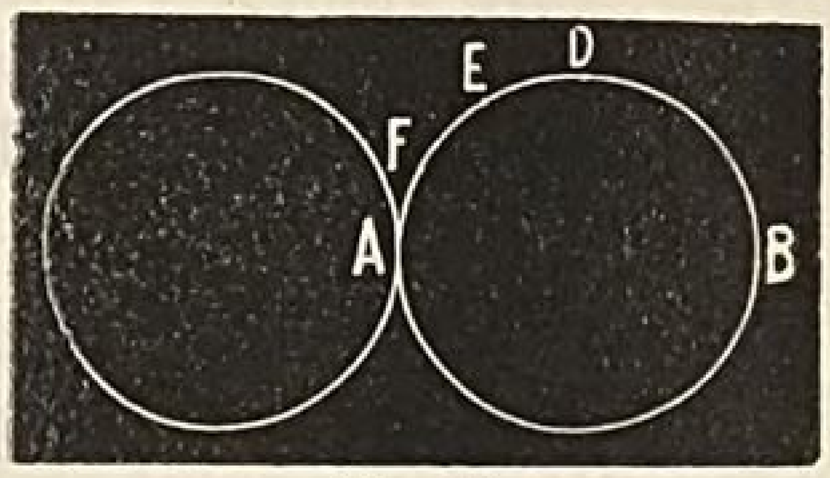


Fig. 44.

Winkeldistanz des betrachteten Punktes vom Berührungspunkte	Dichte	
	beobachtet	gerechnet
30°	0·21	0·171
60°	0·80	0·746
90°	1	1
180°	1·05	1·140

Wenn die Kugeln ungleich sind, so strebt die Vertheilung der Elektricität auf der größeren gleichförmig zu werden und die Elektricität auf der kleinen Kugel wird bis zu einer Entfernung von 30° nicht mehr merklich. Die nachstehende Tafel zeigt, wie die Vertheilung der Elektricität auf der kleinen Kugel sich ändert, wenn der Radius abnimmt.

Verhältnis der Radien	Winkelentfernung des betrachteten Punktes vom Berührungspunkte	Dichte	
		beobachtet	gerechnet
2	60°	0·59	0·556
	90	1	1
	180	1·33	1·35
4	90°	1	1
	180°	1·43	1·673

Die Übereinstimmung der Resultate der Rechnung und der Beobachtung ist genügend; man kann aber bemerken, dass

im allgemeinen die durch das Experiment erhaltenen Zahlen sich mehr der mittleren Dichte nähern als jene, welche die Rechnung lieferte, und dies ist in der That der Sinn, in welchem die Versuchsfehler vorzugsweise entstehen müssen.

78. Elektrische Theilung unter mehreren Kugeln. Coulomb hat ebenso die Theilung der Elektricität unter mehreren Kugeln, welche in Berührung standen, studiert; diese Kugeln wurden von Dreifüßen aus Schellack getragen; man trennte sie, nachdem sie elektrisiert worden waren und bestimmte das Verhältnis ihrer Gesammtladungen.

Wenn eine kleine Kugel sich zwischen zwei anderen größeren befindet, so nimmt sie nur eine sehr geringe Elektricitätsmenge an.

Für drei gleiche in Berührung stehende Kugeln A_1, A_2, A_3, welche in der Reihenfolge der Indices gestellt waren, erhielt man als Verhältnis der Ladungen:

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{\cdot}34.$$

Mit sechs gleichen Kugeln hat man ebenso:

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{\cdot}48, \quad \frac{A_1}{A_3} = 1{\cdot}56.$$

Für 12 gleiche Kugeln erhielt Coulomb:

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{\cdot}50, \quad \frac{A_1}{A_6} = 1{\cdot}70.$$

Für 24 Kugeln gilt:

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{\cdot}56, \quad \frac{A_1}{A_{12}} = 1{\cdot}75.$$

Für zwei kleine Kugeln A_1 und A_2 von 2 Zoll im Durchmesser, die sich in Berührung mit einer Kugel B von 8 Zoll Durchmesser befanden und so angeordnet waren, wie es die Figur 45 anzeigt, findet man:

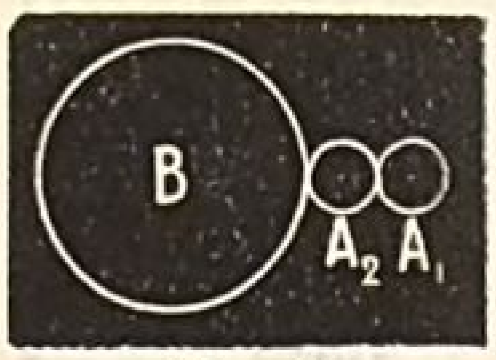


Fig. 45.

$$\frac{A_1}{A_2} = 2{\cdot}54.$$

Mit 4 kleinen Kugeln, die mit der größeren in Berührung standen und ebenso angeordnet waren, erhält man:

$$\frac{A_1}{A_4} = 3{\cdot}40.$$

In diesem Falle ist das Verhältnis der Ladung der Kugel A_1 zu jener, welche sie annehmen würde, wenn sie allein wäre, 1·60.

Für 24 kleine Kugeln, die mit einer anderen vom 4fachen Durchmesser in Berührung stehen, sind die Verhältnisse der auf den verschiedenen Kugeln sich vorfindenden Elektricitätsmengen:

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{\cdot}49$$

$$\frac{A_1}{A_{12}} = 1{\cdot}70$$

$$\frac{A_1}{A_{23}} = 2{\cdot}10$$

$$\frac{A_1}{A_{24}} = 3{\cdot}72.$$

Das Verhältnis der mittleren Dichte der ersten Kugel A_1 zu jener der großen Kugel B ist 2·16 und das Verhältnis der mittleren Dichte der kleinen Kugeln A zu jener der großen Kugel B ist 1·27.

79. Kugel und Cylinder. Eine Kugel B von 8 Zoll im Durchmesser (Fig. 46) wurde in Berührung mit einem Cylinder C von 30 Zoll Länge und 2 Zoll im Durchmesser, der in zwei halbkugelförmigen Calotten endigte, gebracht.

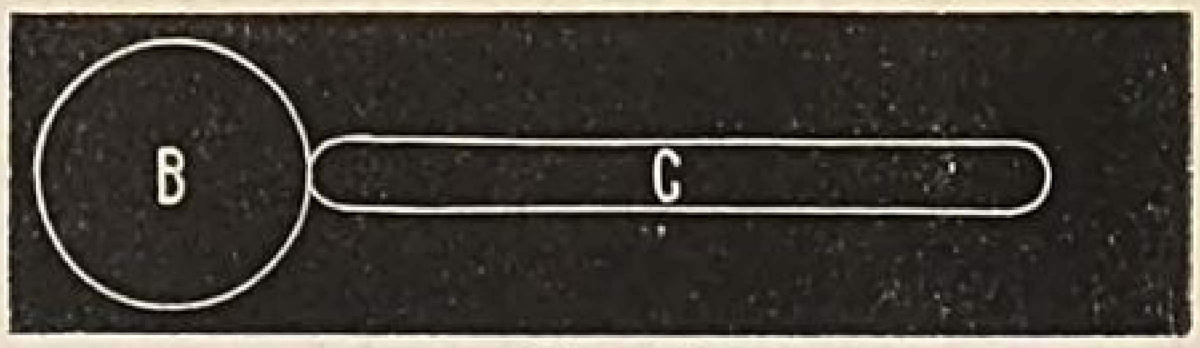


Fig. 46.

Das Verhältnis der Oberflächen der Kugel und des Cylinders war

$$\frac{S}{S'} = 1{\cdot}07$$

und das Verhältnis der mittleren Dichten auf dem Cylinder und auf der Kugel

$$\frac{D'}{D} = 1{\cdot}29.$$

Dieses Verhältnis wurde in der Weise erhalten, dass man die Kugel mit der Probeplatte, bevor und nachdem sie in Berührung mit dem Cylinder gesetzt worden war, berührte. Ersetzte man diesen Cylinder durch einen anderen von demselben Durchmesser und von nur 15 Zoll Länge, so änderte sich das Verhältnis $\frac{D'}{D}$ nicht. Mit einem Cylinder von 5 bis 6 Linien Länge und 2 Linien im Durchmesser fand man $\frac{D'}{D} = 2$. Endlich ergab sich für einen Cylinder von 6 Zoll in der Länge und 2 Linien im Durchmesser $\frac{D'}{D} = 8$.

Coulomb hat mit einer und derselben Kugel Cylinder von derselben Länge (30 Zoll) und verschiedenem Durchmesser in Berührung gebracht und er hat gefunden, dass das Verhältnis der mittleren Dichten etwas weniger schnell als die Potenz $\frac{4}{5}$ des umgekehrten Verhältnisses der Durchmesser variiert, wie dies die folgende Tabelle anzeigt:

Radius der Kugel R = 4 Zoll.
Länge des Cylinders = 30 „

Radius des Cylinders r	Verhältnis der Ladungen	$\frac{D'}{D}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{4}{5}}$	$\frac{D'}{D} : \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{4}{5}}$	$\frac{D'}{D} : \frac{R}{r}$
4 Zoll	2·25	0·60	1	0·60	0·60
2 „	1·59	0·85	1·741	0·49	0·42
1 „	1·22	1·30	3·03	0·43	0·32
6 Linien	0·96	2	5·27	0·38	0·25
1 Linie	2·12	9	22·12	0·41	0·19

Für den letzten Fall folgt aus der vom Experimente (69) erwiesenen Thatsache, dass die Dichte am Ende des Cylinders 2·30mal größer als die mittlere Dichte ist, dass das Verhältnis, welches zwischen der Dichte am Ende des Cylinders und der mittleren Dichte der Kugel herrscht, gleich

$$9 \times 2{\cdot}3 = 20{\cdot}7$$

ist.

Es ist nützlich, diese Resultate mit jenen in Vergleichung zu ziehen, welche Riess nach der directen Methode der Probekugel, und zwar bei dem Studium der Vertheilung der Elektricität an verschiedenen Punkten eines Conductors, der aus einem auf einen Würfel gesetzten Conus bestand, erhalten hat. In den Versuchen von Riess war die Dichte am Ende der feinsten Spitze, nämlich am Ende des Kegels von 22·5°, nur dem 8·24fachen der Dichte in der Mitte der Seitenfläche des Würfels gleich, d. h. sie war höchstens 8mal so groß als die mittlere Dichte dieses Würfels; die Metallnadeln und die von Pflanzen herrührenden Spitzen gaben noch kleinere Zahlen. Der Cylinder von einer Linie Radius kann mit einer feinen Spitze wohl nicht verglichen werden, indess hat Coulomb für das Ende dieses Cylinders nach einer Methode, welche zwar nicht vollständig strenge ist, die aber dennoch Zahlen liefern muss, welche der Wahrheit sehr nahe liegen, eine viel größere Dichte gefunden.

80. Wenn man verschiedene Kugeln in Berührung mit einem und demselben Cylinder bringt, kann man nach dem Gange der Zahlen, welche die vorhergehende Tafel umfasst, vermuthen, dass für eine bestimmte Länge des Cylinders seine mittlere Dichte fast dem Durchmesser der Kugel proportional sein wird, und dass man nahezu haben wird:

$$\frac{D'}{D} = m\,\frac{R}{r^{\frac{4}{5}}}, \text{ oder ungefähr } \frac{D'}{D} = m\,\frac{R}{r}.$$

Man wird den Wert des Coefficienten m dadurch bestimmen, dass man sich auf das Ergebnis stützt, dass, wenn der Radius der Kugel 4 Zoll beträgt und jener des Cylinders 1 Linie ist, das Dichtenverhältnis 9 ist; das Verhältnis der Radien ist dann 48 und man erhält aus diesen Zahlen $m = \frac{9}{48}$ und deshalb

$$\frac{D'}{D} = \frac{9}{48}\,\frac{R}{r}.$$

Man kann, wie dies Coulomb[1] gethan hat, diesen Näherungscalcül auf den Fall des papierenen Drachen von Frank-

[1] Mémoires de l'Académie (1788), p. 654.

lin anwenden. Wenn man annimmt, dass ein Papierdrache, der an einem dünnen Faden von 2 Linien im Durchmesser gehalten wird, in Verbindung mit einer beträchtlichen Wolke, die man einer Kugel von 1000 Fuß Radius ähnlich setzt, bringt, so wird man haben:

$$\frac{R}{r} = 144000 \text{ und demzufolge } \frac{D'}{D} = 27000.$$

Da die Dichte δ am Ende der Schnur gleich 2·30mal größer als die mittlere Dichte ist, so folgt, dass man haben wird:

$$\frac{\delta}{D'} = 2{\cdot}30 \text{ und } \frac{\delta}{D} = 62100.$$

Die elektrische Dichte am Ende der Drachenschnur ist 62100mal größer als jene der Wolke, und man kann sich daraus die Stärke der Funken, die man unter diesen Bedingungen selbst bei einer schwach elektrischen Wolke aus dem unteren Ende der Schnur ziehen kann, erklären.

Schließlich leitet die Vergleichung der beiden vorhergehenden Beobachtungsreihen bezüglich der Kugeln und der Cylinder zu dem wichtigen Resultate, dass — wie groß auch immer die Länge eines Cylinders oder einer Reihe, die aus kleinen Kugeln von demselben Durchmesser wie der Cylinder gebildet wird, sei — die mittlere Dichte der Elektricität nahezu dieselbe ist.

V. Kapitel.

Elektrische Influenz.

81. Grunderscheinungen der Influenz. Bis jetzt haben wir die Körper dadurch elektrisiert, dass man sie entweder direct rieb oder mit einem schon elektrisierten Körper in Berührung brachte: diese Berührung ist aber selbst nicht nothwendig. Es genügt, dass ein Körper, insbesonders dann, wenn er ein Conductor ist, in die Nachbarschaft eines elektrisierten Körpers gebracht werde, oder wie man sich ehedem ausdrückte, in die elektrische Atmosphäre dieses Körpers komme, um selbst elektrisch zu werden; in dieser Erscheinung besteht die elektrische Influenz. Die Phänomene der Influenz wurden von mehreren Physikern beobachtet, so von Otto von Guericke, Hauksbée, Gray und anderen; es wurde ihnen aber keine genügende Aufmerksamkeit geschenkt: Canton[1] scheint sie zum erstenmale beschrieben zu haben.

Canton hängte an einen Conductor, der mit dem Erdboden in Verbindung war, ein Paar Korkkugeln mittelst Leinenfäden an und näherte diesem Conductor bis zu einer hinlänglich großen Entfernung eine elektrisierte Glasröhre: er sah die Kugeln sich wechselseitig abstoßen, und zwar umsomehr, je näher die Röhre dem Conductor kam; die Kugeln fielen wieder vollständig in die Verticale zurück, wenn die Röhre entfernt wurde. Bei Pendeln, welche von Seidenfäden getragen wurden, beobachtete er die Abstoßung nur in einer viel kleineren Entfernung von der elektrisierten Röhre; diese Abstoßung erhielt

[1] Phil. trans. abridged., vol. X., p. 421 (1753).

sich längere Zeit, nachdem die Röhre schon entfernt war. Die Pendel wurden also in der Entfernung unter dem Einflusse der Glasröhre elektrisiert.

Die Influenz äußert sich auch auf einen schon elektrisierten Körper. Canton elektrisierte eine isolierte Röhre von Weißblech, die mit einem Paare von leitenden Pendeln versehen war. Als er diesem Körper eine elektrisierte Glasröhre immer näher und näher brachte, sah er die Pendel, welche voneinander entfernt waren, sich bis zur Berührung nähern und dann vom neuen divergieren. Wenn man die Röhre langsam entfernte, näherten sich die Kugeln wieder und divergierten dann, um ihre ursprüngliche Entfernung einzunehmen.

Canton bemerkte noch, dass, wenn man einen elektrisierten Körper dem mittleren Theile eines leitenden Cylinders, der isoliert und mit Pendeln an seinen Enden versehen war, nahe brachte und nach einigen Augenblicken den elektrisierten Körper entfernte, der Cylinder mit Elektricität geladen blieb, welche jener des influencierenden Körpers entgegengesetzt war. Gleichwohl scheint Canton die wahre Natur der Influenzerscheinungen nicht erkannt zu haben. Wilke(1) beobachtete, dass ein isolierter Körper von kleinen Dimensionen sich nicht merklich durch Influenz elektrisiert, und dass er — wenn er mit dem Erdboden in leitende Verbindung gebracht wird — sich mit Elektricität ladet, welche jener des influencierenden Körpers entgegengesetzt ist. Schließlich zeigte Aepinus(2), dass ein isolierter cylindrischer Conductor, dessen eines Ende einem elektrisierten Körper benachbart ist, in dem Theile, welcher dem elektrisierten Körper näher liegt, Elektricität annimmt, welche jener des influencierenden Körpers entgegengesetzt ist, hingegen in dem vom elektrisierten Körper entfernten Theile gleichnamige Elektricität empfängt: dies ist das vollständige Ergebnis der elektrischen Influenz.

82. Experimentelle Demonstration. Man zeigt diese wichtige Erscheinung durch einen Versuch, welcher sehr jenem von Aepinus ähnelt. Man lässt eine leitende elektrisierte

(1) Wilke, p. 73.

(2) Aepini tentamen, p. 129 (1758).

Kugel A (Fig. 47) auf einen horizontalen Cylinder BC, der in Kugelcalotten endigt, wirken; der Durchmesser des Cylinders ist viel kleiner als jener der Kugel, der Cylinder besitzt eine große Länge. Dieser wird von isolierenden Füßen getragen oder er wird noch besser auf Seidenfäden, die mit Schellack überfirnisst sind, aufgehängt; längs des Cylinders, und zwar an der Unterseite desselben, befestigt man an Leinenfäden eine Anzahl von Pendelpaaren, die aus Hollundermarkkugeln gebildet sind.

Wenn man die Kugel A, die z. B. mit positiver Elektricität geladen ist, dem einen Ende B des Cylinders nähert, so sieht man sogleich fast alle Pendel divergieren, daraus folgt schon, dass der Cylinder BC in seiner ganzen Ausdehnung elektrisch ist.

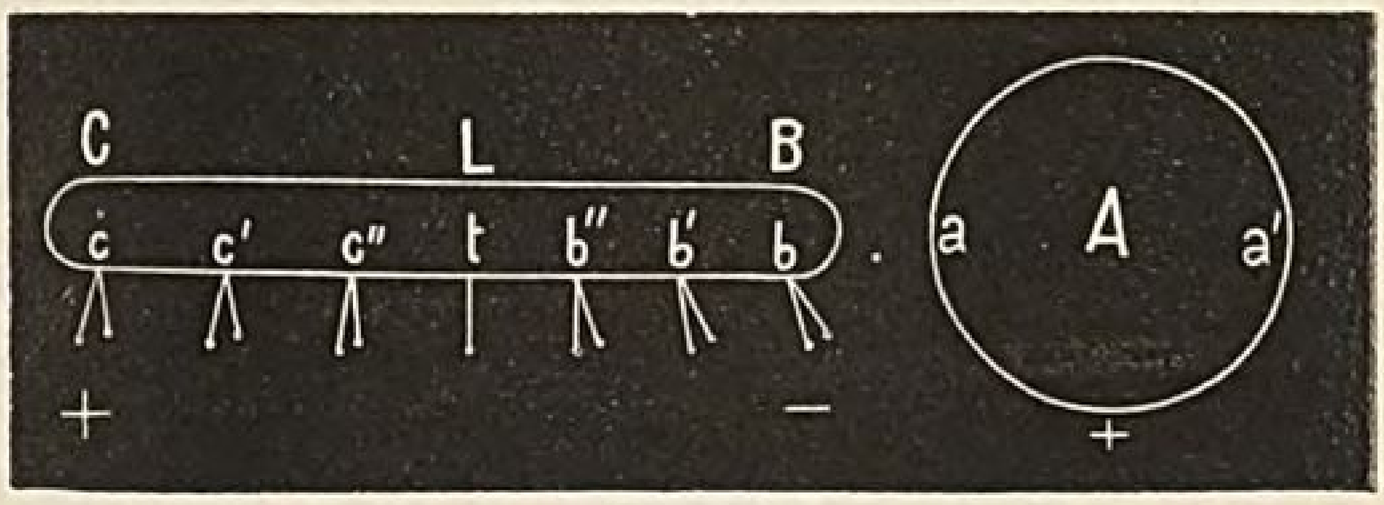


Fig. 47.

Gleichwohl erfolgt die Entfernung der Pendelkugeln in sehr ungleicher Weise. Die ersten Kugeln *b* divergieren stark und die Divergenz wird für die folgenden immer kleiner und kleiner, bis man ein Paar *t* antrifft, dessen Fäden vertical bleiben; geht man von dieser Stelle weiter, so beobachtet man wieder zunehmende Divergenzen, bis zum letzten in *c* befestigten Paare, welches indessen weniger divergiert als das erste. Man schließt daraus, dass die Dichte der elektrischen Schichte an den Enden des Cylinders maximal ist, dass sie immer kleiner und kleiner wird, je mehr man sich von den Enden entfernt, und dass in *t*, also ungefähr in der Mitte des Cylinders, aber ein wenig näher dem influencierenden Körper, es eine Linie L von nicht elektrisierten Punkten gibt, die man die neutrale Linie nennt.

Man bemerkt überdies, dass die Pendel *b*, *b'*, *b''*, welche an dem ersten Theile des Cylinders befestigt sind, sich alle gegen den influencierenden Körper neigen, insbesonders jene des ersten Paares; diese Pendel, und demzufolge der vordere Theil des Cylinders sind daher mit Elektricität geladen, welche jener des influencierenden Körpers entgegengesetzt ist.

Um zu bewahrheiten, dass der andere Theil LC des Cylinders mit Elektricität von derselben Art wie der influencierende Körper A geladen ist, wird man wahrnehmen können, dass die Pendelpaare c, c', c''... sich auf die entgegengesetzte Seite neigen; diese Abweichung ist aber im allgemeinen kaum zu bemerken, insbesonders wenn der Cylinder ziemlich lang ist, und man kann daraus wegen der Elektricität, die sich in BL vorfindet, keinen sehr strengen Schluss ziehen. Man berührt dann den influencierenden Körper A mit einer isolierten leitenden Kugel und nähert dieselbe den Pendeln c, c', c''. Man sieht, dass sie sämmtlich eine Abstoßung erfahren.

Schließlich sind die beiden Mengen positiver und negativer Elektricität, welche durch Influenz auf dem Cylinder erzeugt werden, gleich groß; denn wenn man den influencierenden Körper A entfernt, oder wenn man ihn mit der Hand berührt, so fallen alle Pendel in die Verticale zurück, und man findet auf dem Cylinder keine Spur von Elektricität mehr.

Dieses letztere Experiment gelingt wegen der Zerstreuung der Elektricität nicht immer, insbesonders wenn die Influenz eine gewisse Zeit hindurch gedauert hat. Am öftersten behält der Cylinder einen kleinen Überschuss an Elektricität, welche jener des influencierenden Körpers entgegengesetzt ist, weil die unvollkommen isolierenden Stützen und die Berührung der Luft die Rolle einer unvollständigen Verbindung mit dem Erdboden spielen; anderemale bleibt auf dem Cylinder Elektricität, welche jener des influencierenden Körpers gleichnamig ist, zurück, weil ihre mittlere Dichte schwächer ist und ihre Zerstreuung an die Luft weniger schnell vorsichgeht.

Schließlich, wenn diese beiden Ursachen nicht wirken oder sich gegenseitig aufheben, wird vorzugsweise positive Elektricität übrig bleiben, da die Zerstreuung der negativen Elektricität insbesonders für große Ladungen eine bedeutendere ist.

83. In derselben Zeit, in welcher die influencierende Kugel A den benachbarten ursprünglich im neutralen Zustande befindlichen Leiter elektrisiert, wirkt derselbe auf die Kugel zurück und verändert die Elektricitätsvertheilung auf ihr. Wenn man die beiden Punkte a und a' mit einem Probescheibchen berührt, so wird man nachweisen können, dass

die elektrische Dichte in a beträchtlich größer als in a' ist. Die elektrische Schichte des influencierenden Körpers hat sich somit gegen den benachbarten influencierten Conductor begeben. Man kann diese Eigenschaft in einer einfacheren Weise zur Anschauung bringen, wenn man als influencierenden Körper einen weiten und kurzen Cylinder, der mit einem Pendelpaare an jedem Ende versehen ist, wählt.

Wenn dieser Cylinder elektrisiert wird und sich von jedem Leiter ferne befindet, so haben die beiden Pendelpaare dieselbe Divergenz. Wenn man ihn aber einem Conductor, der isoliert ist oder nicht, nähert, so fallen die Pendel des entfernteren Punktes zusammen und jene am anderen Ende erhalten eine größere Divergenz.

84. Die Elektricität, welche auf einem Leiter durch Influenz hervorgerufen wurde, kann selbst wieder auf einen zweiten Leiter wirken und auf dem letzteren auch Elektricität durch Influenz entwickeln.

Um dies zu zeigen, genügt es, hinter dem Cylinder BC (Fig. 47) und in einer kleinen Entfernung von ihm einen zweiten Cylinder B'C', der ebenfalls isoliert und mit Pendelpaaren versehen ist, aufzustellen. Wenn man den influencierenden Körper A nähert, so sieht man gleichzeitig alle Pendel von BC und B'C' divergieren; um zu zeigen, dass die Divergenz dieser letzteren nicht von der directen Influenz des Körpers A herrührt, genügt es, den Cylinder BC zu entfernen, es fallen dann alle diese Pendel allsogleich zurück. Man wird überdies auf diesem zweiten Cylinder B'C' eine elektrische Vertheilung finden, welche jener des ersten Cylinders analog ist; es findet sich die entgegengesetzte Elektricität in der vorderen Partie des Cylinders, gleichnamige Elektricität in dem rückwärtigen Theile desselben. Dieser zweite Cylinder kann ebenso auf einen dritten wirken und so fort, aber die Wirkungen werden immer schwächer und schwächer.

Ein sehr sinnreicher Versuch von Wilke erklärt sich durch die successiven Influenzen. Zwei isolierte cylindrische Conductoren sind in einer kleinen Entfernung in derselben Richtung aufgestellt; zwischen den beiden Cylindern ist eine Korkkugel an einem Seidenfaden aufgehängt. Wenn man

einen elektrisierten Körper einem Ende nähert, bewegt sich die Korkkugel lebhaft von einem Conductor zum anderen und bleibt schließlich stille, wenn der influencierende Körper unbeweglich bleibt. Man entfernt dann den influencierenden Körper und die Bewegung der Kugel beginnt vom neuen und hört in demselben Grade wie zuvor wieder auf.

85. Nachdem einmal die Erscheinung der Influenz bekannt ist, muss man, immer den experimentellen Gesichtspunkt festhaltend, studieren, inwieferne verschiedene Umstände diese Erscheinung modificieren können.

Die Influenz ist umso größer, je kleiner die Entfernung des influencierenden vom influencierten Körper ist. Wenn man die influencierende Kugel entfernt, convergieren alle Pendel des Cylinders BC, und die neutrale Linie rückt in die Mitte des Cylinders. Nähert man die Kugel, so stoßen sich die Pendel immer mehr und mehr ab und die neutrale Linie nähert sich dem influencierenden Körper.

Die Influenzwirkung wächst mit der Länge des influencierten Leiters. Um dies zu zeigen, genügt es, den Cylinder BC in der Weise zu verlängern, dass man ihn im Punkte C mit einem anderen, ebenfalls isolierten Cylinder berührt; die Divergenz der benachbarten Pendel *b*, *b'*, *b''* wird größer und die neutrale Linie entfernt sich.

Wenn man den Cylinder BC in leitende Verbindung mit dem Erdboden setzt, indem man ihn im Punkte C mit der Hand berührt, ruft man dieselbe Wirkung hervor, als ob man diesen Conductor bis in die Unendlichkeit verlängert hätte; die Pendel *b*, *b'* divergieren noch mehr, der Cylinder ist in seiner ganzen Länge in merklicher Weise elektrisiert und die gesammte Elektricität hat ein Zeichen, das jenem der Elektricität des influencierenden Körpers entgegengesetzt ist; dasselbe Ergebnis stellt sich heraus, wo auch immer der berührte Punkt sich befinden mag. Wenn man z. B. den Finger in B ansetzt, so fallen die entfernten Pendel *c*, *c'* zusammen und die Pendel *b*, *b'* stoßen sich noch mehr ab, sie sind wieder mit entgegengesetzter Elektricität geladen und in jedem Punkte des Conductors findet man nur Elektricität, welche mit jener des influencierenden Körpers ungleichnamig ist; dieses Experiment wurde von Canton angestellt.

86. Man zeigt öfters die Influenzwirkungen mit etwas verschiedenen Apparaten. Man nimmt z. B. einen Cylinder BC (Fig. 48), an dessen Enden zwei leitende Pendel *b* und *c*, die von Metallstäbchen getragen werden, sich befinden. Wenn der Körper A elektrisiert ist, so weichen die Pendel *b* und *c* von ihren Stäbchen im entgegengesetzten Sinne aus. Unter dieser Form ist der Versuch nicht so beweisend, weil die Divergenz des Pendels *b* der Anziehung zugeschrieben werden kann, welche der Körper A ausübt, und nicht der Abstoßung des Stäbchens; es ist daher nicht bewiesen, dass das Ende B elektrisiert ist.

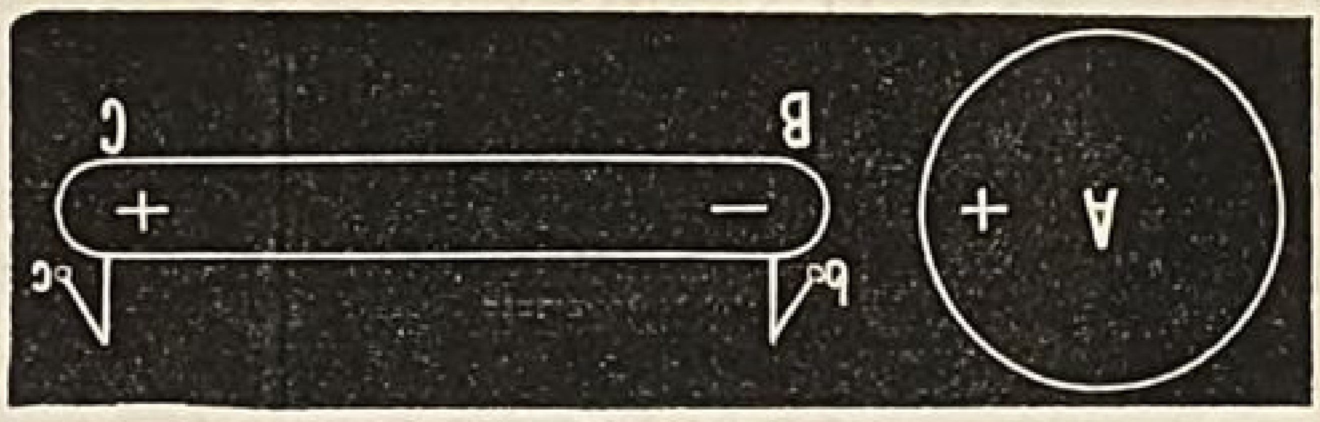


Fig. 48.

Riess([1]) hat den Cylinder vertical ober der influencierenden Kugel angeordnet (Fig. 49) und hat die leitenden Pendelchen längs des Cylinders befestigt; die Pendel entfernen sich vom Cylinder, wenn der letztere elektrisch ist. Diese Anordnung ist in den Vorlesungen vortheilhaft, weil die Erscheinung einem großen Auditorium ersichtlich gemacht werden kann; in der Theorie ist sie aber weniger wert, als die Anordnung von Aepinus, weil das Pendel *b* gleichzeitig der Attraction des Körpers A unterworfen ist, welcher es in die Verticale zurückzuführen strebt, und außerdem der Abstoßung von Seite des Cylinders; deshalb kommt es, dass beinahe immer die Divergenz dieses Pendels *b* geringer ist, als jene des obersten Pendels *c*. Es würde also daraus zu folgen scheinen, dass die elektrische Dichte in C größer als in B wäre, was der Wirklichkeit entgegengesetzt ist.

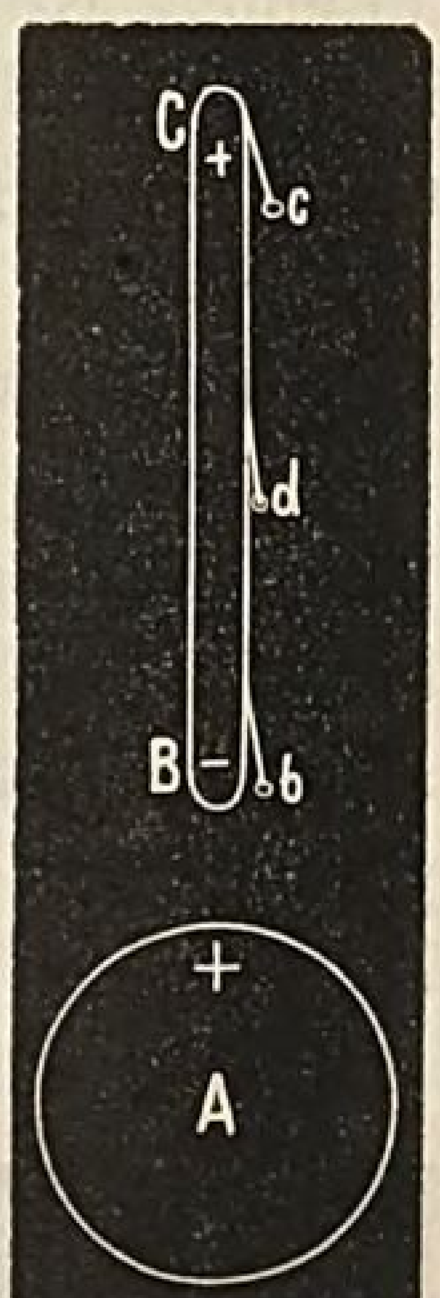


Fig. 49.

87. Elektrischer Funke. Wenn die Entfernung des influencierten und des influencierenden Körpers genügend klein ist, entsteht zwischen ihnen ein Lichtbüschel oder ein elektrischer Funke. Wenn dieser Funke entsteht, divergieren alle Pendel des Cylinders; der letztere ist in seiner ganzen Ausdehnung mit derselben Elektricität geladen, wie der

([1]) Reibungselektricität, Bd. I, pg. 178.

influencierende Körper; gleichzeitig wird die Ladung des influencierenden Körpers um soviel mehr geringer, die entgegengesetzt bezeichnete Elektricität ist verschwunden. Das schließliche Ergebnis ist dasselbe, als ob ein Theil der Elektricität des influencirenden Körpers auf den Cylinder mittelst des Funkens übergegangen wäre; dieser Wirkung geht aber eine Elektrisierung durch Influenz voran und der Funke hat auf den beiden Körpern gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Elektricitätsmengen zum Verschwinden gebracht. Dies ist die Erscheinung, welche man ausdrücken will, wenn man sagt, dass der elektrische Funke durch die Vereinigung oder durch die wechselseitige Neutralisation gleicher und entgegengesetzter Elektricitätsmengen zustande kommt.

88. Elementare Erklärung der elektrischen Influenz. Die Erscheinungen der Elektrisierung durch Influenz sind eine natürliche Consequenz der Hypothese der elektrischen Fluida; man kann sie als einen speciellen Fall des allgemeinen Problemes des elektrischen Gleichgewichtes auf der Oberfläche leitender Körper betrachten. Wenn verschiedene Conductoren in die Nachbarschaft elektrisierter Körper gestellt werden, muss — damit Gleichgewicht bestehe — die Resultierende der elektrischen Kräfte in allen Punkten eines jeden Conductors Null sein. Wenn die elektrische Kraft in einem Punkte nicht Null ist, so wird sie in ihm eine Zerlegung des neutralen Fluidums hervorrufen und eine neuerliche Vertheilung erzeugen, bis die Bedingung verwirklicht ist. Man kann also durch elementare Betrachtungen den allgemeinen Sinn des Influenzphänomenes darlegen und sogar in vollständiger Weise eine Anzahl von speciellen Fällen erörtern.

Setzen wir z. B. voraus, ein leitender Cylinder BC (Fig. 50) sei im neutralen Zustande und befinde sich in der Nähe einer elektrisierten Kugel A, die mit positiver Elektricität geladen ist.

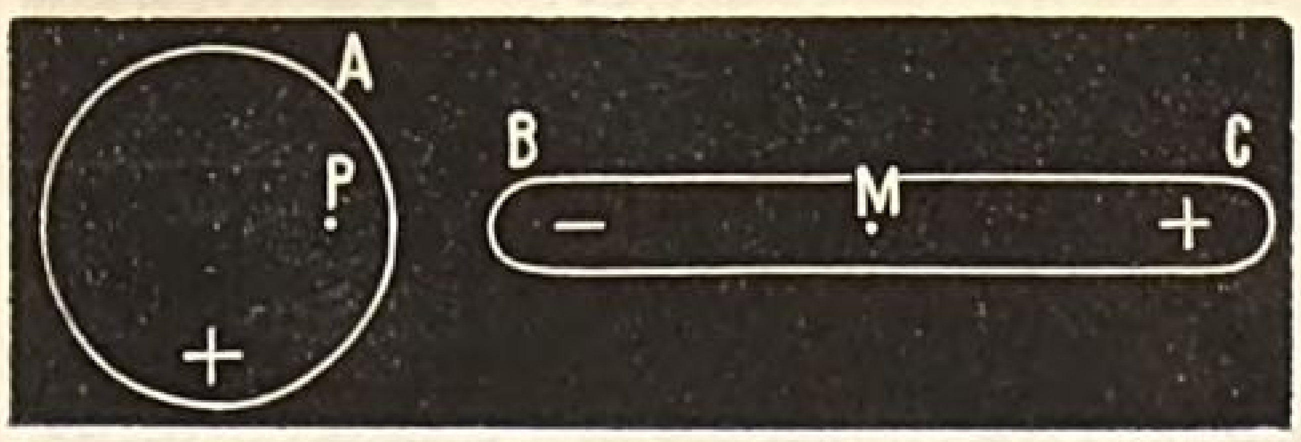


Fig. 50.

Gleichgewicht wird nicht stattfinden, denn in einem beliebigen Punkte M des Cylinders wird das positive Fluidum eines neutrales Fluidum enthaltenden

Elementes durch die Kugel abgestoßen, während das negative Fluidum angezogen wird; diese beiden Fluida trennen sich daher, das erste geht gegen das Ende C und das zweite gegen das Ende B; die Zerlegung wird solange dauern, bis die Resultante der Kräfte Null ist. Da die Wirkungen des negativen Fluidum von B und des positiven Fluidum von C in derselben Richtung auf den Punkt M stattfinden, so wird die einer beliebigen Axe parallele Composante A′ der in diesem Punkte durch den influencierenden Körper auf eine Menge Fluidum gleich der Einheit ausgeübten Wirkung der Summe der beiden parallel zu derselben Axe gerichteten Componenten B′ und C′ jener Wirkungen gleich sein müssen, welche in demselben Punkte durch die in B und in C gelegenen elektrischen Schichten ausgeübt werden. Man wird daher für irgendeinen im Innern des Cylinders gelegenen Punkt im Falle des Gleichgewichtes haben:

$$A' = B' + C'.$$

Die beiden neuen Elektricitätsmengen, welche gleich und vom entgegengesetzten Zeichen sind und auf dem Cylinder sich getrennt befinden, werden auf der Oberfläche zwei verschiedene Schichten bilden, die eine vorne, die andere rückwärts.

Umgekehrt hat sich die elektrische Vertheilung auf der Kugel geändert, ohne dass das natürliche Fluidum, welches in irgendeinem Punkte P, der im Innern dieses Conductors liegt, sich befindet, zerlegt würde; denn eine homogene, auf der Oberfläche der Kugel befindliche Elektricitätsschichte übt keine Wirkung in diesem Punkte aus und die negative Elektricität B des Cylinders, welche in einer geringeren Entfernung als die positive Elektricität C wirkt, würde eine Trennung der Fluida hervorrufen. Ein Theil des positiven influencierenden Fluidums begibt sich daher gegen den Cylinder.

Man sieht unmittelbar, dass die elektrische Zerlegung umso größer sein wird, je kleiner die Entfernung der beiden Körper sein wird; denn wenn man bei bestehendem Gleichgewichte den Cylinder nähert, vermehrt man die Wirkung der Kugel auf den Punkt M und die Elektricitätsmengen in B und in C werden sich vergrößern müssen, damit sich ein neuer Gleichgewichtszustand herstelle. Gleichzeitig wird die Veränderung

der Elektricitätsvertheilung, welche auf der Oberfläche des influencierenden Körpers vonstatten geht, ebenfalls vergrößert.

Ebenso muss sich die Ladung verstärken, wenn man den Cylinder verlängert; denn entfernt man die positive, am Ende C befindliche Elektricität, so vermindert man ihre Wirkung in einem Punkte M und das Gleichgewicht kann nur durch eine neue Decomposition wieder hergestellt werden. Wenn die Länge des Cylinders unendlich ist oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn dieser Conductor in Verbindung mit dem Erdboden gesetzt wird, so ist die positive Elektricitätsmenge so sehr entfernt, dass sie keine merkliche Wirkung im Punkte M ausübt, die negative Ladung wird noch größer und die frühere Gleichung reduciert sich auf $A' = B'$. Die negative, durch Influenz entwickelte Elektricität ist dann am größten, sie ist aber immer kleiner als jene des influencierenden Körpers, weil sie auf einen Punkt des nicht isolierten Conductors in einer kleineren Entfernung wirkt, und die von ihr ausgeübte Kraft gleich jener ist, welche der influencierende Körper auf denselben Punkt äußert.

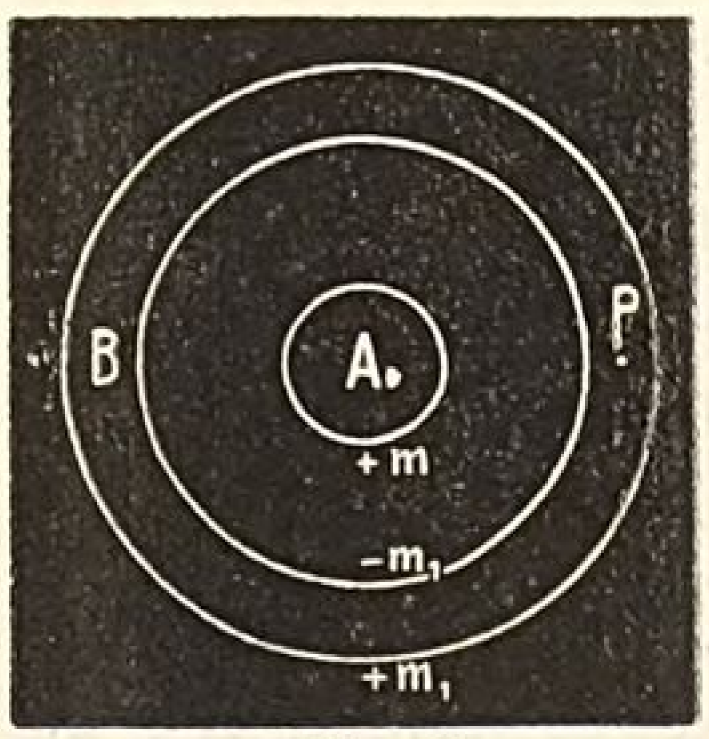


Fig. 51.

Man würde sich ebenso die Influenzwirkung des ersten isolierten Cylinders auf einen zweiten zurechtlegen, so dass diese sehr einfachen Betrachtungen genügen, um über die Hauptmomente der Erscheinung Rechenschaft zu geben.

89. Fall concentrischer Kugeln. Das Problem kann vollständig behandelt werden, wenn der influencierende Körper eine Kugel A (Fig. 51) und der influencierte Körper eine leitende Schichte B ist, die von zwei zur ersten concentrischen Kugelflächen eingeschlossen ist. Die Kugel besitzt eine Menge $+ m$ an positiver Elektricität, der Leiter nimmt eine negative Elektricitätsmenge $- m_1$ auf seiner inneren Oberfläche und eine Menge $+ m_1$ auf seiner äußeren Oberfläche an. Zufolge der Symmetrie sind diese drei Schichten homogen; damit Gleichgewicht herrsche, muss die Resultierende der elektrischen Kräfte in irgendeinem Punkte der beiden Leiter Null sein. Die Kraft ist Null in allen Punkten der Kugel A, weil die

drei Elektricitätsschichten sphärisch und homogen sind und sämmtlich den Leiter A umschließen. In einem Punkte P des Leiters B übt die äußere Schichte $+ m_1$ auch keine Wirkung aus; die beiden Schichten $- m_1$ und $+ m$, zu welchen der Punkt P ein äußerer ist, wirken in diesem Punkte so, als ob ihre Maßen im gemeinschaftlichen Mittelpunkte vereinigt wären; es müssen daher, damit die Resultante Null sei, diese beiden Elektricitätsmengen gleich und entgegengesetzt bezeichnet sein. Es erzeugt somit eine elektrische Ladung $+ m$ auf der Kugel A durch Influenz eine gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Ladung auf der inneren Oberfläche des Leiters B und eine andere gleiche und gleichbezeichnete Ladung, welche auf der äußeren Oberfläche dieses Leiters angeordnet ist.

Bemerken wir noch, dass die äußere Schichte $+ m_1$ für sich selbst sich im Gleichgewichte befindet; wenn man dem Conductor B irgendeine positive oder negative Elektricitätsmenge ertheilt, so wird sich diese neue Menge auf der Oberfläche vertheilen, als ob das Innere voll wäre und wird sich zur Elektricitätsschichte $+ m_1$ algebraisch summieren. Im Speciellen: wenn die so zugeführte Elektricitätsmenge gleich $- m_1$ ist oder auch, wenn der Leiter B in Verbindung mit dem Erdboden gesetzt ist, wird seine Oberfläche im neutralen Zustande sich befinden und nichts wird in der Elektricitätsvertheilung der inneren Schichten geändert. Man kann noch bemerken, dass, wenn der Leiter B in Verbindung mit dem Erdboden gesetzt ist, die Resultante der Wirkungen der beiden Schichten $+ m$ und $- m_1$ auf einen beliebigen äußeren Punkt Null ist.

90. Theorem von Faraday. In Wirklichkeit ist dies nur ein specieller Fall eines allgemeinen von Faraday ausgesprochenen Theorems, das wir später erweisen werden:

„Wenn ein elektrisierter Körper A vollständig von einem beliebig gestalteten Leiter B begrenzt wird, so bildet sich durch Influenz auf der inneren Oberfläche dieses Leiters eine Schichte, welche eine gleiche und entgegengesetzt wie die des influencierenden Körpers bezeichnete Quantität an Elektricität besitzt, deren Verthei-

lung von der Lage und Gestalt des elektrisierten Körpers abhängt, und auf der äußeren Oberfläche des Leiters eine Schichte von der gleich großen Menge Elektricität, die regelmäßig vertheilt ist so, als ob im Innern keine Elektricität wäre. Wenn der Conductor B in leitende Verbindung mit dem Erdboden gebracht wird, so verschwindet die äußere Schichte, die inneren Schichten werden nicht geändert und üben keine Wirkung auf einen äußeren Punkt aus.“

Man kann dieses Theorem durch einige bemerkenswerte Versuche von Faraday(¹) bestätigen.

Ein Metallcylinder A (Fig. 52), der gut isoliert ist, wird durch einen leitenden Draht mit einem ziemlich entfernten Elektroskope E in Verbindung gesetzt. Man führt in den Cylinder eine Kugel C ein, die von einer isolierenden Handhabe getragen wird und z. B. mit positiver Elektricität geladen ist. Die Strohhalme divergieren und sind auch positiv elektrisch; die Divergenz wird umso größer, je tiefer man die Kugel C einführt, bis diese Kugel ein bestimmtes Niveau erreicht hat; von diesem Momente ausgehend bleibt die Divergenz der Goldblättchen constant, welche Stellung die Kugel auch immer einnehmen möge und sie ändert sich auch dann nicht, wenn die Kugel den Cylinder berührt. Dann bildet der inducierende mit dem inducierten Körper eine einzige leitende Masse und es kann sich im Innern dieses Leiters keine Spur von Elektricität vorfinden; es musste deshalb auf der Innenseite des inducierten Körpers eine elektrische Schichte entstanden sein, welche jener des inducierenden Körpers gleich und vom entgegengesetzten Zeichen ist; deshalb bildet sich auf der Außenseite des influencierten Körpers eine Elektricitätsschichte, die

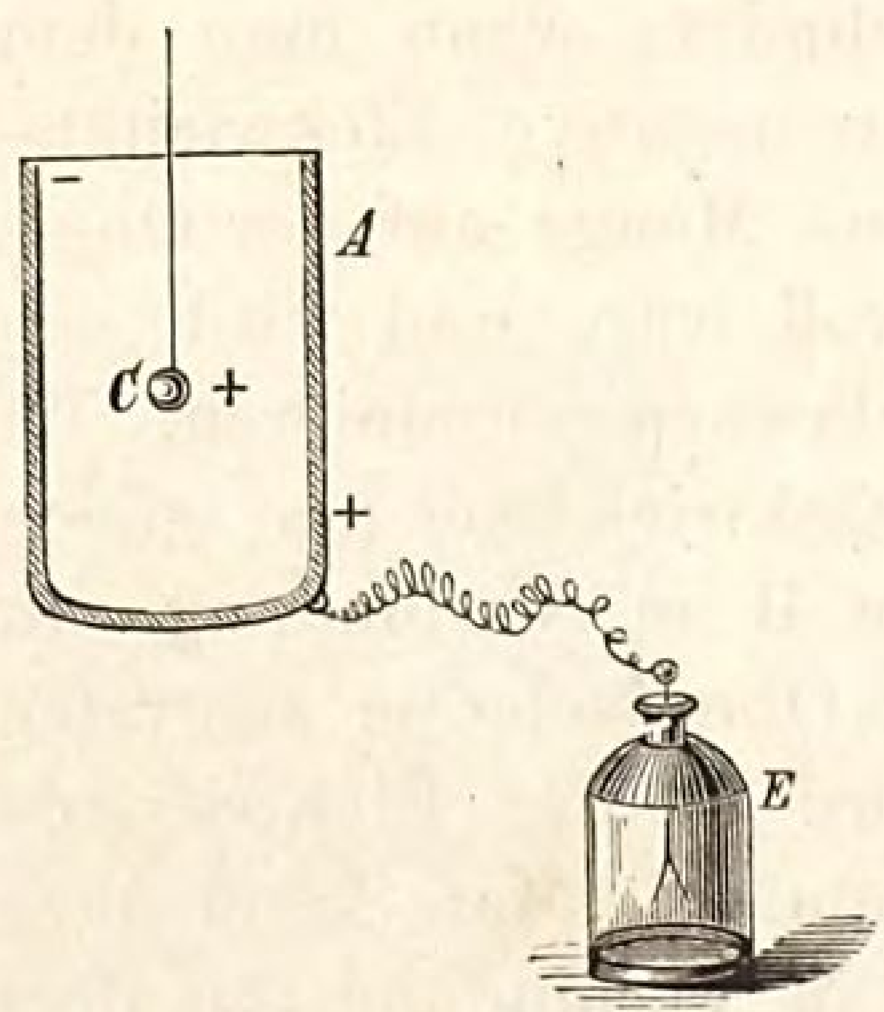


Fig. 52.

(¹) Experimental Researches, t. II., p. 279.

der des influencierenden Körpers gleich und auch von demselben Zeichen ist.

Fassen wir dies zusammen, so können wir sagen, dass dieses Experiment von Faraday zur Genüge zeigt, dass die auf der äußeren Oberfläche des Cylinders ausgebreitete Elektricitätsschichte jener gleich ist, welche die Kugel C besitzt und dass sie regelmäßig vertheilt ist; wenn man diese Kugel nach der Berührung entfernt, erfährt man in der That, dass sie im neutralen Zustande sich befindet. Der Cylinder verhält sich also wie ein vollständig geschlossener Leiter, wenn man von dem Momente ausgeht, in welchem die Öffnung des Cylinders von der Kugel C unter einem so kleinen Winkel gesehen wird, dass man die Influencierung, welche sich in dieser Richtung äußern würde, vernachlässigen kann.

Faraday hat den Versuch noch in vollständigerer Weise gemacht, indem er vier concentrische Cylinder (Fig. 53) in

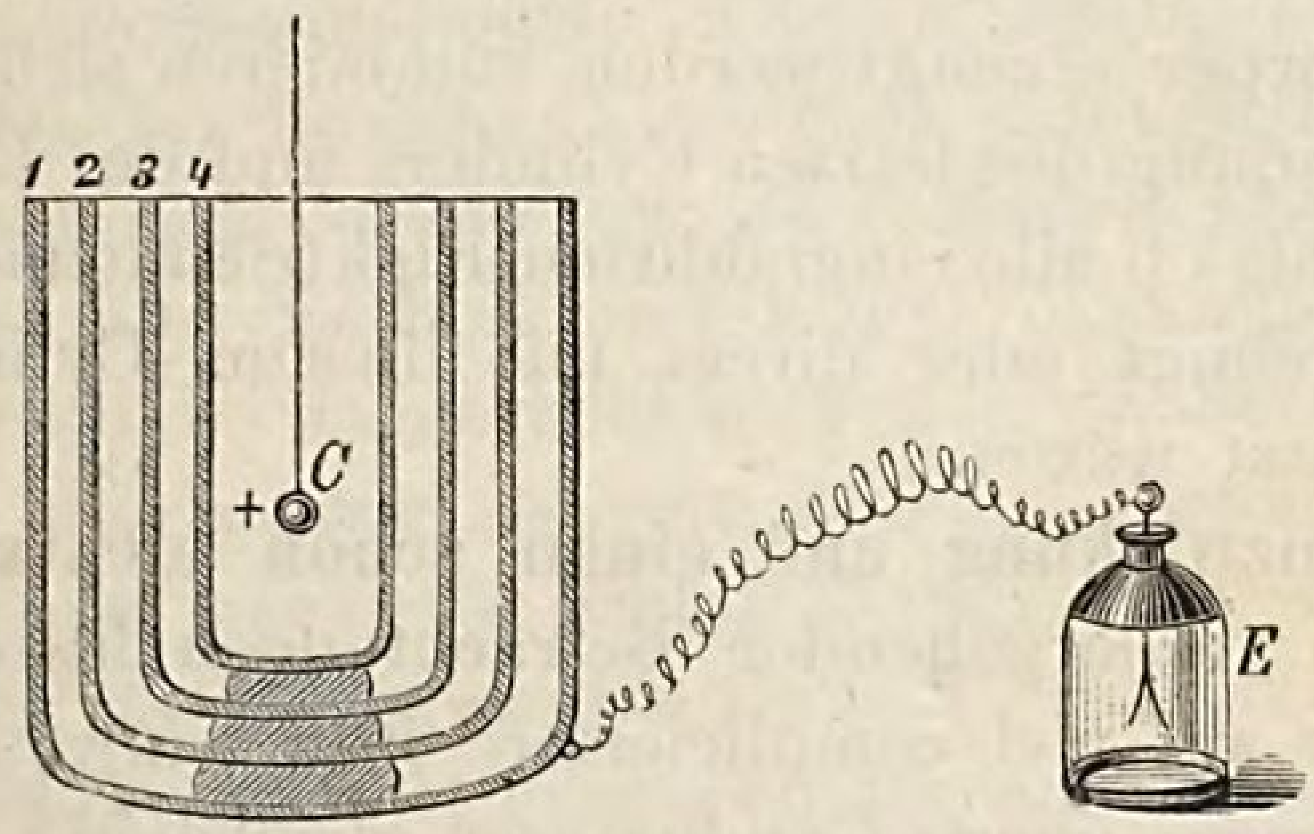


Fig. 53.

Anwendung brachte, welche durch Schellackstücke voneinander getrennt waren; der letzte Cylinder war mit dem Elektroskope in Verbindung gesetzt. Wenn man eine elektrisierte Kugel in die centrale Höhlung einführt, so divergieren die Blättchen des Elektroskopes, als ob die dazwischenliegenden Cylinder nicht da wären. Jeder von ihnen besitzt zwei Elektricitätsschichten von entgegengesetzten Zeichen, die sämmtlich an absolutem Werte der Elektricitätsschichte der Kugel C gleich sind; die auf der Außenfläche des letzten Cylinders befindliche Ladung ist dieselbe, als ob alle zwischenliegenden Cylinder weggenommen worden wären und sie ändert sich

nicht, wenn man diese Cylinder in Verbindung setzt oder wenn man sie mit der elektrisierten Kugel C berührt.

Wenn man beim ursprünglichen Stande der Dinge den inneren Cylinder Nr. 4 in Verbindung mit dem Erdboden bringt, fallen die Blättchen des Elektroskopes zurück und die folgenden Cylinder befinden sich alle im neutralen Zustande; die beiden übrig bleibenden Schichten, die positive auf C und die negative auf dem benachbarten Cylinder, üben auf jeden äußeren Punkt die Wirkung Null aus. Wenn man in derselben Weise einen anderen beliebigen Cylinder mit dem Erdboden in leitende Verbindung gebracht hat, so wird jeder Cylinder, welcher außerhalb ihm liegt, in den neutralen Zustand zurückkehren.

Endlich kann man in die centrale Höhlung eine oder mehrere elektrisierte Kugeln oder elektrisierte Körper von was immer für einer Gestalt und materieller Beschaffenheit einführen, Leiter oder Nichtleiter; die Elektricitätsschichten, welche durch jeden der Körper erzeugt werden, summieren sich algebraisch; die äußere Ladung des letzten Cylinders und des Elektroskopes ist dieselbe, als ob alle eingeführten Elektricitätsmengen untereinander vereinigt oder direct mit diesem Cylinder in Verbindung gesetzt wären.

91. Influenzwirkung auf einen schon elektrischen Conductor. Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf viel compliciertere Fälle anwenden.

Wenn mehrere isolierte Conductoren gleichzeitig der Influenzwirkung eines elektrisierten Körpers unterworfen werden, erhält jeder von ihnen zwei entgegengesetzte Elektricitätsschichten derart, dass die resultierende elektrische Kraft der Wirkung aller Schichten in irgendeinem Punkte eines Conductors Null ist. Man erkennt leicht, dass mehrere Cylinder, welche in dieser Weise hintereinander aufgestellt werden, sämmtlich in derselben Weise elektrisiert werden, positiv auf der einen und negativ auf der anderen Seite.

Wenn der Conductor, dem man einen elektrisierten Körper nahebringt, schon selbst elektrisch ist, so wird sich die Influenz auf ihn nicht weniger äußern, wie wir schon aus einem Experimente von C a n t o n ersehen haben. Der elektrische

Zustand des influencierten Körpers kann als hervorgerufen durch die Übereinanderlagerung zweier verschiedenen elektrischen Schichten betrachtet werden: 1. jener Schichte, welche ursprünglich besteht und ihre Vertheilung beibehält; 2. jener, welche durch die Elektricität des influencierenden Körpers in dem Zustande, den sie gegenwärtig besitzt, hervorgerufen wird. Die erstere ist für sich selbst im Gleichgewicht und übt in der That keine Wirkung auf einen im Innern des Conductors liegenden Punkt aus; die zweite Schichte gibt auch mit der Elektricität des influencierenden Körpers in jedem Punkte dieses Conductors eine Resultante Null und demzufolge herrscht Gleichgewicht.

Diese Betrachtung gestattet leicht den Gang der Erscheinung vorauszusehen. Wenn ein Cylinder BC (Fig. 50) der Influenz einer positiv elektrischen Kugel unterworfen ist und ursprünglich mit positiver Elektricität geladen war, so wird das entfernte Ende immer positiv sein. In demselben Maße aber als man den influencierenden Körper nähert, wird die Elektricitätsschichte im Punkte B, welcher anfänglich positiv war, nach und nach sich vermindern, dann Null werden und endlich negativ, wenn die Ladung der Kugel A genügend groß ist; die am Punkte B angebrachten Pendel nähern sich daher zuerst, dann divergieren sie vom neuen. Wenn der Cylinder ursprünglich mit negativer Elektricität geladen war, so werden sich dieselben Änderungen am Ende C vollziehen; man wird in diesem Punkte die Pendel sich bis zur Berührung nähern und dann wieder divergieren sehen; sie sind diesmal mit positiver Elektricität geladen.

92. Versuche von Coulomb. Wir werden im weiteren Verlaufe die Zusammenstellung der von Coulomb bezüglich der elektrischen Influenz angestellten Versuche geben. Diese Versuche waren nicht so zahlreich, ohne Zweifel, weil die Probleme dieser Art im allgemeinen große Schwierigkeiten sowohl vom experimentellen Gesichtspunkte, als auch vom Standpunkte der Rechnung aus bieten.

Coulomb hat zuerst den Fall zweier leitenden Kugeln, die ursprünglich in Berührung und elektrisiert waren, studiert. Wenn die Berührung stattfindet, so weiß man, dass die beiden

Oberflächen keine merkliche Elektricität in einer gewissen Ausdehnung um den Berührungspunkt haben.

Wenn die Kugeln vom gleichen Durchmesser sind und man trennt sie, so erscheint die Elektricität in den einander nächsten Punkten und wird allmählig immer größer, je mehr man sie von einander entfernt, bis die Entfernung so groß ist, dass die elektrischen Schichten nahezu homogen sind. In keinem Punkte bemerkt man Elektricität, welche der ursprünglichen Ladung entgegengesetzt wäre.

Haben die Kugeln A und B verschiedene Durchmesser (Fig. 54) und entfernt man sie bis in eine geringe Distanz (Fig. 55), so erscheint Elektricität in den beiden Punkten *a*

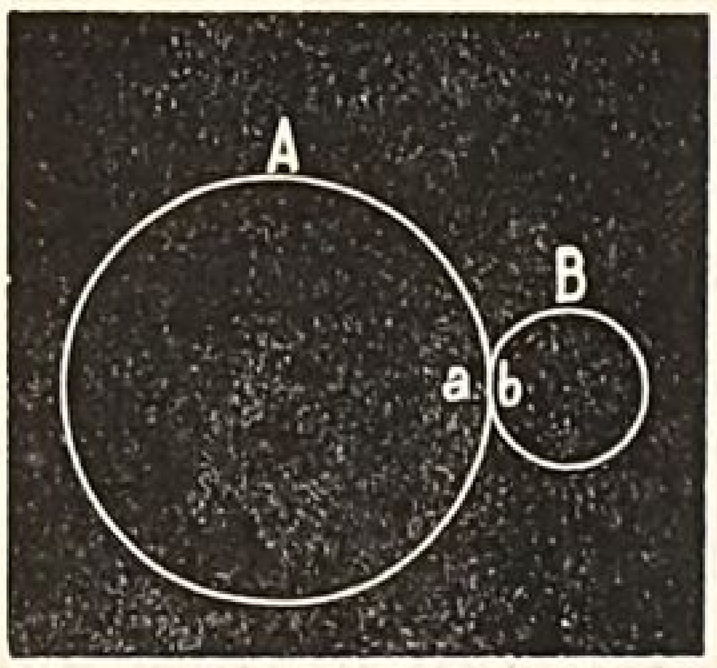


Fig. 54.

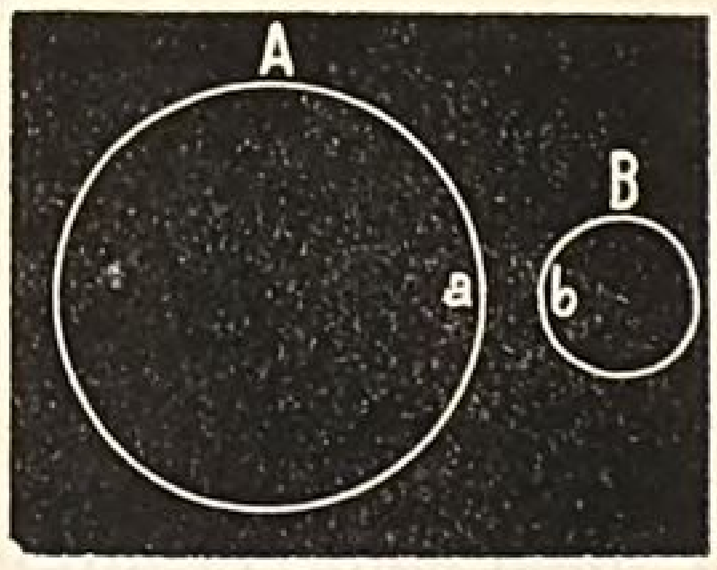


Fig. 55.

und *b*, welche die benachbartesten sind und auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser liegen; in *a* auf der großen Kugel ist aber die Elektricität gleichbezeichnet mit der ursprünglichen Ladung, in *b* hat sie das entgegengesetzte Zeichen, so dass es auf der kleinen Kugel B zwei Elektricitätsschichten von verschiedenem Zeichen gibt, die durch eine neutrale Linie getrennt sind. Entfernt man die Kugel B mehr, so vergrößert sich zuerst die Ladung des Punktes *b*, dann wird sie bis Null abnehmen, um hierauf das Zeichen zu wechseln und vom neuen anzuwachsen, bis die Entfernung so groß ist, dass die Influenz vernachlässigt werden kann. Die folgende Tabelle gibt die Resultate einiger Versuche an, die Coulomb bezüglich dieses Gegenstandes angestellt hat. Die beiden ersten Columnen geben die Durchmesser der beiden Kugeln A und B an, und die dritte die Entfernung der beiden Kugeln im Augenblicke, in welchem die elektrische Dichte in dem nächsten Punkte *b* der kleinen Kugel Null ist.

A	B	Entfernung
11 Zoll	11 Zoll	0
11 „	8 „	1 Zoll
11 „	4 „	2 „
11 „	2 „ und noch darunter	2 „ 5 Linien

Poisson hat auf dem Wege der Rechnung das allgemeine Problem behandelt, indem er annahm, dass die beiden Kugeln, deren gegenseitige Influenz er studierte, in derselben Weise elektrisiert wurden, aber in einem Verhältnisse, welches verschieden ist von jenem, das aus der Berührung resultieren würde, oder auch, dass die beiden Kugeln mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen sind. Im ersteren Falle werden, wie es leicht vorauszusehen ist, in einer hinreichend kleinen Entfernung die beiden gegenüberliegenden Punkte mit verschiedenen Elektricitäten geladen sein und es wird auf jener der beiden Kugeln, deren Gesammtladung kleiner ist, als sie durch die Berührung gewesen wäre, Elektricität sich vorfinden, welche das entgegengesetzte Vorzeichen der allgemeinen Ladung hat. In einer noch geringeren Entfernung wird ein Funke entstehen und die allgemeine Ladung wird sich in regelmäßiger Weise unter die beiden Kugeln theilen. — Im zweiten Falle, in welchem die Kugeln mit entgegengesetzten Elektricitätsmengen geladen sind, kann es wieder in einer gewissen Entfernung und bei passender Ladungsmenge dazu kommen, dass die entferntesten Punkte an den beiden Enden des gemeinschaftlichen Durchmessers gleichnamige Elektricitätsmengen erhalten, wobei eine neue elektrische Decomposition infolge der Influenz auf einem der vorhandenen Conductoren stattfindet. In einer hinreichend kleinen Entfernung entsteht abermals ein Funke und die beiden Körper theilen untereinander die algebraische Summe der ursprünglichen Ladungen, d. h. den Überschuss der einen über der andern.

93. Coulomb stellte sodann zwei Kugeln B und C von 2 Zoll Durchmesser (Fig. 56) so auf, dass sie sich berührten;

sie waren ursprünglich im neutralen Zustande und befanden sich in einer Entfernung von 2 Zoll von einer elektrisierten Kugel A, die 8 Zoll im Durchmesser hatte. Wurden die beiden Kugeln getrennt, so hatten sie gleiche Elektricitätsmengen von entgegengesetztem Zeichen; das Verhältnis der elektrischen mittleren Dichten auf A und auf der einen der Kugeln B oder C war

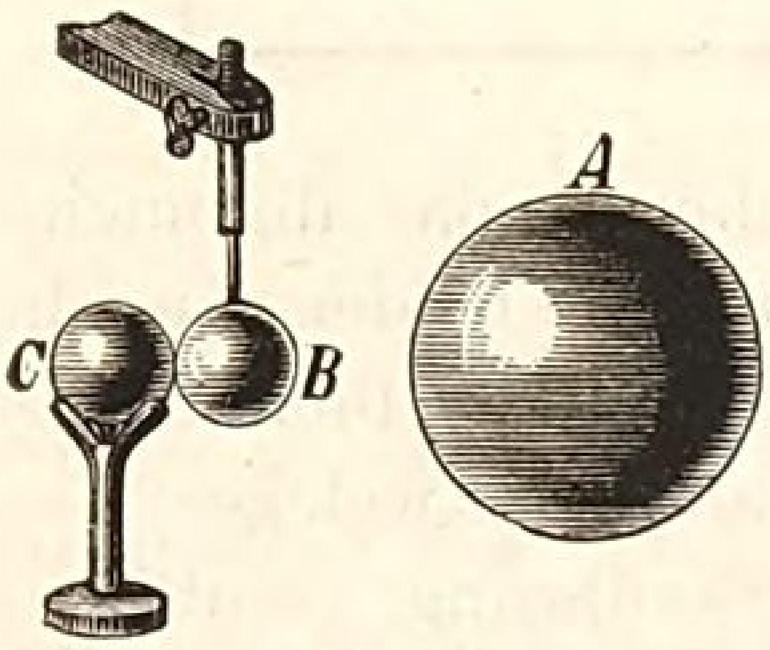


Fig. 56.

$$\frac{A}{B} = 2{\cdot}70.$$

Stellte er ebenso in einer Entfernung von 2 Zoll von der Kugel A vier andere gleiche Kugeln B_1, B_2, B_3, B_4, die in der Ordnung der Indices angeordnet sind, auf, so fand er für die mittleren Dichten:

$$A = -\ 1{\cdot}50\ B_4 = 2{\cdot}20\ B_1\,;$$

die Elektricitätsmenge der äußersten kleinen Kugeln wächst daher, wenn man ihre Zahl vermehrt.

94. Wenn ein Cylinder B (Fig. 57), der von einer halbkugelförmigen Calotte begrenzt ist und mit dem Erdboden in Verbindung steht, nahe bei einer elektrisierten Kugel aufgestellt ist, so ist die elektrische Dichte β im Punkte *b* des Cylinders, welcher der Kugel am meisten benachbart ist, fast umgekehrt der Potenz $\frac{3}{2}$ der Entfernung dieses Punktes vom Centrum der Kugel proportional.

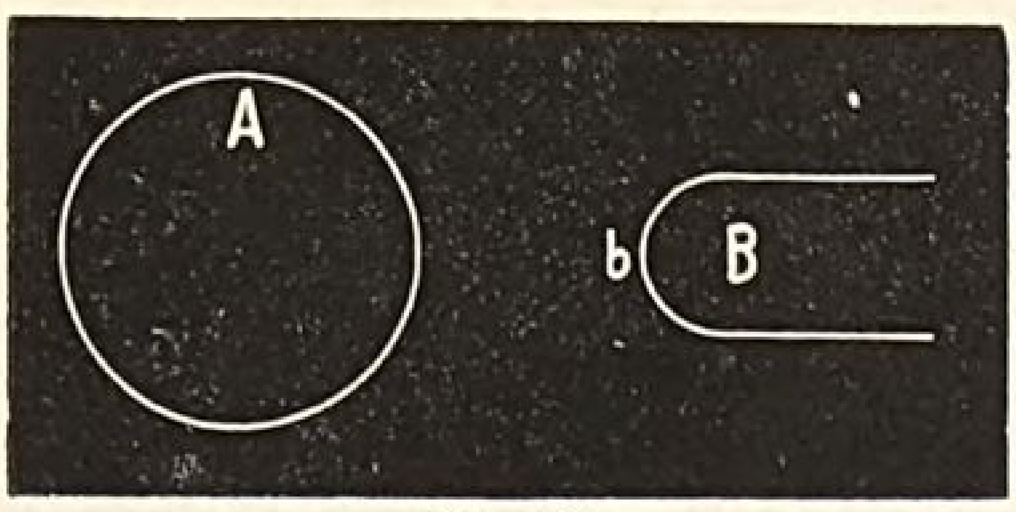


Fig. 57.

Bringt man in dieselbe Entfernung verschiedene Cylinder, so ist die elektrische Dichte im Punkte *b* umgekehrt proportional dem Durchmesser des Cylinders, wenn nur dieser Durchmesser im Verhältnis zu jenem der Kugel A sehr klein ist. Weiters ist die elektrische Dichte im Punkte *b*, wie groß auch immer der Durchmesser des Cylinders sein mag, das doppelte jener, welche auf den verschiedenen Punkten eines zur Axe normalen Schnittes stattfindet, der in einer dem Durchmesser des Cylinders gleichen Entfernung vom Punkte *b* ge-

macht wurde. Dies zusammenfassend, hat man nahezu, wenn man mit α die mittlere Dichte der Kugel, ferner mit R und r die Halbmesser der Kugel und des Cylinders und mit d die kleinste Entfernung der beiden Oberflächen bezeichnet:

$$\frac{\beta}{\alpha} = -m \frac{R^2}{(R+d)^{\frac{3}{2}} r}.$$

Für $R = 4$ Zoll, $r = \frac{1}{2}$ Zoll, $d = 2{\cdot}5$ Zoll, hat der Versuch ergeben $\frac{\beta}{\alpha} = -4$; man erhält daraus $m = 2{\cdot}7$.

Diese Formel hat ohne Zweifel keinen theoretischen Wert, welcher es gestattet, sie mit den Ergebnissen des Calcüls zu vergleichen, man kann aber aus ihr Folgerungen ziehen, die vom praktischen Standpunkte interessant sind. Man begreift mittelst ihrer Hilfe die Rolle der langen cylindrischen Conductoren in den Elektrisiermaschinen und man erkennt auch, warum man lieber Cylinder von kleinen Durchmessern in den Versuchen über elektrische Influenz zur Anwendung bringt, wenn man wünscht, dass die Pendel große Divergenzen erfahren.

95. Dieselbe Formel wird noch dazu dienen, einen Begriff von der Wirksamkeit der Blitzableiter zu geben. Nehmen wir z. B. mit Coulomb [1] an, dass man hätte:

$$R = 1000 \text{ Fuß}$$
$$d = 500 \text{ Fuß}$$
$$2r = 1 \text{ Zoll},$$

was ungefähr dem Falle einer elektrisierten Wolke von 2000 Fuß im Durchmesser, die in einer Entfernung von 500 Fuß von einem Blitzableiter, welcher an seinem Ende 1 Zoll Durchmesser hat, sich befindet, entsprechen wird. Mit dem vorhergehenden Werte von m liefert die Formel:

$$\frac{\beta}{\alpha} = -278.$$

Da in Wirklichkeit die Potenz, auf welche man die Entfernung $(R+d)$ erheben muss, kleiner als $\frac{3}{2}$ ist, so folgt

(1) Mémoires de l'Académie (1788), p. 690.

daraus, dass die elektrische Dichte an der Spitze des Blitzableiters im absoluten Werte größer als das 278fache der elektrischen Dichte an der Oberfläche der Wolke ist. Man begreift, dass, wenn die Influenz der Wolke nicht zu stark ist, die Elektricität in einer continuierlichen Weise entweicht und die Wolke ohne Hervorrufung eines Funkens entladet.

96. Ein letzter Versuch von Coulomb bezieht sich auf den Fall einer kreisförmigen leitenden Scheibe BC (Fig. 58) von 16 Zoll im Durchmesser, die mit dem Erdboden in leitende Verbindung gesetzt ist und sich gegenüber einer elektrisierten Kugel A von 8 Zoll Durchmesser befindet. Die Dichte der Elektricität im Mittelpunkte B der Scheibe steht im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate der Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte der Kugel. Dieser Versuch bietet ein specielles Interesse wegen der Methode, welche Coulomb zur Anwendung gebracht hat. Um die Dichte im Punkte B zu bestimmen, ohne Gefahr zu laufen, die Elektricitätsvertheilung durch Annäherung des Probescheibchens zu stören, hat Coulomb in diesem Punkte eine kleine Öffnung angebracht, so zwar, dass — wenn er sich hinter die Scheibe stellte und in diesem Punkte die Probescheibe anlegte, die Oberfläche der Scheibe vervollständigt und continuierlich war; entfernte er dann die Probescheibe, so entfernte er sozusagen einen Theil der Oberfläche selbst.

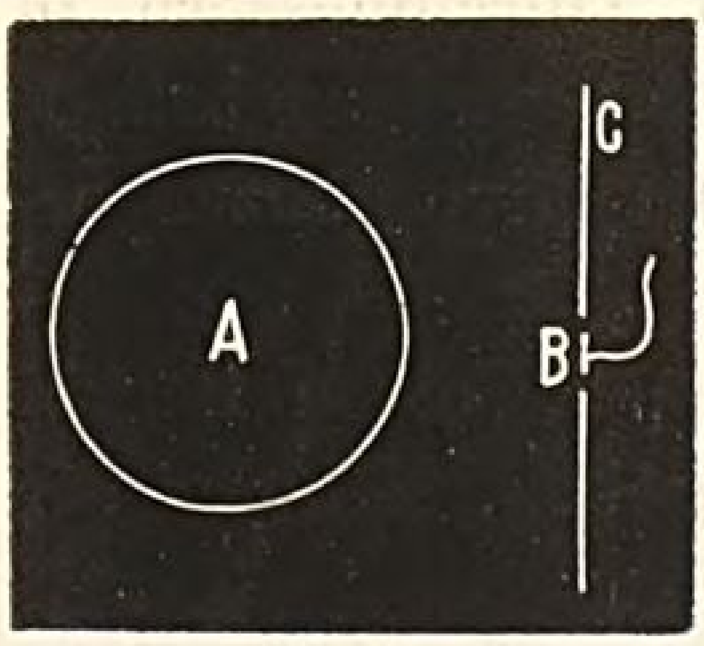


Fig. 58.

97. Rolle der Spitzen in den Erscheinungen der Influenz. Die Eigenschaft der Spitzen, von Conductoren, mit welchen sie in leitender Verbindung sind, Elektricität entweichen zu lassen, gestattet in gewissen Fällen die Wirkungen der Influenz zu modificieren.

Wenn das entfernte Ende C des influencierten Körpers (Fig. 47) mit einer Spitze versehen ist, entweicht die Elektricität, welche mit der des influencierenden Körpers gleichnamig ist, durch die Spitze, wie man an dem im Dunkeln auftretenden Lichtbüschel ersieht und der Cylinder wird schließlich genau dieselbe Elektricitätsmenge besitzen, als ob er in Verbindung mit dem Erdboden gebracht worden wäre.

Wird die Spitze an der neutralen Linie angebracht, so wird sich keine Wirkung äußern. Wenn sie auf die vordere Partie des Cylinders gebracht wird, z. B. in den Punkt B, so lässt sie entgegengesetzte Elektricität entweichen, welche einen Theil der Elektricität des influencierenden Körpers neutralisiert und der Cylinder erhält eine größere Menge gleichnamiger Elektricität, als wenn ein Funke entstanden wäre. Das dann entstehende Lichtbüschel ist in der That nichts anderes, als ein System aufeinanderfolgender kleiner Funken. Wenn der Conductor mit dem Erdboden leitend verbunden wird, dauert das Entweichen der entgegengesetzten Elektricität durch die Spitze fort, bis der influencierende Körper fast auf den neutralen Zustand gebracht ist.

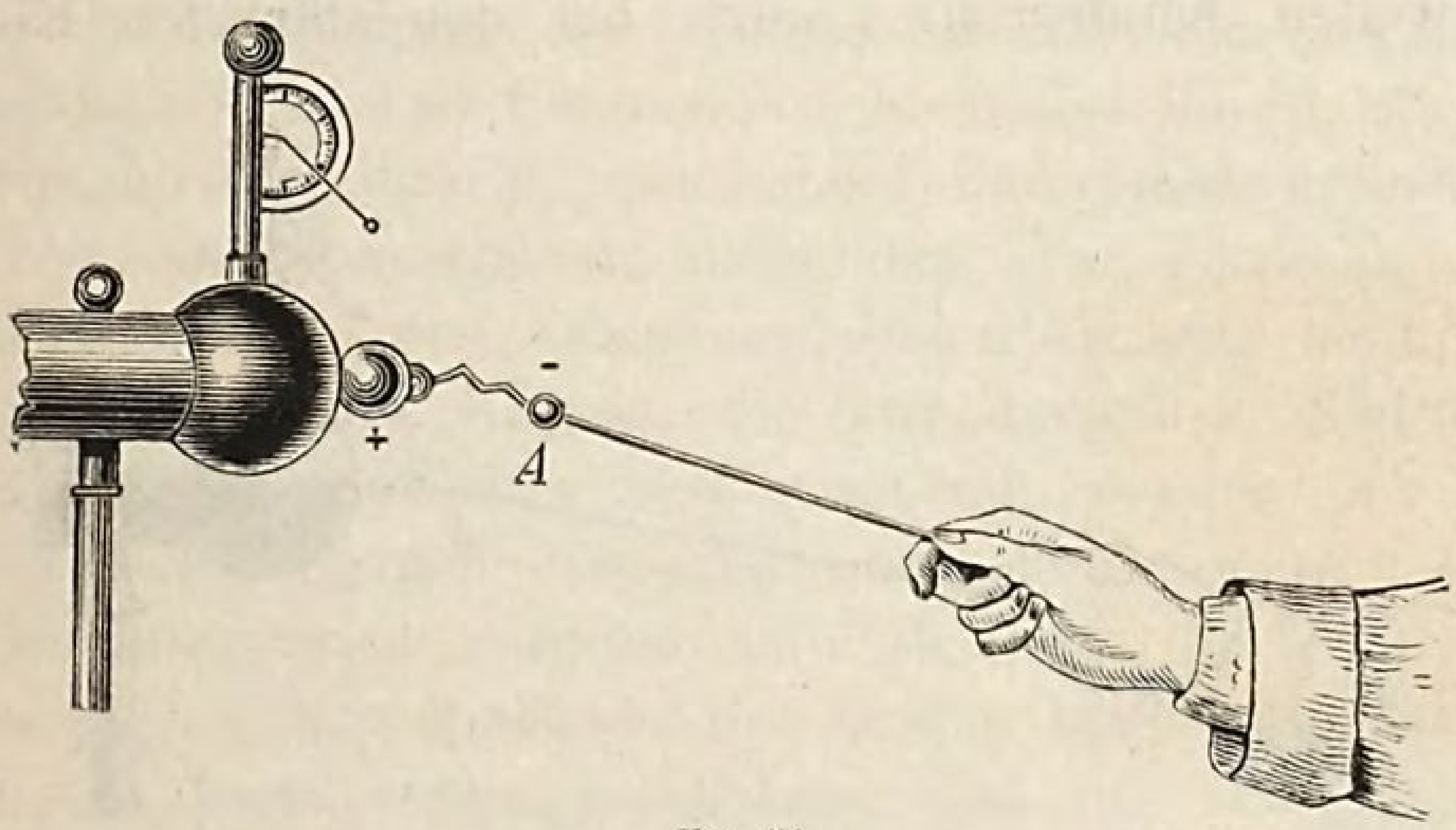


Fig. 59.

Die folgenden Versuche, welche Franklin entlehnt sind, legen diese Erscheinungen klar dar. Wenn man dem Conductor einer Elektrisiermaschine, die in Bewegung versetzt ist, einen Metallstab nähert, der in eine Kugel endigt und mit dem Erdboden leitend verbunden ist (Fig. 59), so entsteht, wenn die Entfernung genügend klein ist, ein Funke, welcher rasch den Conductor entladet; das Pendel des Elektroskopes fällt sogleich in die Verticale zurück, um sich allmählig wieder zu erheben, bis ein neuer Funke entsteht. Wenn man andererseits der Maschine eine leitende Spitze, welche man in der Hand hält, nähert (Fig. 60), so entladet sich die Maschine allsogleich, das Elektroskop des Conductors fällt unmittelbar; der continuierliche Abfluss der negativen

Elektricität durch die Spitze gibt sich durch einen Lichtschimmer zu erkennen, der am Ende der Spitze, solange die Maschine positive Elektricität liefert, bleibt.

Es genügt, die Spitze mit dem Finger zu bedecken, um den Effect zu vernichten und das Elektroskop zum Heben zu bringen. Wenn man die Spitze zwischen zwei Finger nimmt, die man allmählig bis zum Ende erhebt, vermindert man nach und nach ihren Einfluss und das Elektroskop hebt sich allmählig; es genügt sogar, die Spitze in das Innere einer Höhlung, die man in der Weise bildet, dass man die Finger dem Daumen nähert, zu bringen, um die Wirkung der Spitze zum Aufhören zu bringen. Riess [1] setzte auf eine Metallscheibe eine feine 8mm. lange Nadel und umgab sie mit einer 29mm. hohen, 18mm. weiten Kupferröhre; auch bei den stärksten Elektri-

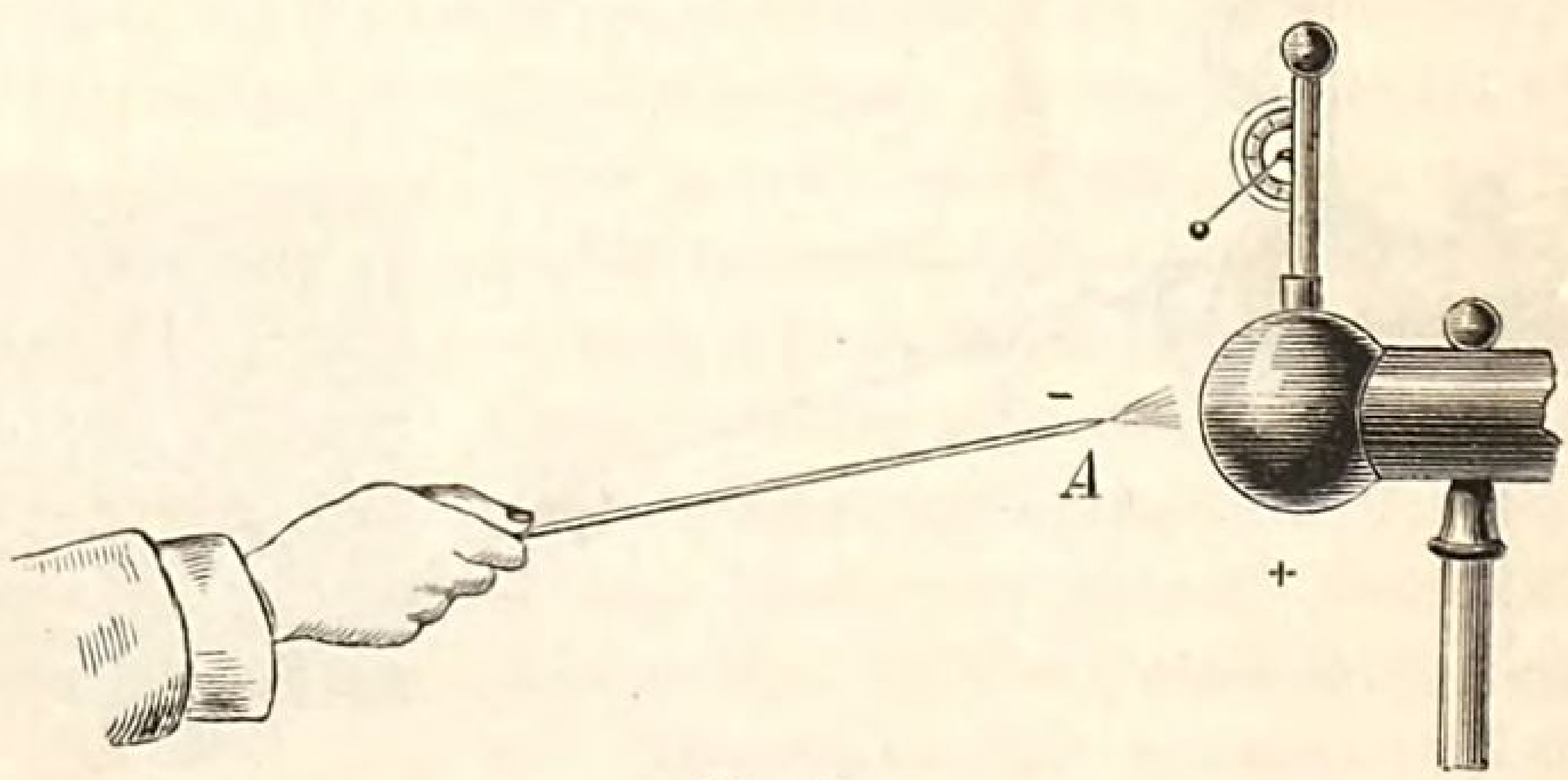


Fig. 60.

sierungen blieb die Spitze unwirksam. — Wenn man die Spitze in eine Ebonitscheibe kittet, so ist die Dichte der Spitze bedeutend geringer; sie entlässt die Elektricität in weit geringerem Maße. [2]

Wenn man dem Conductor der Elektrisiermaschine Baumwollfäden nahebringt, so bleiben diese Fäden durch die elektrische Anziehung hängen und erhalten sich normal zum Conductor; sobald man ihnen eine Spitze nähert, legen sie sich an die Oberfläche an. Ebenso stellen sich, wenn man in leitende Verbindung mit der Maschine ein Haarbüschel oder eine Quaste

(1) Reibungselektricität Bd. I. §. 255.
(2) Perrot, Montigny, Compt. rend. Bd. 60, 1865.

von Baumwollfäden bringt, die Haare oder die Fäden auf und bilden infolge ihrer gegenseitigen Abstoßung ein divergierendes Büschel; nähert man demselben mit der Hand eine Spitze, so fallen die Haare oder Fäden sogleich zusammen.

98. Erscheinungen der Influenz bei den elektrischen Anziehungen und Abstossungen. Wenn ein im neutralen Zustande befindlicher Körper von einem elektrisierten Körper angezogen wird, so geht der Anziehung zunächst eine Elektrisierung des neutralen Körpers durch Influenz vorher; es ist dies daher ein specieller Fall der Anziehung von Körpern, die mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen sind und es können die Kräfte als einzig und allein zwischen den elektrischen Fluida selbst wirkend angesehen werden.

Da die Vertheilung der Elektricität auf den gegenüberstehenden elektrisierten Conductoren nicht dieselbe ist, als wenn diese Conductoren ihrer gegenseitigen Influenz nicht unterworfen wären, so kann es geschehen, dass diese neue Vertheilung sehr die Erscheinungen der Anziehung und Abstoßung modificiert.

Z. B. wenn zwei Kugeln, die mit derselben Elektricität geladen sind, einander gegenüberstehen, werden die Elektricitätsschichten gegen die entferntesten Punkte getrieben und die Abstoßung wird geringer sein als wenn die elektrischen Massen in den Mittelpunkten der beiden Kugeln concentriert wären. Es kann selbst geschehen, dass die Abstoßung in Anziehung übergeht: es genügt zu diesem Behufe, dass die Elektricitätsmengen auf den beiden Kugeln ungleich sind und dass man diese bis zu einer ziemlich geringen Entfernung nähert. Die gegenüberstehenden Oberflächen werden dann mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen und die Anziehung, welche zwischen ihnen herrscht, wird so groß sein können, dass sie die Abstoßung übertrifft, welche zwischen den gleichnamigen Fluiden stattfindet.

Dies ist der eine Umstand, auf den man in den Versuchen Rücksicht nehmen muss. Wenn man z. B. will, dass ein elektrisches Pendel durch einen in derselben Weise elektrisierten Körper abgestoßen werde, so muss man diesen Körper sehr langsam dem Pendel nahebringen und die erste hervorgerufene Wirkung bemerken; nähert man den Körper zu rasch dem

elektrischen Pendel, so wird man infolge der Elektrisierung durch Influenz eine Anziehung erhalten können und daraus fehlerhafte Schlüsse über die Natur der vorhandenen Elektricitäten ziehen. Man muss dieselben Vorsichtsmaßregeln beim Gebrauche irgendeines Elektroskopes anwenden.

Ebenso sammeln sich, wenn zwei Kugeln, die mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen sind, sich gegenüber befinden, diese Elektricitäten an den benachbarten Seiten an; die gesammte Anziehung ist dann größer, als wenn die elektrischen Schichten homogen wären und demzufolge größer, als wenn die elektrischen Massen in den Mittelpunkten der beiden Kugeln vereinigt wären.

Man begreift, wie sehr dieser Umstand der Bestätigung des Gesetzes der elektrischen Wirkungen hinderlich in den Weg treten kann und warum man in den Versuchen, die bezüglich dieses Gegenstandes mit der Drehwage gemacht wurden, Sorge tragen muss, dass die Entfernung der Kugeln immer genügend groß im Verhältnis zu ihren linearen Dimensionen ist.

99. Goldblattelektroskop. Als eine Anwendung der Influenzphänomene wollen wir an dieser Stelle ein Instrument beschreiben, dessen wir uns schon bedient haben und zu welchem wir häufig unsere Zuflucht nehmen werden, um zu erfahren, ob ein Körper elektrisch ist und von welcher Art seine Elektricität ist: es ist dies das Goldblattelektroskop.



Fig. 61.

Dieser Apparat (Fig. 61) besteht im wesentlichen aus einem Metallstäbchen BB', welches an seinem oberen Ende eine Kugel B trägt und an dem unteren Ende zwei Goldblättchen *a* und *b* enthält. Dieses Stäbchen ist in die Fassung einer Glasglocke eingekittet, deren oberer gekrümmter Theil mit einem Schellackanstrich überdeckt ist. Die Glocke ruht auf einer Metallplatte, die im Innern zwei metallene Stäbchen *c* und *d* trägt, welche in Kugeln übergehen und sich gegenüber den Goldblättchen befinden. Wenn die letzteren elektrisiert werden, so laden sich die Stäbchen, die mit dem Erdboden in leitender Verbindung sind, durch Influenz mit entgegengesetzter Elektricität

und jedes von ihnen zieht das benachbarte Goldblättchen an, die Divergenz der Goldblättchen wird daher merklich vergrößert. Die Goldblättchen sind überdies genug kurz, so dass sie weder die Stäbchen aus Metall, geschweige denn die Wände der Glasglocke berühren können; indem man so jede Berührung vermeidet, läuft man weder Gefahr, die Goldblättchen zu zerreißen noch Spuren von Elektricität an die Oberfläche des Glases abzusetzen, welche bei den Beobachtungen vielfach hinderlich sein würden. Endlich stellt man, um besser die Isolierung des Leiters BB' herzustellen, in das Innere der Glocke ein Schälchen, welches trocknende Substanzen enthält, so z. B. ungelöschten Kalk oder Chlorcalcium. Manchmal treibt man sogar die Vorsichtsmaßregeln noch weiter. Man umgibt die Glocke mit einem rechtwinkligen Glasgehäuse, das auf seiner oberen Wand eine so große Öffnung enthält, dass das Stäbchen des Elektroskopes frei durch dieselbe gehen kann; dieses Gehäuse ruht auf einem Holzkästchen, das mit einer Lade versehen ist, in welche man trocknende Substanzen hineinlegt. Anf diese Weise sind die Wände der Glasglocke außen und innen vollkommen trocken und der Apparat kann sehr lange Zeit geladen bleiben.

Man kann sich dieses Elektroskopes in zweifacher Weise bedienen:

1. Wenn das Instrument im neutralen Zustande ist, nähert man demselben langsam den Körper, den man auf seinen elektrischen Zustand untersucht: Wenn die Blättchen divergieren, so ist der Körper elektrisch. Man setzt dann den Finger auf den Knopf; die Blättchen kommen zur Berührung und das Elektroskop bleibt mit Elektricität geladen, welche jener des influencierenden Körpers entgegengesetzt ist; man entfernt dann den Finger, dann den influencierenden Körper und die Blättchen divergieren vom neuen. Man nähert hierauf langsam und abwechselnd einen Stab polierten Glases und einen Harzstab, die mit Tuch gerieben sind: jener von diesen beiden Stäben, dessen erste Wirkung darin besteht, eine Vergrößerung der Divergenz der Goldblättchen hervorzurufen, ist mit derselben Elektricität geladen, welche das Elektroskop

enthält und demzufolge mit Electricität, welche der des vorausgesetzten Körpers entgegengesetzt ist.

Es ist nothwendig, eine Zunahme der Divergenz zu erzeugen, um einen beweisenden Versuch zu erhalten, weil, wenn man dem Knopfe des Elektroskops einen im neutralen Zustande befindlichen Leiter nähert, dieser Leiter infolge der Influenz elektrisch wird und, auf das Stäbchen des Elektroskopes zurückwirkend, die Elektricität in das obere Ende dieses Stäbchens zieht, was ein Zusammenfallen der Goldblättchen verursacht. Die Wirkung ist noch viel deutlicher, wenn der Conductor nicht isoliert ist; es genügt beispielsweise, die Hand dem Knopfe des Elektroskopes zu nähern, um die Blättchen zum Fallen zu bringen. Gleichwohl ist es leicht, dieser Fehlerursache aus dem Wege zu gehen. Wenn der fremde Körper eine merklich größere Elektricitätsmenge enthält als das Elektroskop, was der allgemeine Fall ist, so wird man, wenn man den Körper langsam dem Elektroskope nähert, die Blättchen allmählich bis zur Berührung zusammenfallen sehen, sodann divergieren sie aber vom neuen immer mehr und mehr. Entfernt man langsam den fremden Körper, so kommen die Blättchen zuerst zur Berührung, dann divergieren sie und nehmen ihre ursprüngliche Lage an. In diesem Falle ist der Versuch beweisend und man kann behaupten, dass der Körper und das Elektroskop mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen sind.

Es folgt auch aus diesem Versuche, dass man, wenn man zu schnell einen elektrisierten Körper einem Elektroskope nähert, das erste Zusammenfallen der Blättchen nicht wird wahrnehmen können, und dass man nur die schließliche Divergenz festzustellen vermag, was zu einem fehlerhaften Schlusse führen würde. Man muss daher die Körper von großer Entfernung und langsam nähern, um die erste auf den Blättchen hervorgerufene Wirkung, die Verminderung oder Vergrößerung der Divergenz, zu beobachten.

2. Eine andere Methode der Benützung des Elektroskops, welche insbesonders dann sich vortheilhaft erweist, wenn man rasch und nacheinander mehrere verschiedene Körper auf ihren elektrischen Zustand prüfen will, besteht darin, dass man zuerst das Elektroskop mit bekannter Elektricität, z. B.

positiver, ladet und dann demselben die Körper nähert, welche man studieren will. Ist der erste hervorgerufene Effect eine Zunahme der Divergenz, so kann man daraus schließen, dass der Körper in derselben Weise elektrisch ist wie das Elektroskop, d. h. positiv. Wenn die erste Wirkung eine Verminderung der Divergenz ist, so muss man den Körper mehr nähern und zuerst die Berührung der Goldblättchen, dann eine neue Divergenz hervorzurufen suchen. Man ist dann gewiss, dass der Körper elektrisiert ist und Elektricität besitzt, welche jener des Elektroskopes entgegengesetzt ist. Wir werden später noch ausführlich auf dieses Instrument zu sprechen kommen.

100. Erscheinungen der Influenz bei schlecht leitenden Körpern. Wenn der influencierende Körper ein schlechter Leiter ist, während der influencierte Körper leitend und in eine bestimmte Entfernung gebracht ist, sind die Erscheinungen dieselben wie jene, welche oben beschrieben wurden, mit dem Unterschiede, dass die Rückwirkung auf den influencierenden Körper Null, oder wenigstens wegen der Schwierigkeit, welche die Elektricität bei ihrer Bewegung in schlecht leitenden Körpern erfährt, sehr schwach sein wird.

Nicht so verhält es sich, wenn der durch Influenz elektrisierte Leiter mit dem isolierenden Körper in Berührung gesetzt wird. In diesem Falle entsteht, wenn die elektrische Ladung des isolierenden Körpers nicht außerordentlich groß oder wenn der Leiter nicht in verlängerte Theile endigt, kein Funke und die beiden in Berührung befindlichen Oberflächen erhalten sich mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen. Dies ist die eine wichtige Eigenschaft isolierender Körper, von welcher beim Elektrophor Anwendung gemacht wird. Nachdem man einen Harzkuchen mit negativer Elektricität in der Weise geladen hat, dass man ihn mit einem Katzenfelle schlug, setzt man auf diesen Kuchen eine leitende Scheibe, die von einer isolierenden Handhabe getragen wird. Man bringt die Scheibe in Verbindung mit dem Erdboden, indem man sie mit der Hand berührt: Diese Scheibe bleibt auf der den Harzkuchen berührenden Seite mit positiver Elektricität geladen. In der That, wenn man die Hand zurückzieht und die Scheibe

mittelst des isolierenden Handgriffes hebt, findet man sie mit einer positiven Elektricitätsmenge geladen, die hinlänglich groß ist, um aus ihr bei Annäherung des Fingers einen langen Funken zu ziehen; der elektrische Zustand des Harzkuchens hat sich nicht geändert.

Wenn man denselben Versuch wiederholt, indem man die leitende Scheibe mittelst ihres Randes mit dem Harzkuchen in Berührung bringt, so ändern sich die Phänomene: man erzeugt einen Funken zwischen dem Kuchen und der Scheibe; die positive Elektricität der Scheibe hat sich auf dem Kuchen rings um die Berührungsstelle ausgebreitet, nachdem die negative Elektricität, welche sich auf dem Kuchen vorfindet, neutralisiert wurde und, wenn man die Scheibe wie früher in die Höhe hebt, findet man sie wieder positiv elektrisch, aber jetzt in schwächerem Maße. Was den Harzkuchen betrifft, so besitzt er nun um den Berührungspunkt eine Zone positiver Elektricität, welche durch eine im neutralen Zustande befindliche Zone von der übrigen Oberfläche, die mit negativer Elektricität geladen bleibt, getrennt ist. Um diesen elektrischen Zustand des Harzkuchens anschaulich zu machen, kann man sich eines von Lichtenberg(¹) erdachten Kunstgriffes bedienen. Man schüttelt in einem kleinen Blasebalge eine Mischung von Mennig und Schwefelblumen und bläst diese Mischung auf den Kuchen. Durch ihre wechselseitige Reibung werden die beiden Pulver elektrisiert und zwar der Schwefel negativ, das Mennig positiv und sie trennen sich, wenn man sie auf den elektrisierten Körper bringt: Der Schwefel macht die Stelle um den Berührungspunkt gelb, das rothe Mennigpulver breitet sich auf der Oberfläche aus, welche negativ elektrisch geblieben ist und diese beiden Stellen sind durch eine neutrale Zone getrennt, auf welcher das Harz unbedeckt bleibt.

Man kann den Versuch noch einfacher machen, wenn man mit dem Finger auf einem stark elektrisierten Harzkuchen Buchstaben zeichnet. Wenn man dann auf diesen Kuchen das Gemenge der beiden Pulver schüttet, so werden sämmtliche

(¹) De nova methodo naturam ac motum fluidi electrici investigandi. Gottingæ (1778). — In neuerer Zeit hat von Bezold das erwähnte Mittel zur Untersuchung des Harzkuchens gebraucht.

Züge gelb erscheinen, und zwar mit schwarzer Umrandung auf einem im allgemeinen roth gefärbten Grunde.

101. Diese Versuche lassen schon die Vermuthung aufkommen, dass die elektrische Influenz auf einem schlecht leitenden Körper sehr schwach sein muss. Ein absolut isolierender Körper dürfte in keiner Weise durch Influenz elektrisch werden; in Wirklichkeit gibt es aber keinen Körper, der dieser Bedingung strenge genügt, und alle werden mehr oder weniger elektrisch. Es ist nützlich, diese Frage noch von zwei Standpunkten aus zu betrachten, je nachdem nämlich die Influenz in einer Entfernung stattfindet oder sich dieselbe bei der Berührung äußert.

Um das Vorhandensein der Influenzerscheinung auf schlecht leitenden Körpern nachzuweisen, genügt es, einen elektrisierten Körper einem Pendel nahezubringen, das aus einer Schellackkugel gebildet wird: die Anziehung ist merklich schwächer, als wenn die Kugel leitend wäre, als wenn sie z. B. mit einem Goldblättchen überdeckt wäre, aber diese Anziehung ist immer vorhanden, was darauf hinweist, dass eine gewisse Trennung der elektrischen Fluida sich vollzogen hat.

Matteuci(1) hat einige auf diesen Gegenstand bezugnehmende bestimmtere Versuche angestellt. Er hat an einem Seidenfaden im Innern eines Glasgehäuses isolierende Nadeln von 8 bis 10 Millimeter Länge und 2 Millimeter Dicke aufgehängt, und bildete so einen Apparat, der dem Elektroskope von Coulomb analog ist. Wenn man einer dieser Nadeln einen elektrisierten Körper nahe bringt, sieht man dieselben wie Pendel herumschwingen und man kann nachweisen, dass die beiden Enden einer solchen Nadel im entgegengesetzten Sinne elektrisch sind. Wenn man den influencierenden Körper entfernt, so kommt die Nadel sogleich in den neutralen Zustand. Die in der Weise erhaltene Elektricitätsmenge ist überdies äußerst gering; man erklärt diese Erscheinung, wie die Magnetisierung des weichen Eisens, indem man eine Art von Polarisierung der Molecüle annimmt(2): Jedes Molecül oder wenigstens

(1) Annal. de Chimie et de Physique, 3e série, t. XXVII, p. 140.

(2) Dies ist die von Faraday (Experimental researches on electricity. 11. Reihe §. 1164) ausgesprochene Auffassung, während man nach der älteren Ansicht sich vorstellte, dass die Nichtleiter gerade so wie die Leiter in-

jeder Querschnitt des isolierenden Körpers ladet sich auf der dem influencierenden Körper benachbarteren Seite mit Elektricität, welche jener des influencierenden Körpers entgegengesetzt ist, und mit gleichnamiger Elektricität auf der entfernteren Seite; alle im Innern des Mediums liegenden Schichten neutralisieren sich und nur die äußersten Schichten üben eine nennenswerte Wirkung aus.

Matteuci hat mit Hilfe der Torsionswage die Anziehungen verglichen, welche von einer elektrisierten Kugel auf andere im neutralen Zustande befindliche Kugeln aus verschiedenem Materiale ausgeübt werden. Wenn die neutrale Kugel sehr klein ist, so erleidet sie dieselbe Attraction, wie auch immer ihre Beschaffenheit sein mag; es stellt sich aber bald ein Unterschied heraus, wenn die Dimensionen dieser Kugeln größer werden, und derselbe wird um so größer, je beträchtlicher die Dimensionen sind. In anderen Experimenten hat er die Methode der Schwingungen angewendet, indem er auf eine kleine elektrisierte Nadel Kugeln von 15 Centimeter im Durchmesser und aus verschiedenem Materiale wirken ließ, die sich im neutralen Zustande befanden.

Die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel, die er untersuchte, und der Kugel des Pendels war in dem einen Falle 100, in dem anderen 120 Millimeter; er fand dann die folgenden Resultate für das Verhältnis der Kräfte:

Natur der Kugel	Entfernung der Mittelpunkte	
	100mm	120mm
Blei	1	1
Schwefel	0·607	0·525
Harz	0·476	0·480

fluenciert werden, dass aber in ersteren infolge der schlechten Leitung das Auseinandertreten der entgegengesetzten Elektricitäten eine bedeutende Verzögerung erfährt. In einem Nichtleiter braucht nach dieser Ansicht im Gleichgewichtszustande das Potential nicht überall denselben Wert zu haben, wie es in Leitern, die im Gleichgewichte sich befinden, der Fall sein muss. Näheres über diesen Gegenstand wird in dem Abschnitte über die Dielektrika mitgetheilt werden.

Die auf den Schwefel und das Harz ausgeübte Wirkung ist daher ungefähr die Hälfte jener, welche für ein Metall stattfindet.

102. Die Influenz ist beim Contact bedeutender und gleichzeitig gibt sie Anlass zu bleibenden Effecten.

Aepinus hat schon nachgewiesen, dass man, wenn man das Ende eines Glasstabes einige Augenblicke in Berührung mit dem Conductor einer Elektrisiermaschine bringt und ihn dann entfernt, auf dem Glase in der Nähe der Berührungsstelle eine Zone findet, die wie die Maschine positiv elektrisch ist, weiter eine negativ elektrische Zone, dann eine andere positive Zone, und diese Abwechslungen können sich 5- oder 6mal längs des Stabes erzeugen. Der Versuch gelingt leichter mit einem Siegellackstab oder mit einem Stabe aus Harz oder Schellack. Man macht außerdem diese verschiedenen Zonen nach dem Verfahren von Lichtenberg ersichtlich, indem man auf den Stab mit einem Blasebalg eine Mischung von Schwefelblumen und Mennig bläst; die positiven Gegenden bedecken sich mit gelbem Schwefelstaube und die negativen mit dem rothen Mennigpulver.

Gleichwohl ist die Beobachtung von Aepinus unvollständig, weil zu Beginn des Versuches die Stellen des Glases, welche mit dem Conductor in Berührung sind, mit entgegengesetzter Influenzelektricität geladen sind, welche mehr oder weniger langsam verschwindet: dies ist ja der Grund davon, dass ein leichter Körper einige Zeit mit einem elektrisierten Körper in Berührung bleibt, bevor er von ihm abgestoßen wird. Man kann den Versuch mit einer Torsionswage machen, deren bewegliche Kugel isolierend ist und im neutralen Zustande sich befindet, während die fixe Kugel leitend und elektrisiert ist; in diesem Falle erhält sich die bewegliche Kugel einige Zeit mit der fixen Kugel in Berührung, bevor sie abgestoßen wird. Die Berührung dauert noch länger, wenn die fixe Kugel selbst isolierend ist.

Die folgenden von Matteuci angegebenen Experimente zeigen zur Genüge die Einzelnheiten dieser Erscheinung. Auf einen Harzkuchen setzt man eine kleine isolierende Scheibe, die z. B. positiv elektrisch ist, und man hebt sie am Ende

einer kurzen Zeit ab. Streut man auf diesen Harzkuchen die Mischung von Mennig und Schwefel, so erkennt man, dass an der Stelle, wo die Scheibe angesetzt wurde, auf dem Kuchen eine negative Zone sich befindet; rings um diesen Platz ist eine kreisförmige positive Zone, dann eine negative Zone, der eine andere positive Zone folgt u. s. w. und man kann fünf oder sechs regelmäßige Abwechslungen nachweisen, wenn die Oberfläche des Harzkuchens vollständig eben ist, und wenn dafür gut gesorgt wurde, dass sie sich im neutralen Zustande befand. Dauert die Berührung längere Zeit, so verschwindet die negative Stelle infolge der Erzeugung einer Anzahl von kleinen Funken; der centrale Fleck ist dann positiv und wie früher von abwechselnden Ringen begrenzt.

Mit einer leitenden elektrisierten Scheibe kann man den

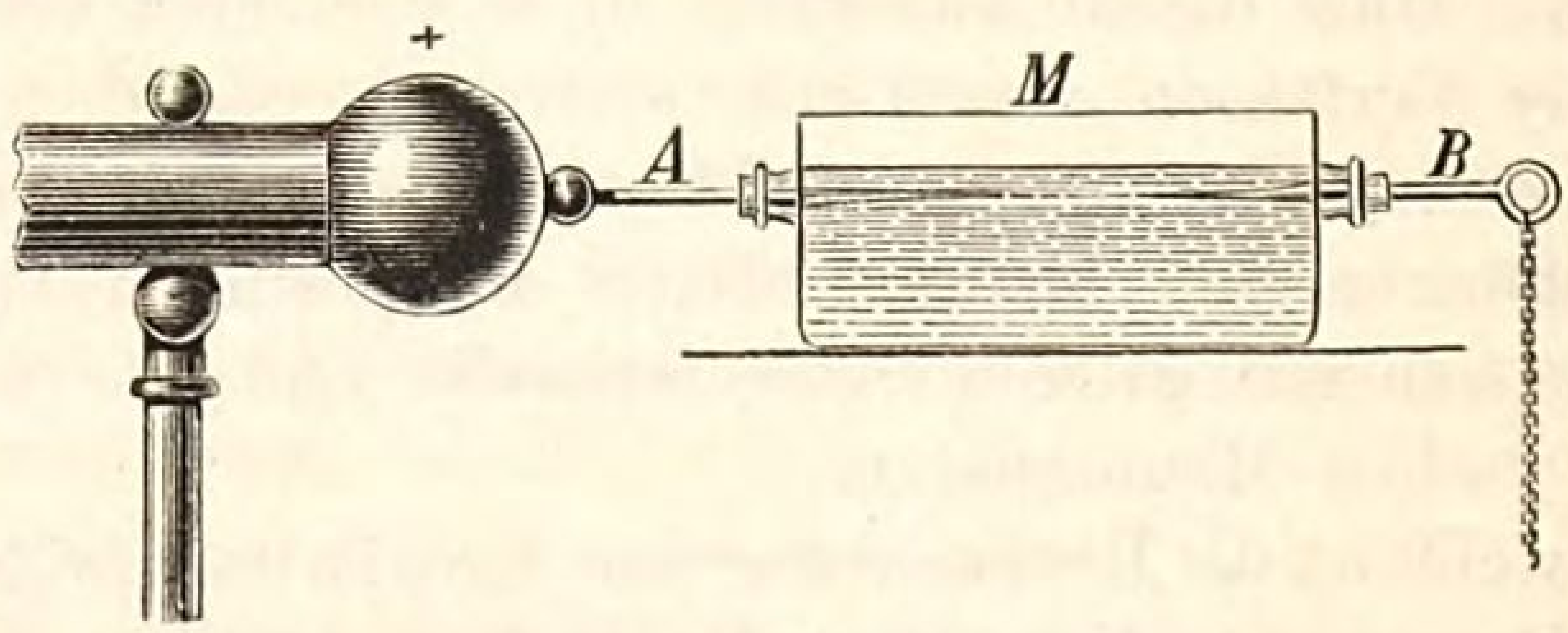


Fig. 62.

ersten Effect, nämlich den Fleck von entgegengesetzten Zeichen erreichen, wenn die Ladung schwach ist und wenn man das Experiment rasch macht; wenn aber die Ladung stärker ist und wenn die Berührung länger dauert, so verschwindet der erste Effect, der Centralfleck ist positiv und die aufeinanderfolgenden Ringe entstehen ebenso.

Ein Versuch von Faraday(¹) wird ebenso durch polare Elektrisierung schlecht leitender Körper erklärt. Man bringt Stückchen eines Seidenfadens oder Theile eines Glasfadens in ein Glasgefäß (Fig. 62), das Terpentinöl enthält; zwei gegenüberliegende Wände dieses Gefäßes sind von den Metallstäbchen A und B durchsetzt, welche innerhalb der Flüssigkeit in Spitzen ausgehen. Man bringt das eine dieser Stäbchen in

(¹) Experimental Researches, t. I., p. 429.

Verbindung mit dem Erdboden und das andere mit einer Elektrisiermaschine; sogleich bemerkt man alle Seiden- oder Glasstückchen von allen Punkten der Flüssigkeit herbeieilen und eine Kette bilden, die continuierlich von einer Spitze zur anderen verläuft; diese Kette setzt dem Zerreißen einen genug großen Widerstand entgegen und sie bildet sich vom neuen, nachdem man sie zerrissen hat. Die verschiedenen Elemente dieser Kette sind an ihren Enden entgegengesetzt elektrisch geladen und sie hängen sich mit ihren entgegengesetzten Polen aneinander. Sobald man die Verbindungen aufhebt oder die Maschine entladet, zerstreuen sich all' die Theilchen.

103. Matteuci hat gesucht das Verhältnis der Elektricitätsmengen zu bestimmen, welche einem elektrisierten Conductor durch die Berührung mit verschiedenen Isolatoren entführt werden. Er bediente sich zu diesem Behufe einer Torsionswage, die in der gewöhnlichen Weise geladen war; er berührte die fixe Kugel während einer gewissen Zeit mit einer quadratischen aus einer isolierenden Materie gebildeten Platte und maß, nachdem er diese Platte entfernt hatte, die Verminderung der Torsion, welche sich nöthig erweist, um die bewegliche Kugel in dieselbe Winkelentfernung wie vordem zu bringen. Bei Wiederholung dieses Versuches mit verschiedenen Substanzen erhielt er die nachstehenden Resultate:

Substanzen	Entfernung der Kugeln	Torsion des Index	Torsion nach 5 Min. Contact	Verringerung der Torsion
Schwefel	58^0	258^0	231^0	27^0
Schellack	„	259^0	230^0	29^0
Glas	„	259^0	40^0	219^0

Die auf den Schwefel und den Schellack bezugnehmenden Resultate sind identisch; das Glas nimmt viel mehr Elektricität auf, was in Übereinstimmung mit den Versuchen von Coulomb über den Elektricitätsverlust durch schlechtleitende Stützen sich befindet. Wenn man das Glas mit Schellack überzieht, verbessert man es; aber die Schichte muss zum

mindesten ein Viertel-Millimeter Dicke haben, damit das Glas sich sowie Schellack selbst verhält.

Man beobachtet auch in den vorhergehenden Versuchen, dass die negative Elektricität sich leichter als die positive Elektricität an der Oberfläche schlechtleitender Körper fortpflanzt und dieser Umstand gestattet es, einige besondere Umstände zu erklären, welche die Figuren von Lichtenberg darbieten. Man kann auf einem Harzkuchen Schichten hervorrufen, welche verschieden elektrisch sind, sei es dadurch, dass man den Finger auf dem durch ein Katzenfell stark elektrisch gemachten Kuchen herumführt, wie wir es schon oben angegeben haben, sei es dadurch, dass man auf dem Kuchen mit einem positiv oder negativ elektrischen Conductor Linien zeichnet. Wie auch immer der Vorgang ist, den man anwendet, um diese verschiedenen Zustände zu erhalten, immer bemerkt man, dass, wenn man auf einen solchen Harzkuchen eine Mischung aus Schwefel und Mennig streut, die negative Elektricität sich in fast gleichförmiger Weise in einer merklichen Entfernung verbreitet und das Ansehen von reichlich ausgebreiteten Ölflecken darbietet, während die positiv elektrischen Linien engere Umkreise besitzen und nach allen Richtungen zarte Verästelungen darstellen.

104. Eindringen der Elektricität in isolierende Körper. Die Elektricität pflanzt sich nicht allein an der Oberfläche isolierender Körper fort, sondern sie dringt auch in das Innere derselben ein, wie schon aus dem Vorhergehenden folgt. Faraday(¹) hat bezüglich dieses Gegenstandes zahlreiche Versuche gemacht.

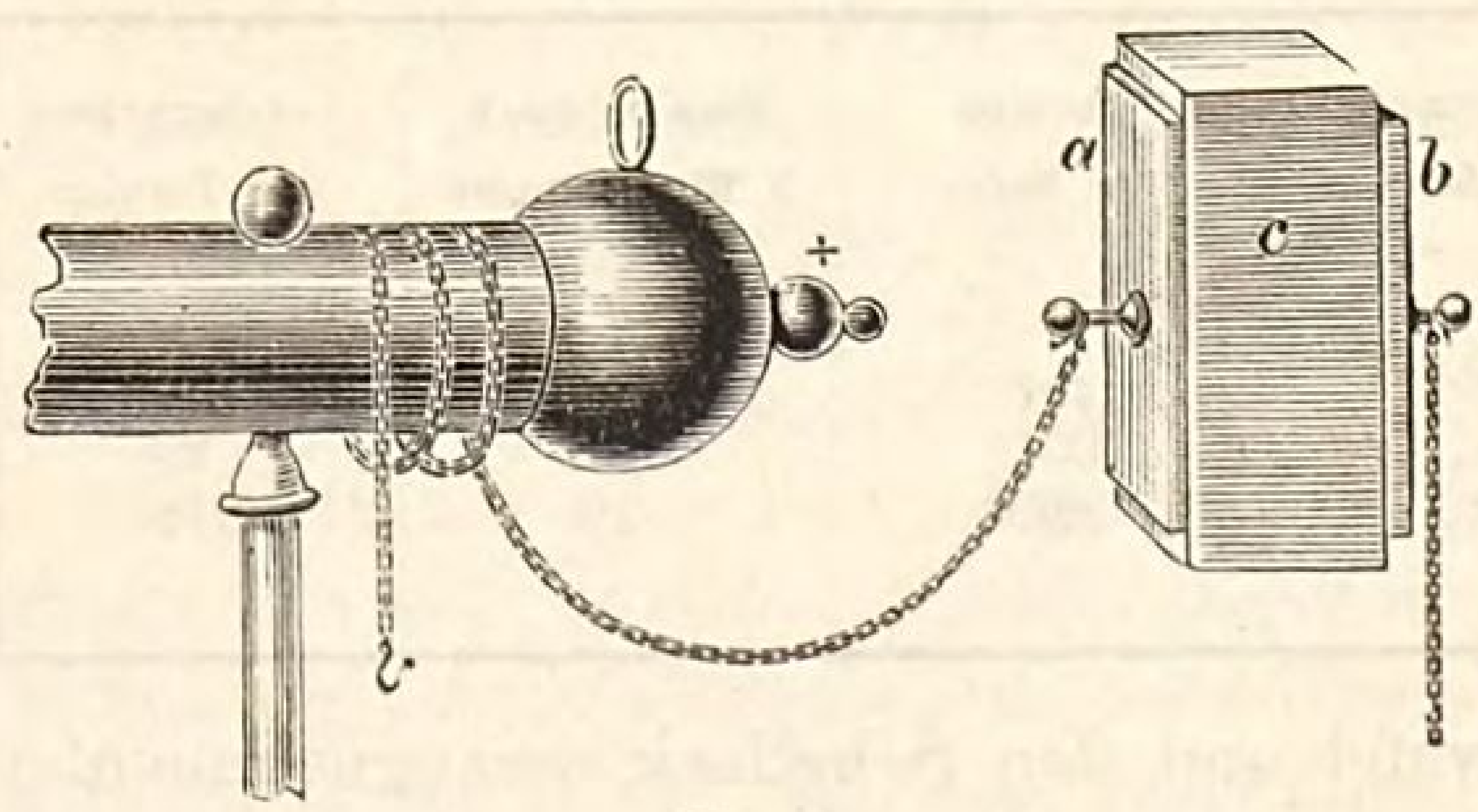


Fig. 63.

Eine Platte C von isolierender Materie, Schwefel oder Spermacet (Wallrath) z. B. (Fig. 63) ist auf zwei gegenüber-

(¹) Experimental Researches, t. I., p. 390.

liegenden Seiten mit Metallplatten *a* und *b* überdeckt, von denen die eine mit einer Elektrisiermaschine in Verbindung gesetzt ist, während die andere mit dem Erdboden communiciert. Nachdem man die Maschine durch 10 oder 15 Minuten wirken gelassen hatte, entladet man die Platten *a* und *b* und isoliert sie; wenn man sie allsogleich mit Aufmerksamkeit untersucht, so scheinen sie alle beide vollkommen neutral, am Schlusse einer kleinen Zeit jedoch zeigt sich die Platte *a* vom neuen positiv, und die Platte *b* negativ elektrisch. Die positive Elektricität, welche auf der Platte *a* von der Maschine geliefert wurde und die negative Elektricität, welche auf der Platte *b* durch Influenz hervorgerufen wurde, sind zufolge der Abstoßung von Seite der Platten in das Innere des isolierenden Körpers eingedrungen, sodann kehrten sie gegen die Oberfläche und auf die Platten zurück, nachdem diese in den neutralen Zustand gebracht waren.

Das folgende Experiment ist noch mehr beweisend. 2 Platten von Spermacet C und D (Fig. 64) sind aneinander gefügt und auf den Außenseiten mit Metallplatten *a* und *b* bedeckt, von denen die erste mit einer Elektrisiermaschine, die zweite mit dem Erdboden in Verbindung ist. Der Apparat wird mehrere Minuten hindurch geladen, dann entladen und isoliert; die Platten *a* und *b* zeigen dann keine Spur von Elektricität, sobald man aber die Platten C und D trennt, zeigen sich die Metallscheiben stark elektrisch, und zwar *a* positiv, *b* negativ elektrisch; die beiden entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsschichten befanden sich daher zu den verschiedenen Seiten der Mittellinie des isolierenden Körpers.

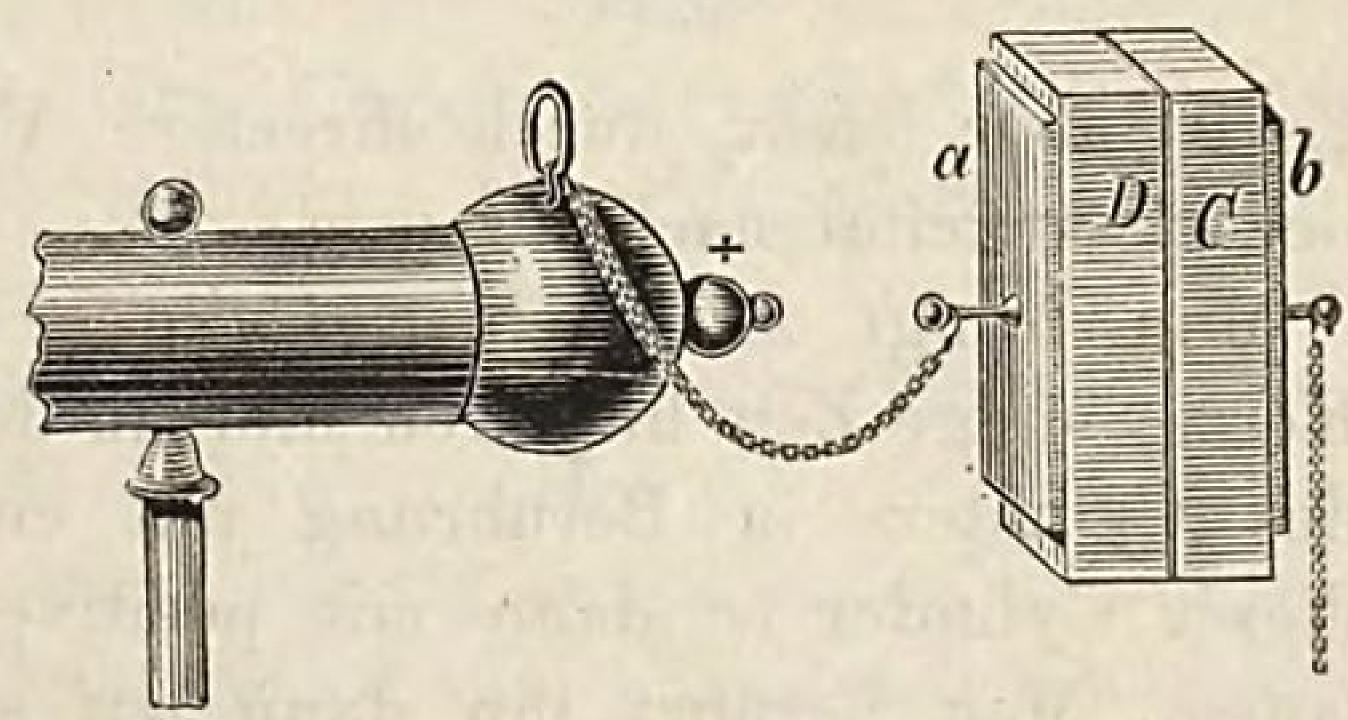


Fig. 64.

Dieselbe Erscheinung findet statt, wenn der isolierende Körper unterbrochen ist. So hat Matteuci (¹) diesen Versuch

(¹) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. XXIII., p. 458.

mit einer Säule wiederholt, welche aus einer großen Anzahl von Glimmerplatten (Fig. 65), die zwischen zwei Metallplatten *a* und *b* sich befanden, gebildet war. Der Apparat wurde einige Minuten mit der Elektrisiermaschine geladen, hierauf entladen; sogleich nahm man die Plattensäule auseinander und wies nach, dass alle jene Glimmerplättchen, welche gegen das der Elektrisiermaschine am meisten benachbarte Ende hin lagen, einen Überschuss an positiver Elektricität hatten, während die gegen das andere Ende hin liegenden einen Überschuss an negativer Elektricität besaßen.

Der Vorgang bei dieser Erscheinung, welcher in diesen Versuchen von Matteuci und Faraday stattfindet, ist überdies hinlänglich compliciert und wir werden auf denselben gelegentlich der Erörterung der Condensation zurückkommen.

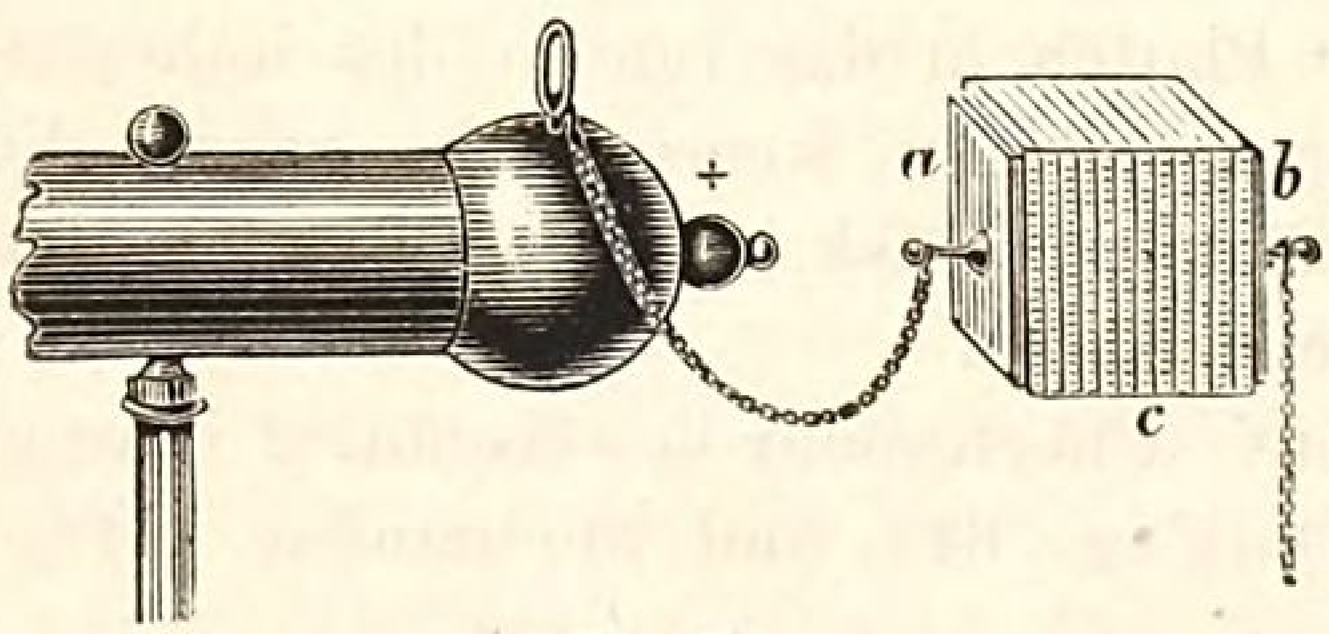


Fig. 65.

Es ist aber leicht, durch directere Versuche das Eindringen der Elektricität nachzuweisen.

Man bringt z. B. einen Cylinder von Stearinsäure (eine Kerze) einige Zeit hindurch und an den verschiedenen Stellen des Cylinders in Berührung mit einer Elektrisiermaschine; dieser Cylinder ist dann mit positiver Elektricität stark geladen. Man berührt ihn dann auf seiner ganzen Oberfläche mit der Hand, ohne ihn zu reiben, oder man legt ihn auf einen nicht isolierten leitenden Körper oder noch besser, man schmilzt ihn oberflächlich ab: alle Elektricität verschwindet. Überlässt man hierauf diesen Cylinder sich selbst, so findet man ihn am Ende einer kurzen Zeit wieder positiv elektrisch.

Das nachstehende Experiment ist noch einfacher. Man ladet stark einen Stab aus Harz oder Siegellack mit positiver Elektricität, indem man ihn mit dem Conductor einer Elektrisiermaschine in Berührung bringt. Man reibt diesen Stab sodann leicht mit einem Tuche und erkennt, dass er mit negativer Elektricität geladen ist. Überlässt man hierauf diesen Stab sich selbst, so verschwindet die negative Elektricität allmählig

und man findet bald den Stab positiv elektrisch geladen. Die in die tieferen Schichten eingedrungene Elektricität ist allmählig gegen die Oberfläche zurückgekehrt, hat die entgegengesetzte Elektricität neutralisiert und über dieselbe die Überhand gewonnen.

Hopkinson(¹) hat einen interessanten Versuch elektrischer Nachwirkung ausgeführt, durch welchen er zeigte, dass durch Erschütterung des Isolators das Rückkehren der Ladung beschleunigt wird. Er füllte ein größeres Glasgefäß mit Schwefelsäure, in dasselbe stellte er ein zweites cylinderförmiges Gefäß, das auch zum Theile mit Schwefelsäure gefüllt war. Es wurde auf diese Weise eine Leydnerflasche hergestellt, die Schwefelsäure ersetzt die beiden Belegungen. Er verband nun die Schwefelsäure in dem innern Cylinder mit einer Elektrisiermaschine, jene in dem weiteren Gefäße mit dem Erdboden. Wird dieser Apparat elektrisiert und nachher entladen, so kehrt die in das Glas eingedrungene Elektricität allerdings sehr langsam zurück, was man an einem Elektrometer beobachten kann. Schlägt man hingegen mit einem Holzhammer gegen das cylindrische Gefäß, so geht die in das Glas eingedrungene Ladung schnell zurück, was man an dem kräftigen Ausschlage des Elektrometers wahrnehmen kann. — Merkwürdig ist auch der Versuch, welcher von der Superposition der verschiedenen Ladungen Zeugnis gibt(²). Hopkinson elektrisierte die soeben beschriebene Leydnerflasche mit entgegengesetzten Ladungen und fand, dass die rückkehrende Ladung ihr Zeichen änderte, und zwar in derselben Weise, in welcher die Ladungen übereinander gelagert waren.

Nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft scheinen diese Versuche einen fortschreitenden Wechsel in der Structur des dielektrischen Körpers anzudeuten, eine theilweise Deformation, die unter dem Einflusse jener Ursachen entsteht, welche die Polarisation der Molecüle hervorrufen; sowie ein

(¹) Dr. John Hopkinson (Phil. Transact. 1876, p. 489). Der Versuch wurde von Gordon 1879 vor einem großen Auditorium in der Royal Institution wiederholt. (Man sehe: Gordon, a physical treatise on electricity and magnetism. London 1880.)

(²) Gordon l. c. I., pg. 65.

unvollkommen elastischer Körper nicht allsogleich in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, wenn die wirkende Ursache aufgehört hat, so ist es auch hier. In der That hat Hopkinson mechanische Analogien zu dem Zustande der dielektrischen Körper gefunden (¹). — Damit hängt wohl auch die von Hopkinson im Jahre 1877 beschriebene Thatsache zusammen, dass die Erscheinungen der Leydnerflasche durch Temperaturwechsel beeinflusst werden.

105. Änderung der Influenzwirkungen durch zwischenliegende Körper. In mehreren der vorhergehenen Versuche waren, anstatt sich in Luft zu befinden, der elektrisierte Körper und der der Influenzwirkung unterworfene Körper durch eine Schichte eines schlecht leitenden flüssigen oder festen Körpers getrennt. Es findet dann nicht nur wieder jene Influenz statt, die wir früher kennen gelernt haben, sondern sie ist beträchtlich größer. Man kann den Versuch in sehr einfacher Weise anstellen, indem man einen elektrisierten Körper ober die Kugel eines Goldblatt-Elektroskopes bringt. Die Blättchen werden in derselben Weise elektrisch wie der influencierende Körper und divergieren; die Einführung eines isolierenden Körpers zwischen die Elektroskopkugel und den influencierenden Körper verursacht eine Vermehrung der Divergenz der Blättchen.

Dieser Versuch ist delicater Natur; er liefert oft Resultate, die jenen entgegengesetzt sind, welche man erwartet, die Divergenz der Blättchen wird infolge der Einführung der Zwischenkörper kleiner anstatt größer und es haben mehrere Physiker sogar berichtet, dass die Verringerung der Influenz die allgemeine Thatsache wäre. Wir werden sehen, welche Ursachen auf die Erscheinung störend einwirken können; es liegt uns aber an dem Gelingen des Nachweises, dass die Influenz sich vergrößere, wie wir oben angegeben haben.

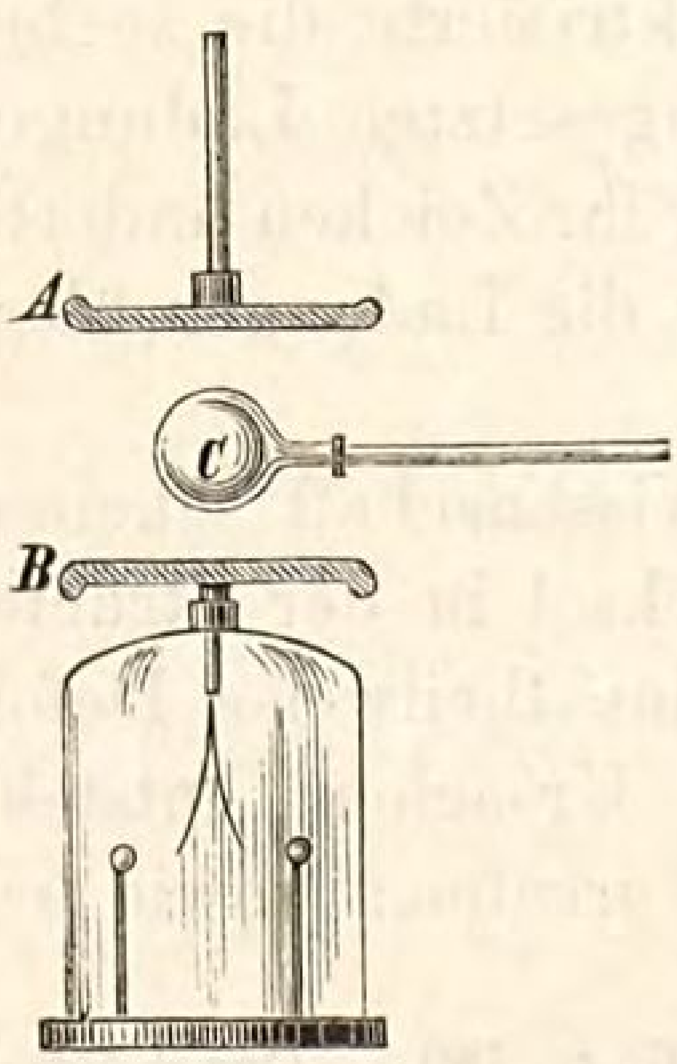


Fig. 66.

Man wendet zu diesem Behufe ein Condensations-Elektroskop (Fig. 66) an. Die obere Platte A, welche

(¹) Man sehe das oben erwähnte Werk von Gordon, pg. 63 und 66.

elektrisiert ist, hängt man in einer gewissen Entfernung oberhalb der unteren Platte B auf, so dass man eine Divergenz der Goldblättchen hervorruft. Man führt zwischen die beiden Platten eine Glaskugel C, eine Schwefel- oder Harzkugel ein, welche an isolierenden Handhaben befestigt sind; es gehen die Blättchen noch weiter auseinander.

106. Specifisches Inductionsvermögen. Faraday hat eine große Wichtigkeit der Rolle der isolierenden Medien, durch welche sich die Influenzwirkung vollzieht, beigemessen; diesen Medien gab er den Namen der Dielektrika und er hat ihre Wirkung in folgender Weise [1] zur Anschauung gebracht.

Eine leitende ebene Platte C (Fig. 67) wird isoliert und befestigt. Rechts und links stellt man zwei andere leitende Platten A und B auf, die auch isoliert sind und einzeln durch Kupferdrähte mit den beiden Goldblättchen a und b in leitende Verbindung gesetzt werden; diese Blättchen sind voneinander isoliert in einer Glasglocke aufgehängt und einige Centimeter voneinander entfernt. Die Platten A und B befinden sich in gleicher Entfernung von der zwischenliegenden Platte C, welche man mit positiver Elektricität ladet; man bringt die Platten A und B in leitende Verbindung mit dem Erdboden, sodann isoliert man sie. Diese beiden Platten sind dann in gleicher Weise negativ elektrisch, und die Goldblättchen, mit denen sie in Verbindung stehen, besitzen keine nennenswerte freie Elektricität; sie bleiben deshalb vertical. Wenn die Dinge sich so verhalten, nähert man die Platte A der Platte C und alsogleich nimmt man eine Anziehung der beiden Goldblättchen wahr; man kann sich überdies dadurch, dass man diesen Blättchen einen geriebenen Glasstab nähert, davon vergewissern, dass a positiv und b negativ elektrisch ist. Die Erscheinung war leicht vorauszusehen, die Influenzwirkung auf A wurde zufolge der Annäherung der Platten vergrößert; sie hat sich auf B vermindert, weil die Elektricität der Platte C sich in der Richtung gegen die Platte A begeben hat.

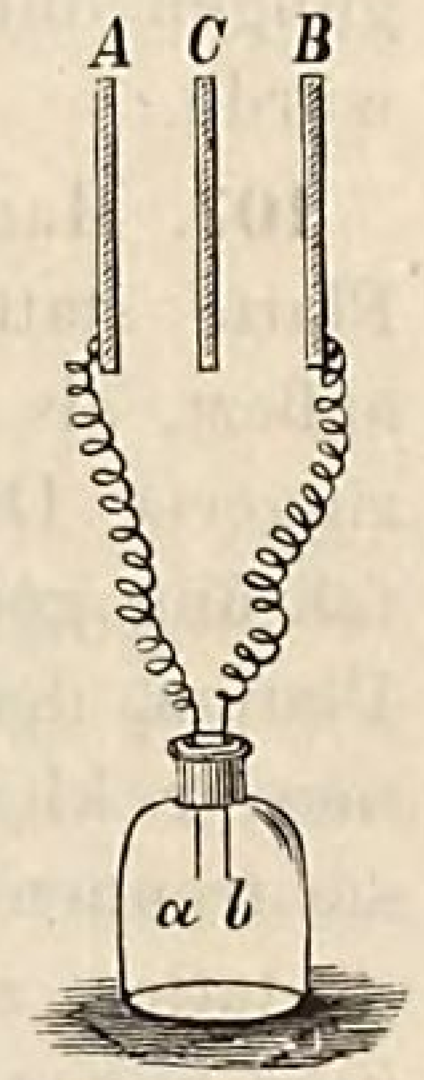


Fig. 67.

[1] Experimental Researches, t. I., p. 413.

Man bringt die Platten in den ursprünglichen Zustand und führt eine dicke Platte eines isolierenden Körpers zwischen die Platten A und C ein; die Goldblättchen ziehen sich vom neuen an und man kann nachweisen, dass das Goldblättchen *a* wieder positiv und das andere negativ elektrisch ist. (1)

Die Zwischenstellung eines schlecht leitenden Körpers ruft daher dieselbe Wirkung hervor wie die Näherung der Platten und vergrößert die elektrische Influenz. Faraday nennt specifisches Inductions-Vermögen eines isolierenden Mediums das Verhältnis der Elektricitätsmenge, welche durch die durch dieses Medium stattfindende Influenz entwickelt wird, und jener Elektricitätsmenge, welche unter denselben Bedingungen durch eine Luftschichte von derselben Dicke entstehen würde.

107. Man kann auch sagen, dass die durch eine isolierende Platte stattfindende elektrische Influenz sich in der Weise äußert, als ob diese Platte durch eine Schichte Luft von geringerer Dicke ersetzt wäre. Andererseits hat man in Erfahrung gebracht, dass die elektrische Influenz zwischen zwei Platten, deren Entfernung im Verhältnisse zu ihrem Durchmesser klein ist, fast umgekehrt proportional der Dicke der sie trennenden Luftschichte ist und diese Bemerkung wird es gestatten, aus dem Versuche von Faraday eine wenigstens sehr angenäherte experimentelle Bestimmung des specifischen Inductionsvermögens der isolierenden Platte zu liefern. Nehmen wir zu diesem Behufe an, dass man, nachdem man diese Platte zwischen die Platten A und C gestellt und die Zunahme der Influenzwirkung festgestellt hat, nach und nach die Platte A entfernt, bis die beiden Goldblättchen *a* und *b* wieder vertical herabhängen, d. h. bis die elektrische Influenz

(1) Diese letztere Vorsicht ist nothwendig, weil die Anziehung der beiden Goldblättchen nur das beweist, dass sie mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen sind. Faraday sagt nicht ausdrücklich, dass er sich von dem elektrischen Zustande der Goldblättchen überzeugte, aber es ist anzunehmen, dass er diese Vorsicht nicht außeracht gelassen habe; dessenungeachtet ist sein Experiment einigemale im entgegengesetzten Sinne gedeutet worden, die isolierende Platte wurde nicht als die elektrische Influenz vergrößernd, sondern als dieselbe vermindernd betrachtet.

auf den Platten A und B vom neuen dieselbe ist. Nennen wir E die Dicke der isolierenden Schichte, n deren specifisches Inductionsvermögen und e die Größe, um welche man die Platte A zurückschieben musste, um die Gleichheit der Influenzwirkung auf beiden Seiten wieder herzustellen. Man sieht, dass man schließlich eine Luftschichte, deren Dicke gleich E ist, durch eine Luftschichte von der Dicke e und durch die isolierende Platte ersetzt hat, welch letztere einer Luftschichte gleichkommt, die eine nmal geringere Dicke besitzt, also eine Dicke $\frac{E}{n}$ hat; daraus erhält man die Gleichung:

$$E = e + \frac{E}{n},$$

woraus sich ergibt

$$n = \frac{E}{E - e} = \frac{1}{1 - \frac{e}{E}}$$

Die Verschiebung e ist immer kleiner als die Dicke E der isolierenden Platte; dieser Ausdruck wird deshalb für das specifische Inductionsvermögen eine positive Zahl liefern, die größer als die Einheit ist. In dem Abschnitte über elektrische Apparate und Messungen werden in ausführlicher Weise die hierher gehörigen Messmethoden betrachtet werden.

108. Über elektrische Schirme. Ohne weiter für den Augenblick bei dieser Untersuchung über das Inductionsvermögen zu verweilen, welche in den Erscheinungen der elektrischen Condensation eine wichtige Rolle spielt, muss man zunächst bemerken, dass sich in dieser Beziehung keine absolute Unterscheidung zwischen gut und schlecht leitenden Körpern aufstellen lässt. So kann man z. B. den Versuch, den wir oben (105) angegeben haben, wiederholen, wobei man die Glaskugel durch eine Metallkugel von demselben Durchmesser ersetzt, die von einer wohl isolierenden Handhabe getragen wird. Wenn man diese Kugel zwischen die beiden Platten einführt, wird die Influenz wieder vergrößert und es ist sogar die Zunahme der Divergenz bedeutender, als bei der Anwendung der Glaskugel.

Diese Erscheinung erklärt sich ohne Schwierigkeit, wenn der zwischengestellte Körper ein Elektricitätsleiter ist, weil dieser Leiter ebenfalls durch Influenz elektrisch wird und seinerseits auf das Elektroskop wirkt, ohne viel der Wirkung, welche ursprünglich der elektrisierte Körper ausübte, hinderlich zu sein; man kann deshalb vermuthen, dass die schlechtleitenden Körper sich bis zu einem gewissen Grade ebenso verhalten werden.

Dennoch wirkt das zwischengestellte Medium, wenn es leitend ist und, anstatt isoliert zu sein, mit dem Erdboden in Verbindung gebracht wurde, dann wie ein Schirm und verringert in bedeutendem Maße die elektrische Influenzwirkung, welche sich hinter demselben äußern könnte. Eine leitende, mit der Erde in Verbindung gesetzte Platte, an die Stelle der isolierten Kugel gebracht, bringt die Goldblättchen augenblicklich zum Zusammenfallen. Ebenso genügt es in dem Versuche von Aepinus (82) eine leitende nicht isolierte Platte zwischen die influencierende Kugel und den Cylinder aufzustellen, um alle Pendel in die Verticallage zu bringen.

Dieses Ergebnis war leicht vorauszusehen, wenn man bemerkt, dass, wenn die Metallplatte ein wenig größer ist, sie auf ihrer äußeren Oberfläche, die mehr von dem influencierenden Körper entfernt ist, keine merkliche Elektricität besitzt. Die Resultante der ausgeübten Wirkungen von Seite der influencierenden Elektricität und der entgegengesetzten Elektricität der zwischengestellten Platte, auf einen beliebigen Punkt dieser Platte und auf ihre äußere Oberfläche ist Null; wenn man sich von dieser Stelle entfernt, muss die Wirkung in continuierlicher Weise sich ändern, weil man keine Elektricitätsschichte durchsetzt; die Wirkung ist daher auch in der nachbarlichen Luftschichte Null und bleibt unmerklich in einer gewissen Entfernung hinter der Platte.

Nach der Meinung von Faraday beweist dieses Experiment, dass die elektrische Influenz, welche er Induction nennt, sich nicht durch Leiter äußert, welche mit dem Erdboden in leitende Verbindung gesetzt sind. Indessen kann man die elektrischen Schirme nicht vollständig mit den dunklen in der Optik in Verwendung stehenden Schirmen vergleichen,

welche dem Lichte jeden Zutritt in das Innere des geometrischen Schattenkegels wehren, wenn man von den Beugungserscheinungen absieht. Ein elektrischer Schirm schützt nur ungefähr eine gewisse Gegend vor der Influenzwirkung, und er ist nur dann vollkommen wirksam, wenn er den elektrischen Körper vollkommen umschließt. Denn in diesem Falle vernichtet er jede äußere Wirkung, wie man in den früher beschriebenen Versuchen von Faraday gesehen hat.

109. Es gestatten schließlich diese Betrachtungen gewisse Versuche zu erklären, welche widersprechend zu sein schienen und in welchen man eine Verminderung der Influenzwirkung infolge der Zwischenstellung eines leitenden oder isolierenden Körpers zu sehen glaubte. Die ungenügende Isolierung oder auch die Gegenwart benachbarter nicht isolierter Conductoren, wie z. B. der Arm des Experimentators, würde schon genügen, um einen ähnlichen Effect hervorzurufen. Wenn aber eine leitende Platte L, zwischen einen elektrisierten Körper A (Fig. 68) und ein Elektroskop gestellt, sehr groß ist, wird die Einwirkung auf das Elektroskop unmerklich. Diese Platte ladet sich dann auf ihrer Oberseite mit einer schwächeren Elektricitätsschichte, als jene des influencierenden Körpers ist und die das entgegengesetzte Zeichen hat; eine Schichte von demselben Zeichen, wie das der influencierenden Elektricität ist, breitet sich auf der Unterseite und in den weiter entfernten Theilen aus. Die Wirkung, welche der z. B. positiv elektrisierte Körper A auf das Elektroskop ausübt, wird beträchtlich vermindert durch die negative Elektricität der Platte: die positive Elektricität dieser Platte wirkt wenig, weil sie sehr entfernt ist, und die Resultierende kann viel schwächer als die ursprüngliche Wirkung sein.

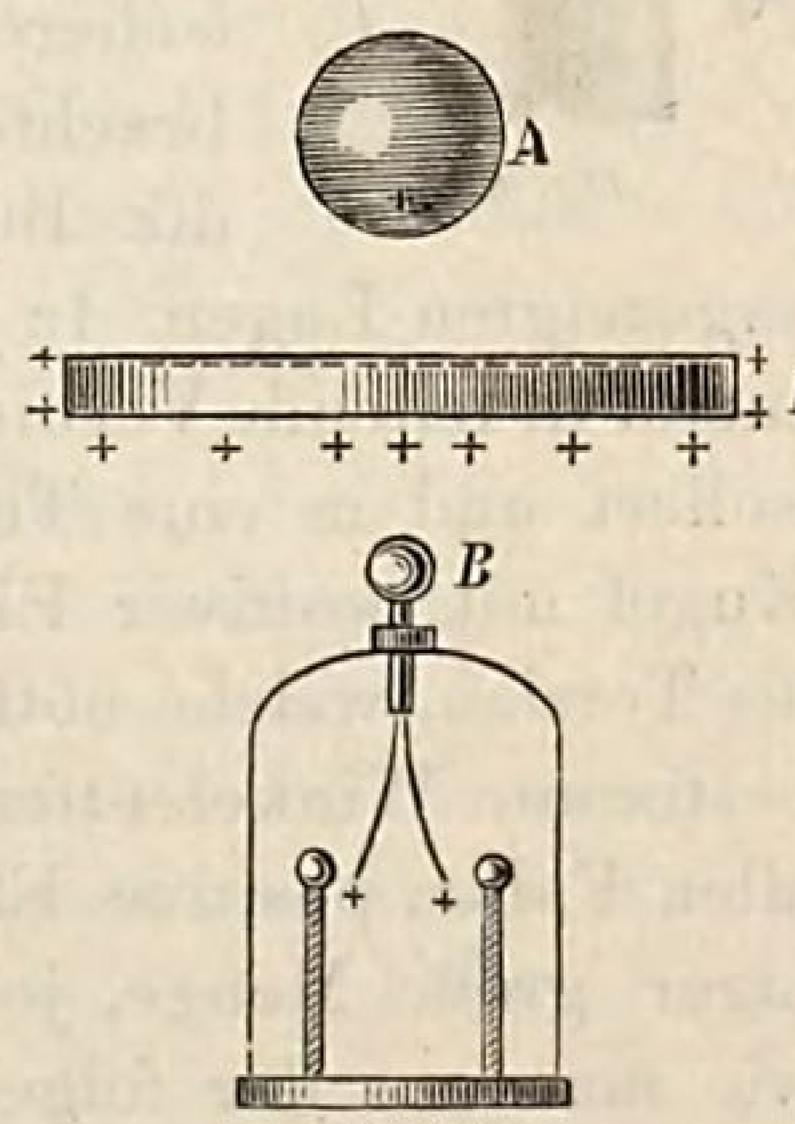


Fig. 68.

Wenn die Platte sehr ausgedehnt ist, so ist das Ergebnis fast dasselbe, als wenn sie mit dem Erdboden in leitender Verbindung wäre. Eine isolierende Platte wird sich ebenso

aus denselben Gründen verhalten und wird eine Annäherung der Blättchen hervorrufen, wie es mehrere Physiker nachgewiesen haben; Faraday aber, der mit Platten von gleichen Dimensionen arbeitete, musste eine Zunahme der Influenz beobachten.

110. Kraftlinien von Faraday. Man kann auch in einer sehr einfachen Weise von den Versuchen Rechenschaft geben, durch welche Faraday zu beweisen suchte, dass die elektrische Influenz (Induction) durch schlecht leitende Körper (Dielektrika) sich in krummen Linien äußern kann.

Faraday setzte z. B.(¹) eine metallene Halbkugel T (Fig. 69) von 35 Millimeter im Durchmesser auf einen Schellackcylinder S von 23 Millim. im Durchmesser und 178 Millim. Länge. Die obere Hälfte des Schellackcylinders wurde mit Flanell gerieben, dann die Kugel T in leitende Verbindung mit dem Erdboden gebracht und hierauf isoliert. Faraday nahm dann eine leitende Kugel, welche von einer isolierenden Handhabe V getragen wurde, und brachte sie successiv in die verschiedenen, durch die Buchstaben *a*, *d*, *t*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o* und *p* angezeigten Lagen. In jeder dieser Stellungen wurde die Kugel zuerst in leitende Verbindung mit dem Erdboden gebracht, dann isoliert und in eine Torsionswage gebracht, deren bewegliche Kugel mit positiver Elektricität geladen war; man bestimmte die Torsion, welche nöthig war, um die bewegliche Kugel in eine bestimmte Winkelentfernung zu bringen. Die Kugel nahm in allen Fällen positive Elektricität an, aber eine mehr oder weniger große Menge, je nach der Lage, welche sie einnahm, wie man aus der folgenden Tafel ersieht:

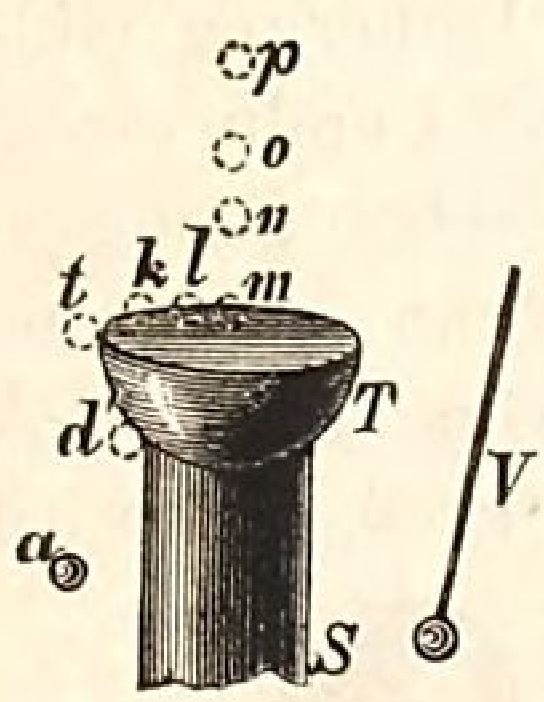


Fig. 69.

(¹) Experimental Researches, vol. I., p. 383.

Lage der Kugel	Entsprechende Torsion
t	112°
k	108°
l	65°
m	35°
n	87°
o	105°
p	98°

Wenn die Kugel in solchen Punkten wie *a*, *d*, *t* sich befindet, so begreift man wohl nach Faraday, dass die Influenz des elektrisierten Schellacks auf diese Kugel in gerader Linie sich äußern kann, für andere Punkte aber, wie *k*, *l*, *m*, welche hinter der metallenen Halbkugel gelegen sind, würde dies nicht mehr der Fall sein; die Influenz, die sich in dieser Gegend nur in der Weise ausüben kann, dass sie die Metallcalotte umkreist, muss schwächer werden und in der That vermindert sie sich in sehr schneller Weise. Andererseits wird, je mehr man sich ober den Punkt *m* erhebt, die Influenz vom neuen größer und erreicht in *o* einen größten Wert, um sich dann langsamer zu vermindern.

Faraday kam also zu diesem Schlusse, dass die Influenz in der Entfernung sich mittelst des dazwischenliegenden isolierenden Mediums vollzieht, dessen Molecüle sich polarisieren, sich mit ihren entgegengesetzt bezeichneten Polen aneinander fügen und sich in krummen Linien anordnen, längs welcher die Influenzwirkung sich allmählich fortpflanzt. Diese Linien, welche Faraday Kraftlinien nennt, können einen leitenden Körper erreichen, aber ohne ihn zu durchsetzen, wenn er in leitende Verbindung mit dem Erdboden gesetzt ist; sie sind ganz um einen elektrisierten Körper vertheilt in einer mehr oder weniger regelmäßigen Weise, je nach der Beschaffenheit und der Gestalt der benachbarten Körper, und sie entfalten sich dann immer mehr und mehr, je mehr sie sich ausbreiten. Die elektrische Influenz in einem Punkte des isolierenden Mediums ist umso bedeutender, eine je größere Zahl von

Kraftlinien durch ein Volumelement, das man in diesem Punkte construieren kann, hindurchgehen.

Man könnte dieser theoretischen Betrachtung von Faraday verschiedene Einwendungen machen, indem man z. B. bemerkt, dass die Gegenwart der ponderablen Molecüle keineswegs zur Hervorrufung der Influenzerscheinungen nothwendig ist, da die Influenzwirkung auch durch ein luftleeres Gefäß stattfindet. Es genügt aber zu zeigen, dass die Ergebnisse aller Versuche, welche dem vorigen ähnlich sind, sich auch ganz leicht durch die Wirkungen in die Entfernung erklären lassen. Wird die Kugel mit der nicht isolierten Halbkugel in Berührung gebracht, so spielt sie einfach die Rolle eines Prüfungskörpers und liefert die elektrische Dichte im berührten Punkte; diese Dichte muss in der That so variieren, wie die ersten Zahlen der Tafel. Wenn diese Kugel in das isolierende Medium gestellt ist und mit dem Erdboden in leitende Verbindung gesetzt wird, so hängt die Elektricitätsmenge, mit der sie sich ladet, von dem Unterschiede der Wirkungen ab, die in dem von ihr eingenommenen Punkte von Seite der negativen Elektricität des Schellackcylinders und der positiven Elektricität der Kugel ausgeübt werden. Man sieht leicht ein, dass längs einer durch den Punkt m gezogenen Verticalen die Resultante dieser beiden Wirkungen zuerst zunehmen, dann in langsamerer Weise abnehmen wird. Wir werden an einer späteren Stelle diesen Faraday'schen Versuch, der ihn zur Annahme von Kraftlinien führte, theoretisch betrachten.

Der Begriff der Kraftlinie ist daher nicht nothwendig, um die Erscheinungen der Influenz zu erklären, aber nichtsdestoweniger muss man ihn beibehalten, weil er dazu dienen kann, in sehr klarer Weise die Vertheilung der elektrischen Wirkungen darzustellen. In der That, die Resultierende der in einem Punkte von Seite eines beliebigen Systemes elektrisierter Körper ausgeübte Wirkung ist tangential zu der durch diesen Punkt gehenden Kraftlinie. Danach begreift man, dass alle Kraftlinien aus den elektrischen Körpern herausgehen müssen, und zwar normal zu ihrer Oberfläche, wenn sie Conductoren sind, dass ferner diese Kraftlinien sich dann nach einem mehr oder weniger complicierten Gesetze verbreiten

müssen. Wir werden überdies auf diese Untersuchung zurückkommen.

111. Doppelinfluenz. Ein schlecht leitender Körper wird durch Influenz nicht augenblicklich elektrisch oder es wird zum mindesten die Maximalladung nur am Ende einer mehr oder weniger langen Zeit erreicht; es können daraus genug complicierte Phänomene sich ergeben.

Setzen wir z. B. voraus, dass ein positiv elektrischer Körper A sich in der Nähe zweier hintereinander aufgestellten Scheiben B und C befinde; die erste ist schlecht leitend, die zweite ist gut leitend und mit der ersten in Berührung. Die beiden Scheiben sind in derselben Weise elektrisch, negativ auf der Seite des influencierenden Körpers und positiv auf der entgegengesetzten Seite; die Seite der isolierenden Scheibe, welche den Leiter berührt, besitzt daher zwei Elektricitätsschichten vom entgegengesetzten Zeichen, von denen die eine oder die andere die Oberhand erhalten kann.

Wenn die Influenzwirkung von sehr kurzer Dauer gewesen ist, so wird die dem isolierenden Körper zukommende Elektrisierung sehr schwach sein; die Hinterseite wird einen Überschuss an negativer Elektricität besitzen, welche von der leitenden Scheibe herrührt, so dass die beiden Seiten dieser Scheibe alle zwei negativ elektrisch sein werden: dies ist jene Erscheinung, der Rieß [1] den Namen der Doppelinfluenz gegeben hat.

Ist andererseits die Influenzwirkung von langer Dauer, so wird der isolierende Körper seine Maximalladung erreichen, welche bedeutender sein wird, als jene der leitenden Scheibe. Die Hinterseite der isolierenden Scheibe besitzt nun einen Überschuss an positiver Elektricität, so dass die Elektrisierung dieser Scheibe sich in der gewöhnlichen Weise, wie sie durch einfache Influenz hervorgerufen wird, vorfindet.

Diese Erscheinung wurde von Rieß zuerst angegeben, sie ist eine directe Consequenz jener Phänomene, welche schon studiert wurden, und es scheint nicht nothwendig zu sein, sie mit einem speciellen Namen zu bezeichnen.

[1] Pogg. Ann., Bd. CXXXI, p. 215. Annales de Chimie et de Physique, 4e serie, t. XIII., p. 190.

112. Elektrische Bewegungen, durch Spitzen erzeugt. Wir haben früher (72) die Rotation des elektrischen Rädchens beschrieben und diese Erscheinung durch die Abstoßung erklärt, welche die elektrisierten Luftmolecüle, die den elektrischen Wind bilden, durch ihre Reaction auf die Spitze selbst ausüben. Bemerken wir zuerst, dass der Abfluss der Elektricität, welcher durch eine leitende, nicht isolierte Spitze, die sich in der Nähe eines influencierenden Körpers befindet, stattfindet, einen elektrischen Wind und eine Rückwirkung hervorruft, die vollkommen mit jener identisch ist, welche stattfindet, wenn die Spitze einen Theil eines elektrisierten Leiters ausmacht. Es würden daher alle Rotationsversuche des elektrischen Rädchens ebensogut gelingen, wenn dieser Apparat in leitende Verbindung mit dem Erdboden gebracht und einfach in die Nähe einer Elektrisiermaschine gestellt wird.

Mehrere Versuche schienen diese Erklärung der Drehung des Rädchens infolge der Rückwirkung der umgebenden Luft zu bestärken. So dreht sich im luftleeren Raume oder wenigstens in sehr verdünnten Gasen das Rädchen nicht mehr; in diesem Falle besteht der Elektricitätsverlust nicht minder, aber er findet bei einer schwächeren Ladung und für alle Punkte der Oberfläche des elektrisierten Körpers statt; überdies, wenn er sich wieder in größerer Menge an den Spitzen geltend macht, so genügt dennoch die Resultante der Rückwirkungen, die kleiner ist, nicht zur Hervorrufung der Rotation des Apparates.

Ebenso dreht sich das Rad, wenn man es unter eine gut isolierende Glasglocke bringt, anfänglich rasch, dann immer weniger und schließlich hört die Drehung fast vollständig auf. Die Masse der umgebenen Luft ist dann beschränkt, alle Gasmolecüle sind stark elektrisiert und es würde, wenn die Elektricitätsverluste durch die Oberfläche der Glocke beseitigt wären, das Rädchen bald beinahe in denselben Zustand kommen, als ob es im Innern eines Leiters, der mit dem Rädchen in Verbindung gesetzt ist, sich befinden würde; die elektrische Dichte würde in allen Punkten des Apparates sehr schwach sein und es würde weder ein elektrischer Wind noch eine Rückwirkung entstehen. Wenn man dann an die Glocke die

Hand anlegt, so ruft man durch Influenz eine neue Vertheilung der Elektricität in dem Gase hervor, das Gleichgewicht ist gestört und die Bewegung des Rädchens beginnt vom neuen, um dann wieder aufzuhören, wenn die Hand unbeweglich bleibt: es nimmt das Rädchen eine Geschwindigkeit an, die immer größer wird, wenn man die Hand hin- und herbewegt.

Ein anderes isolierendes Medium als Luft muss dieselbe Wirkung hervorrufen. So hat Aimé (¹) nachgewiesen, dass das Rädchen sich im Olivenöl dreht, sich aber nicht in einer leitenden Flüssigkeit bewegt, wie im Wasser, weil dann die Elektricität sich von der ganzen Oberfläche dem umgebenden Medium mittheilt. Masson gibt sogar diesen Versuch als ein bequemes Mittel an, um gut- und schlechtleitende Flüssigkeiten zu unterscheiden.

113. Das Problem des elektrischen Rädchens hat die Aufmerksamkeit einer großen Anzahl Physiker erregt (²); die vorhergehende Erklärung dürfte vielleicht nicht genügen, um von allen Erscheinungen Rechenschaft zu geben und es wird besser sein, die Untersuchung von einem anderen Gesichtspunkte aus zu betrachten, indem man sich auf das folgende Theorem stützt: Wenn ein elektrisierter Conductor A sich in der Nähe irgend eines Systemes B elektrisierter Körper befindet, so ist die Resultante der Kräfte, welche auf den Körper A wirken, gleich der Resultante der elektrischen Spannungen, welche dieser Körper in den verschiedenen Punkten seiner Oberfläche auf das umgebende Medium ausübt, wenn die Elektricitätszerstreuung unmerklich ist. (Wir setzen — zur Vereinfachung des Sprachgebrauches — voraus, dass alle Kräfte, denen der Körper A unterworfen ist, eine Resultante haben; das Theorem ist in gleicher Weise richtig, wenn alle diese Kräfte nicht auf eine einzige Resultierende reduciert werden können.)

Dieser Satz kann als evident betrachtet werden, es ist aber nicht ohne Nutzen einen Beweis desselben zu geben. Die

(¹) Annales de Chimie et de Physique, 2ᵉ serie, t. LXII, p. 421.

(²) Man sehe eine sehr detaillierte Geschichte dieser Untersuchung von Tomlinson, Phil. Mag. t. XXVII. p. 202.

elektrische Spannung auf einem Oberflächenelemente $d\sigma$ des Körpers A ist die Resultierende der Wirkungen, welche auf die elektrische Masse $\mu d\sigma$, die in diesem Elemente enthalten ist, von Seite der äußeren Elektricitätsmengen und jener des Körpers selbst ausgeübt werden. Die Resultante der Spannungen kann daher aus zwei Theilen gebildet betrachtet werden: 1. der Resultante der Wirkungen aller außerhalb gelegenen Elektricitätsmengen auf alle elektrischen Elemente des Körpers A; 2. der Resultante der Wirkungen, welche zwischen den verschiedenen elektrischen Massen, welche auf diesem Körper selbst verbreitet sind, ausgeübt werden. Nun ist dieser zweite Theil Null, weil, wenn kein Elektricitätsverlust stattfindet, die Elektricität an der Oberfläche des Körpers adhärierend gedacht werden kann und alle Kräfte, um deren Zusammensetzung es sich handelt, zwei und zwei gleich und entgegengesetzt bezeichnet sind. Der erste Theil stellt augenscheinlich die Wirkung dar, welche die äußeren Körper auf den vorausgesetzten Körper ausüben, womit also das Theorem bewiesen ist.

Man kann auch sagen, dass die elektrische Spannung auf einem Elemente der Oberfläche um eine bestimmte Größe den Druck vermindert, welchen das umgebende Gas auf diese Oberfläche ausübt und dass die Resultante der elektrischen Kräfte, welche auf einen Körper wirken, gleich der Resultante der in dieser Weise geänderten Drücke des umgebenden Gases ist.

Es folgt daraus, dass, wenn ein elektrisierter Conductor von was immer für einer Gestalt, wie etwa das elektrische Flugrädchen, auf eine isolierende Spitze gestellt und jeder äußeren Wirkung entzogen wird, dieser Conductor keine Bewegung annehmen wird können, solange man bei Vernachlässigung der Elektricitätszerstreuung die Elektricität als an den Oberflächen anhaftend wird betrachten können. Wenn aber in einem Elemente der Oberfläche ein reichlicher Elektricitätsverlust stattfindet, so kann der hervorgerufene Druck nicht mehr auf den Conductor wirken, das Gleichgewicht wird gestört und das in Betrachtung gezogene Element wird sich in entgegengesetzter Richtung zu bewegen streben; dies

ist das gewöhnliche Phänomen des elektrischen Rädchens. — Wenn andererseits ein beweglicher elektrisierter Leiter in leitende Verbindung mit anderen elektrisierten Körpern gesetzt oder irgendwelchen äußeren Wirkungen unterworfen wird, so werden die elektrischen Drücke auf diesem Conductor im allgemeinen sich nicht das Gleichgewicht halten. So kann ein elektrisches Rädchen sich in Bewegung setzen, ohne dass ein Elektricitätsverlust stattgefunden hat, und die äußeren Wirkungen können sogar derart sein, dass die Drehung im Sinne der Richtung der Spitzen stattfinden würde. Gleichwohl kann eine solche Drehung nicht continuirlich sein, weil zwischen zwei Durchgängen des Apparates in dieselbe Lage die Arbeit der elektrischen Kräfte Null sein würde (1).

Wenn nun das Rädchen einen Elektricitätsverlust durch die Spitzen erfährt, so wird es entweder eine neue Gleichgewichtsposition erreichen können, indem es in irgendeiner Richtung vorrückt, oder es wird eine continuierliche Rotationsbewegung annehmen können, welche der Richtung der Spitzen entgegengesetzt ist; das letztere wird am häufigsten stattfinden.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass, wenn man diesen Apparat mit dem hydraulischen Rade vergleicht, man die Ähnlichkeit, welche thatsächlich zwischen den beiden Erscheinungen besteht, übertreibt, weil die Drücke in beiden Fällen verschiedenen Gesetzen gehorchen.

114. Diese Betrachtungen erlauben nun leicht die nachstehenden Versuche von Neyreneuf zu erklären. Ein Rädchen, welches aus einer einzigen Nadel besteht, die an ihrem einen Ende eine Kugel, am anderen Ende eine umgebogene Spitze trägt, ist auf eine leitende Spitze gestellt, die sich in der Mitte einer leitenden, mit einer Elektrisiermaschine in Verbindung gesetzten Scheibe befindet; dieses Rädchen dreht sich dann in der gewöhnlichen Weise, d. h. in einer der Spitze entgegengesetzten Richtung. Nimmt das Rad auf der Scheibe eine excentrische Lage ein, so kann es entweder im Gleichgewichte bleiben oder in eine Gleichgewichtslage rücken, indem es in irgendeinem Sinne seine Lage verändert oder

(1) Biot, Traité de physique, t. II, p. 324.

eine continuierliche Rotationsbewegung in einer Richtung annehmen, welche der Richtung der Spitze entgegengesetzt ist. Stellt man das Rädchen, das nicht isoliert ist, einem elektrisierten Conductor gegenüber, so kann man ebenso eine continuierliche Rotation im gewöhnlichen Sinne oder eine Bewegung in irgendeinem Sinne gegen eine Gleichgewichtsposition erhalten.

Wenn man die Spitzen eines gewöhnlichen Rädchens mit Hollundermarkkugeln versieht, so dreht sich das Instrument im gewöhnlichen Sinne fast mit der gleichen Geschwindigkeit; werden aber die Spitzen mit isolierenden Kugeln versehen, so wird die Drehung bedeutend verlangsamt und kann sogar unter gewissen Umständen im entgegengesetzten Sinne vorsichgehen. Der Versuch mit dem elektrischen Rädchen, unter welcher Form er auch immer wiederholt werden mag, muss auf dieselbe Weise erklärt werden. Es kann nur dann eine continuierliche Rotationsbewegung stattfinden, wenn irgendwohin ein Entweichen der Elektricität stattfindet und der Sinn der Rotation hängt einzig und allein von der Richtung des elektrischen Windes ab. Dieser Wind wird überdies längs der Kraftlinien entstehen und nicht nothwendigerweise in der Richtung der Spitze, wie man sich davon überzeugen kann, wenn man mit positiver Elektricität arbeitet und im Dunkeln die Richtung der Lichtbüschel beobachtet, welche von dem Apparate ausgehen.

115. Ruhmkorff hat eine ziemlich sonderbare Art eines elektrischen Rades construiert, durch welches man zeigen kann, dass der elektrische Wind nicht nothwendigerweise in die Richtung der Spitzen fällt, die ihn hervorrufen. Dieses Instrument besteht aus einer Glimmerscheibe D (Fig. 70), welche sich auf einer verticalen Spitze drehen kann. Unter dieser Scheibe und in einer und derselben Ebene mit der Rotationsaxe sind zwei Metallstäbchen *a* und *b* aufgestellt, die an ihren oberen Enden in Spitzen ausgehen und an einer Stütze aus Hartkautschuk befestigt sind. Diese beiden Stäbe sind separat mit zwei horizontalen Armen in Verbindung, von denen der eine A in eine feine Spitze ausgeht, während der andere abgerundet ist.

Wenn man diesen Apparat mittelst des abgerundeten Armes in der Hand hält und den zweiten Arm einem elektrisierten Körper, z. B. der Mitte des Conductors einer positiv elektrisierten Maschine nähert, so lässt diese Spitze A negative Elektricität entweichen, die entsprechende verticale Spitze a liefert positive Elektricität, welche die Glimmerplatte ladet; die andere verticale Spitze b liefert ebenso negative Elektricität.

Wenn alles bezüglich der Verticalebene der beiden Metallstäbe symmetrisch ist, so ist die Glimmerscheibe im Gleichgewichte und dreht sich, wenn man ihr eine kleine Bewegung in irgend einem Sinne ertheilt, continuierlich mit einer zunehmenden Geschwindigkeit. Wenn man aber den Apparat den Enden des Conductors nahe bringt, oder wenn man ihn derart

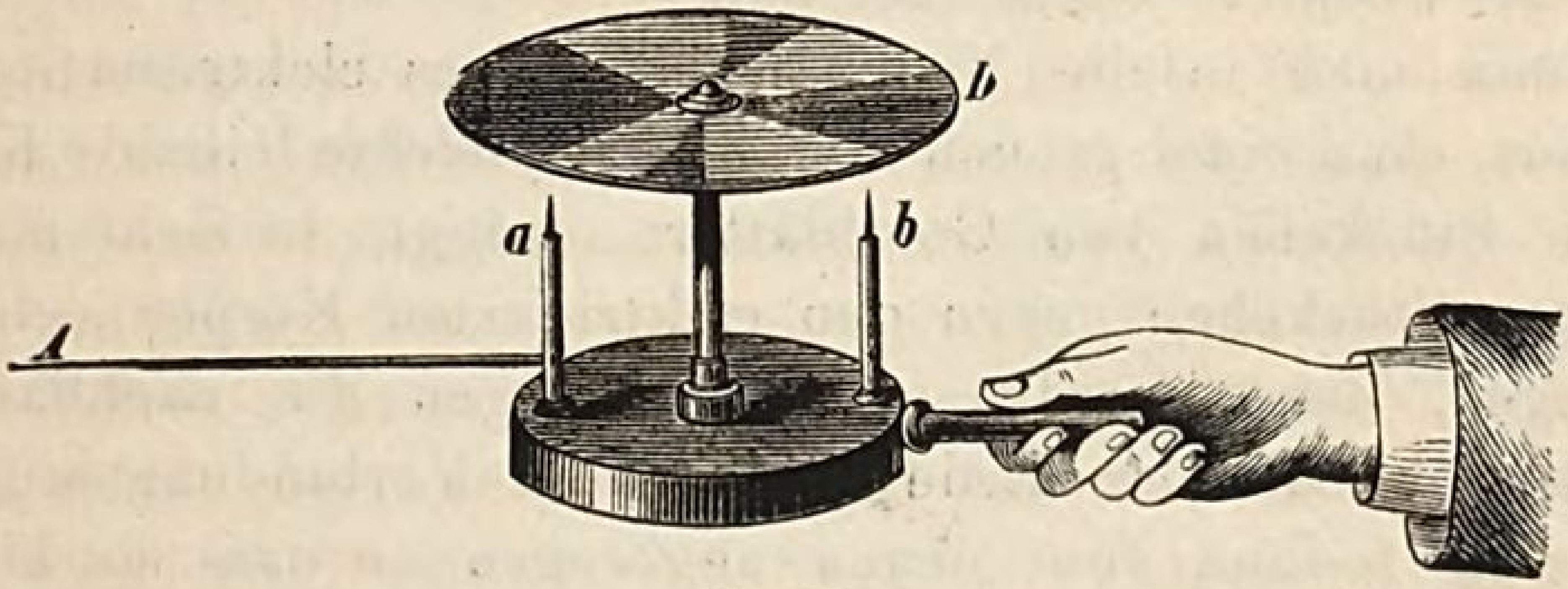


Fig. 70.

richtet, dass die Ebene der Stäbchen gegen den elektrisierten Cylinder schief ist, so entweicht die Elektricität aus den verticalen Spitzen schief gegen die Symmetrieebene; die Scheibe setzt sich von selbst in einem bestimmten Sinne in Bewegung und sie kehrt nach einiger Zeit wieder zurück, wenn man ihr eine Drehung in entgegengesetzter Richtung ertheilt. Es ist leicht einzusehen, dass die Theile der Scheibe, welche der Spitze *a* benachbart sind, sich vom influencierenden Körper entfernen müssen, was mit dem Experimente sich in Übereinstimmung befindet.

116. Die Eigenschaften der Spitzen können die Erscheinung der Attraction und Repulsion sehr ändern. So z. B.: wenn man einem elektrisierten Körper ein Pendel aus Hollundermark nähert, das die Form eines kleinen Cylinders hat, der am einen Ende abgerundet ist, während er am andern

Ende zugespitzt ist, so bewegt sich dieser Cylinder schnell gegen den elektrisierten Körper mit seinem abgerundeten Ende voran und kommt hierauf in einer Entfernung von einigen Millimetern ins Gleichgewicht, wobei die an der Spitze durch den elektrischen Wind hervorgerufene Reaction der Repulsion das Gleichgewicht hält, welche sich an jener Stelle äußert, die dem elektrisierten Körper am nächsten ist.

Wenn man andererseits dieses elektrische Pendel dem elektrisierten Körper mit seiner Spitze nahebringt, so wird es abgestoßen, aber das Gleichgewicht ist nicht stabil, der Cylinder dreht sich dann um sich selbst und nimmt die erste Lage ein.

Franklin hat ein ähnliches Experiment angestellt, welches er den Versuch mit dem „elektrischen Fische“ nennt und welches man später mit dem abenteuerlichen Namen „Grab des Mahomet“ bezeichnet hat.

Wenn man in die Nachbarschaft eines elektrisierten Conductors, etwa einer großen Metallschale, leichte leitende Körper, z. B. Stückchen von Goldblättern, bringt, so sieht man die meisten Stückchen gegen den elektrisierten Körper sich rasch bewegen, dann werden dieselben gegen die nachbarlichen Körper, die mit der Erde in leitender Verbindung sind, abgestoßen, sodann vom neuen angezogen, so dass sie hin und her sich bewegen und zwar zuweilen innerhalb beträchtlicher Entfernungen. Man sieht aber auch, dass einige von ihnen oberhalb und unterhalb des elektrisierten Körpers und mehrere auch seitwärts vom letzteren in der Luft schweben bleiben.

Es gibt auch einige, welche sich um sich selbst drehen, andere, welche sich abwechselnd der Schale nähern und sich von ihr entfernen, ohne jedoch dieselbe zu berühren, wie ein Fisch am Rande eines Wasserbehälters, oder auch sich rings um die Schale drehen, wobei sie der letzteren immer das dickere Ende zuwenden und das andere Ende sich wie ein Schweif bewegt.

Franklin construierte diese kleinen Fische aus einem Stück Goldblatt, das in der Gestalt von zwei gleichschenkligen Dreiecken, die bezüglich ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie entgegengesetzte Lage hatten, geschnitten war. Wenn die beiden Spitzen den gleichen Winkel hatten und wenn der Fisch

zwischen den beiden Platten, welche zur Hervorbringung des Versuches der elektrischen Zappelmännchen dienen, sich befand, so erhielt sich der Fisch fast in gleicher Entfernung von den beiden Platten. Sind die Winkel an den zwei Spitzen der Dreiecke ungleich, der spitzere Winkel (Schweif) nach unten, der Kopf nach oben gerichtet, so war der Fisch der oberen Platte näher.

Man kann noch an dem Schweife einen ähnlichen Fisch halten, der einen langen Schweif und einen sehr kurzen Kopf hat, und ihn in die Nähe einer elektrisierten Kugel bringen, er bewegt sich wie ein Aal im Wasser und zwar ferne von der Kugel hin und her; hält man ihn aber am Kopfe, so kehrt sich der Schweif um, als ob er die Hand erreichen wollte.

Die Einstellung eines Goldblattes dieser Form in einer gegen die Verticale geneigten Richtung kann nicht durch die Rückwirkungen eines elektrischen Windes, der in der Richtung der Axe des Goldblättchens vorausgesetzt ist, erklärt werden, weil diese Rückwirkungen keine verticale Resultante haben könnten, welche der Wirkung der Schwere das Gleichgewicht halten würde. Man begreift überdies nach der Vertheilung der Dichten, dass die Drücke auf alle Elemente der Oberfläche sich auf zwei Kräfte f und f' (Fig. 71) reducieren könnten, Kräfte, welche an den Enden B und C des Fisches, die entgegengesetzt elektrisch sind, angreifen, und dass diese Kräfte eine verticale Resultierende, die von unten nach oben gerichtet und dem Gewichte des Goldblättchens gleich ist, geben könnten.

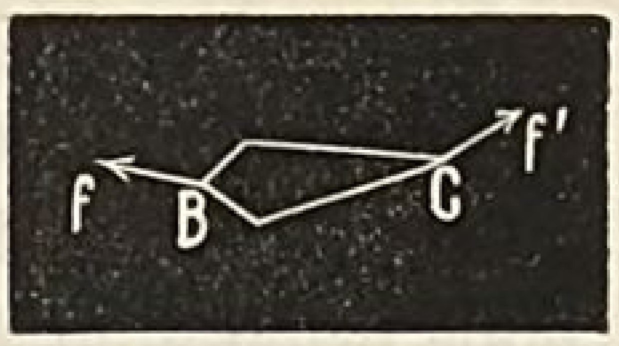


Fig. 71.

In Wirklichkeit ist das Problem sehr compliciert und es bietet überdies dasselbe kein besonderes wissenschaftliches Interesse.

117. Elektrophor. Wir werden dieses Capitel über elektrische Influenz mit dem Studium des Elektrophor beschließen, welcher eine der interessantesten Anwendungen der Influenz darstellt. Wilke[1] hat schon 1762 mit einer Glasplatte Erscheinungen beobachtet, welche als die wirkliche Quelle dieses

[1] Scripta Academiae Suec. Scientiarum (1762).

Instrumentes betrachtet werden können. Volta[1] aber hat, ohne von den Arbeiten Wilke's in Kenntnis gesetzt zu sein, viel energischere Wirkungen erhalten, indem er die Glasplatte durch einen Harzkuchen ersetzte und er hat auf den Nutzen hingewiesen, den man aus diesem Apparate, dem er den Namen eines beständigen Elektricitätsträgers ertheilte, ziehen kann. Der Elektrophor von Volta besteht aus einer Scheibe einer isolierenden Substanz (Fig. 72) und aus einer leitenden Platte, die von einer gläsernen Handhabe oder von Seidenschnüren getragen wird. Man bereitete ehemals die isolierende Scheibe, indem man in eine Form, die aus einem von einem Eisenringe umsäumten Brettchen bestand, entweder geschmolzenes Harz goss oder eine Mischung aus Harz, Terpentin und Burgunderpech (weißes Pech): bei Anwendung der letzteren Mischung erhält man eine weniger blasenreiche und glattere Oberfläche als bei Anwendung von Harz allein. Die Harzkuchen haben die schlechte Eigenschaft, sich nach einer bestimmten Zeit unter dem Einflusse der Temperaturänderungen zu deformieren und überhaupt Risse zu bekommen, was den Wirkungen, die man erhalten kann, sehr hinderlich ist.

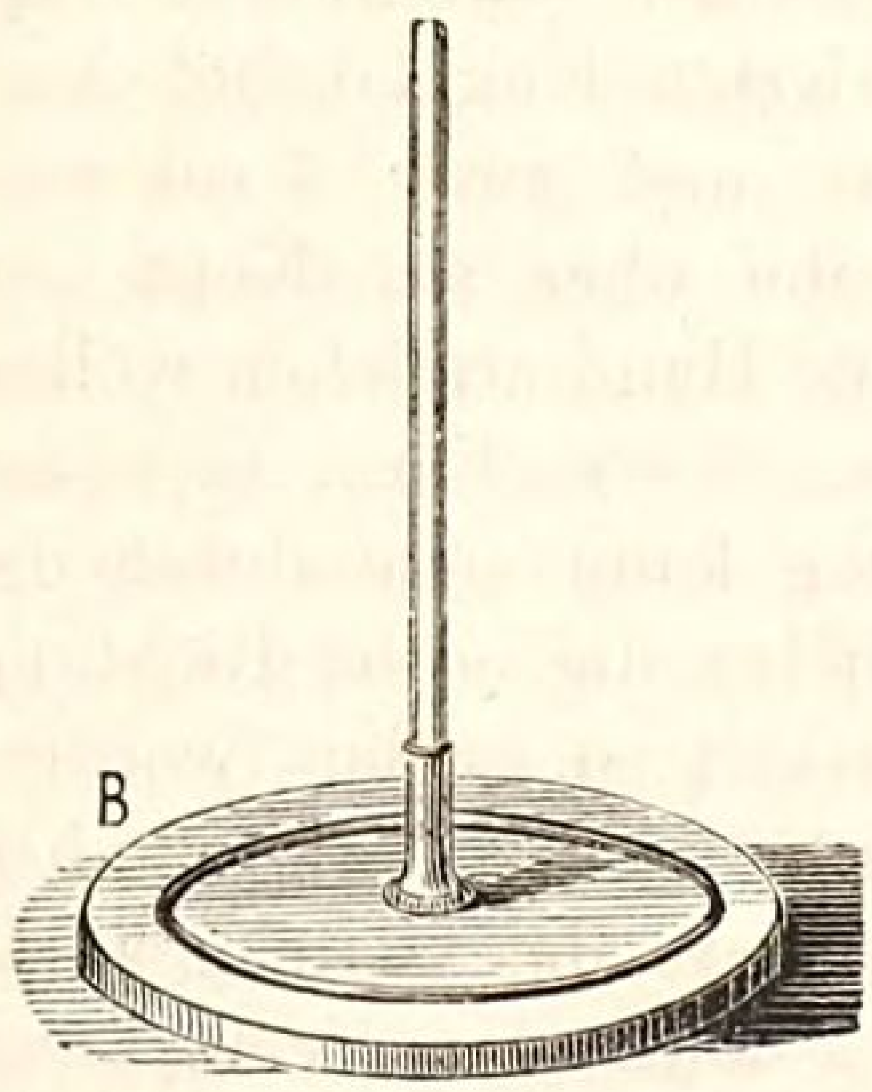


Fig. 72.

Man ersetzt oft den Harzkuchen durch eine einfache Scheibe von Hartkautschuk. Diese Substanz liefert in der That viel Elektricität, vielleicht mehr als das Harz, es kommt aber auch vor, dass der Hartkautschuk sich wirft und in jedem Falle seine Oberfläche schließlich infolge der Änderung der oberflächlichen Schichte durch atmosphärische Einflüsse fast vollständig ihre elektrischen Eigenschaften verliert: der Schwefel z. B., welcher in den Kautschuk eingeführt wurde, liefert infolge der Einwirkung des Sauerstoffes der atmosphärischen Luft saure Producte. Wenn eine Scheibe in diesem Zustande

[1] Collezione dell' opere di Volta, I. p. 105.

sich befindet, so kann man sie dadurch verbessern, dass man sie mit gewöhnlichem Wasser wäscht, oder eine alkalische Lösung auf die Oberfläche gießt und sodann die Oberfläche tüchtig reibt; schwer bleibt es aber immer, in dieser Weise dem Kautschuk seine ursprünglichen Eigenschaften zu ertheilen.

Die leitende Platte besteht gewöhnlich aus Holz, die auf ihren beiden Seiten mit Zinnfolie überdeckt ist; sie hat einen etwas kleineren Durchmesser als die isolierende Scheibe.

Um sich dieses Instrumentes zu bedienen, elektrisiert man zuerst den Harzkuchen (oder die Hartkautschukscheibe), indem man ihn reibt oder noch besser mit einem Katzenfelle schlägt; die Oberfläche ladet sich mit negativer Elektricität und bisweilen in so starker Weise, dass ein Knistern vernehmlich wird und Funken entstehen, wenn man die Hand der Scheibe nähert. Man legt die Scheibe auf den Kuchen und berührt die erstere mit dem Finger; man erhält einen Funken und die Scheibe wird durch Influenz positiv elektrisch. Nun entfernt man den Finger und hebt die Scheibe mit der isolierenden Handhabe ab: die positive Elektricität breitet sich in regulärer Weise auf diesem Conductor aus; nähert man demselben den Finger, so entlockt man ihm einen Funken, welcher manchmal die Länge von 4 oder 5 Centimeter hatte. (1) Man kann sich auch von dieser Wirkungsweise des Elektrophors in der Art überzeugen, dass man als Deckel zwei Metallplatten verwendet, welche durch isolierende Fäden miteinander verbunden sind; diese kann man zugleich einander und der Ebene des Kuchens parallel abheben; es erscheint dann die obere Metallplatte negativ, die untere positiv elektrisch. Wenn die Scheibe einmal entladen ist, genügt es, sie wieder auf den Kuchen zu setzen und dieselbe Operation zu wiederholen, um einen neuen Funken zu erhalten; man kann denselben Versuch fast unbestimmt oft wiederholen, ohne es nöthig zu haben, den Kuchen wieder zu laden.

Schließlich kann der Apparat sich selbst überlassen werden, wobei die Scheibe auf den Kuchen gesetzt ist, und man findet

(1) Lichtenberg construierte einen Elektrophor, dessen Kuchen 6, dessen leitende Scheibe 5 Fuß im Durchmesser hatte; er zog aus demselben Funken von 14 bis 16 Zoll Länge.

den Elektrophor am Ende einer ziemlich langen Zeit, nach mehreren Wochen, ja sogar nach mehreren Monaten noch immer elektrisiert.

118. Die elektrischen Erscheinungen, welche im Elektrophor hervorgerufen werden, geben Anlass zu den mannigfaltigsten Versuchen.

Wir haben schon oben (100) die Wirkungsweise dieses Apparates angegeben, um zu zeigen, dass zwei Oberflächen, die im entgegensetzten Sinne elektrisiert sind, von denen die eine isolierend, die andere leitend ist, in Contact gebracht werden können, ohne dass unter ihnen ein elektrischer Ausgleich durch Funken sich herstellt. In der That, wenn man die Platte auf die isolierende Scheibe setzt, ohne sie in Verbindung mit dem Erdboden zu bringen und dann sie abhebt, so besitzt diese Platte im allgemeinen keine Elektricität, wie es sein muss. Gleichwohl findet man, wenn der Kuchen stark elektrisiert wird und wenn man auf ihn die Scheibe setzt und dann wieder abhebt, ohne sie berührt zu haben, die letztere mit einer kleinen positiven Elektricitätsmenge geladen und der Versuch kann sogar mehreremale gelingen. Diese Erscheinung kann auf zweierlei Arten erklärt werden: wenn die Metallscheibe sehr stark geladen ist, so kann die negative Elektricität, welche sich am oberen Theile vorfindet, sich in geringer Menge zerstreuen, sei es durch die Luft, sei es durch die Handhabe: andererseits ist es nicht unmöglich, dass das Katzenfell, welches stark elektrisch wird, wenn man den Kuchen schlägt, auf der Oberfläche durch directe Entladung eine kleine positive Elektricitätsschichte zurücklässt, welche dann durch die leitende Platte entfernt würde: wir haben Beispiele von verschiedenen übereinandergelagerten Elektricitätsschichten kennen gelernt und wir werden ein ganz ähnliches Phänomen beim Condensations-Elektroskop wieder finden.

Es entwickeln sich im allgemeinen nicht direct Funken zwischen der negativen Elektricität des Kuchens und der positiven Elektricität der Platte, wenn die Oberflächen genau parallel sind. Gleichwohl entstehen, wenn der Kuchen stark elektrisiert ist, im Momente, in welchem man die Verbindung mit dem Erdboden herstellt, Entladungen, insbesonders in der

Nähe des Randes der Platte. Um dies zu zeigen, genügt es, nachdem man die Platte entfernt hat, auf die Oberfläche der isolierenden Scheibe eine Mischung von Schwefel und Mennig oder selbst irgendein anderes Pulver zu werfen; man bemerkt eine Menge von gelben Stellen, die von mehr oder weniger zahlreichen Strahlen umgeben sind; dann aber insbesonders in der Nähe des Randes breitere Flecken mit weiter ausgedehnten Strahlen. Lichtenberg, welcher diese Erscheinung an den verschiedenartigsten isolierenden Platten und mit den mannigfaltigsten Pulvern studiert hat, beschreibt mit Begeisterung die Erscheinungen, um welche es sich hier handelt und vergleicht den Harzkuchen mit einem Firmamente, das von Sternbildern besäet ist und von mehreren Sonnen erleuchtet wird. Um eine bemerkenswerte Beobachtung anzustellen und diese Sterne wahrzunehmen, muss man das Pulver, sobald man die Scheibe abgehoben hat, aufstreuen; denn sonst würden die positiv elektrischen Stellen schließlich verschwinden und die negative Elektricität den isolierenden Kuchen in seiner ganzen Ausdehnung einnehmen. Es folgt daraus, dass die Elektrisierung des Kuchens sich allmählich vermindert, wenn man sich des Instrumentes bedient, wenigstens so lange er stark geladen ist.

119. Wenn die Platte, einmal elektrisiert, mit ihrem Rande dem Harzkuchen genähert wird, entsteht ein starker Funke und man kann so mittelst der Lichtenberg'schen Pulver die mannigfaltigsten Figuren erhalten. Wenn man mehreremale diesen Versuch wiederholt, so würde man schnell den Kuchen in den neutralen Zustand bringen; man kann aber daraus Nutzen ziehen, um die Ladung eines Elektrophors zu verstärken.

Nehmen wir an, man hätte zwei Harzkuchen; der eine A ist schwach mit negativer Elektricität geladen, der andere B sei im neutralen Zustande. Setzt man die Platte auf die Scheibe A, so ladet man sie mit positiver Elektricität, dann setzt man sie mit ihrem Rande auf die Scheibe B, auf welcher die Elektricität sich mittelst eines Funkens absetzt. Durch mehrere ähnliche Vorgänge wird man diese Scheibe mit positiver Elektricität, und zwar in genügender Menge laden, so dass man sich dieses Elektrophores seinerseits bedienen und der Metallscheibe negative Elektricität ertheilen kann, welche Elektricität man auf die

Scheibe A zurückbringen wird, indem man den Deckel mit seinem Rande auf die letztere Scheibe setzt. Man gelangt bald durch diese wechselseitigen Entladungen dahin, dass man den beiden Instrumenten die größte Elektricitätsmenge ertheilt, welche sie erhalten können.

Die Form, in welche der Harzkuchen gegossen wurde, spielt in dem Phänomene auch eine Rolle, wie man leicht zeigen kann. Wenn diese Form isoliert und in leitende Verbindung mit einem Goldblatt-Elektroskop gebracht wird und man den Kuchen mit einem Katzenfelle reibt, so divergieren die Blättchen energisch und sind mit negativer Elektricität geladen. Nachdem man die Form berührt hat, um die Blättchen in den neutralen Zustand zu bringen, setzt man den Deckel auf den Harzkuchen; die Blättchen divergieren von neuem und sind positiv elektrisch. Man berührt die Form, dann den Deckel: die Blättchen divergieren wieder und sind immer positiv elektrisch. Man bringt sie von neuem zur Berührung und hebt den Deckel in die Höhe: es entsteht eine neue Divergenz der Blättchen, welche diesmal mit negativer Elektricität geladen sind. Während des Spieles des Elektrophors ist die Form somit der Sitz von beträchtlichen elektrischen Bewegungen, deren Einzelnheiten, wie man sieht, man leicht erklären kann und man kann bemerken, dass, wenn die Form isoliert bleibt, die positive Elektricität, welche sich auf ihrer Oberfläche zeigt, wenn man den Deckel auf die Harzscheibe auflegt, der Influenzwirkung, welche sich auf den Deckel äußert, hinderlich in den Weg tritt: diese Beobachtung reicht hin, um zu zeigen, dass es nützlich ist, die Form mit dem Erdboden in leitende Verbindung zu setzen. Diese Form spielt ohne Zweifel auch eine andere wichtige Rolle: Die positive Elektricität, mit der sie durch Influenz geladen ist, zieht die negative Elektricität des Kuchens nach unten und bewirkt, dass diese Elektricität tiefer in den Harzkuchen eindringt, was zur Verminderung der Elektricitätszerstreuung von der Oberfläche des Kuchens beiträgt; dieser Umstand kommt vielleicht zum Theil in Betracht bei jener dem Elektrophor zukommenden Eigenthümlichkeit, eine lange Zeit auch Elektricität, mit der er geladen wurde, zu behalten.

Riess[1] hat die Ansicht aufgestellt, dass die auf dem Harzkuchen durch Reiben erzeugte negative Elektricität auch in der Masse des Kuchens Influenzwirkungen hervorrufe. Wir haben früher erwähnt, dass, wenn die isolierte Form in leitende Verbindung mit einem Elektroskope gebracht und der Kuchen gerieben wird, die Blättchen lebhaft divergieren, da sie mit negativer Elektricität geladen sind. Diese negative Elektricität wurde nach Riess in der Form nicht direct durch Influenz erregt, sondern gieng von der unteren Seite des Kuchens in die Form über; in der That fand Riess die Hinterfläche des für sich isoliert aufgestellten Kuchens negativ elektrisch; die an der Oberseite des letzteren durch Reiben erzeugte negative Elektricität hat also durch Influenz in dem Kuchen zwei elektrische Schichten hervorgerufen, eine positive in der Harzmasse und eine negative an der Hinterfläche des Kuchens, welche in die Form übergeht, wenn der Kuchen in diese gebracht wird; in diesem Falle kommt die positive Elektricität auf die Rückseite des Kuchens und dies hat auch Riess nachgewiesen, als er den Kuchen umkehrte und dessen Rückseite untersuchte. — Die Erklärung der oben angegebenen Erscheinungen ist unter Zugrundelegung dieser von Riess ausgesprochenen Ansicht nicht schwer.

Von Bezold[2] hat auf Grund von Versuchen, die er am Elektrophor mit dem Schwefel-Mennig-Gemische anstellte, die Ansicht ausgesprochen, dass nur die obere Fläche des Elektrophorkuchens durch Reiben elektrisch wird, dass in der Masse des Kuchens keine merkliche Influenzwirkung stattfindet und dass die Phänomene, welche man an der Form und der rückwärtigen Fläche des Kuchens beobachten kann, ihren Grund in der Vertheilung, welche von der oberen Fläche des Kuchens in der Form erzeugt wird, und in der Fernwirkung haben, die von der oberen Kuchenfläche ausgeht. — Es ist übrigens nach den früher auseinandergesetzten Experimenten kaum zweifelhaft, dass in dem Kuchen durch die negative elektrische Oberseite desselben eine Polarisation der Moleküle eintritt; die sämmtlichen Elektricitätsschichten im

[1] Riess, Reibungselektricität, I. §. 298.
[2] Münchener Akademie-Sitzungsberichte, 1870 und 1871.

Elektrophor bewirken in der Form eine Vertheilung derart, dass in der isolierten Form die obere Seite derselben positiv elektrisch, die untere Seite hingegen negativ elektrisch ist. Nach Bezolds Versuchen ist die positive Elektricität der abgeleiteten Form auf die Rückseite des Kuchens übergegangen, während Riess, wie oben erwähnt, die allerdings wenig plausible Annahme macht, dass die im Kuchen entstandene positive Elektricität, wenn die Form abgeleitet ist, auf die Rückseite des Kuchens sich begibt.

Wüllner(¹) sagt daher treffend, dass die Versuche von Bezold nicht geeignet sind, die Theorie des Elektrophors — wie sie von Riess aufgestellt wurde — zu erschüttern, sondern nur in dem (jetzt erörterten) Punkte zu corrigieren.

Elektrische Condensation.

120. Elektricitätsquellen. Die Elektrisiermaschinen bestehen gewöhnlich aus einem schlecht leitenden Körper, auf welchem Elektricität durch Reiben erzeugt wird, und einem metallischen Conductor, welcher entweder durch in die Ferne wirkende Influenz oder directer durch Funken elektrisch wird, welche sich zwischen dem Conductor und dem geriebenen Körper zeigen. Wie auch immer eine Elektrisiermaschine oder irgendein Elektricität erzeugender Apparat wirken möge, in allen Fällen ist es leicht nachzuweisen, dass der durch diese Maschine elektrisch gewordene Conductor nicht ohne Grenze Elektricität aufnehmen kann; wenn man nicht die in jedem Augenblicke hervorgerufene Elektricität äußeren Körpern mittheilt, so kommt man bald zu dem Punkte, dass zufolge der Rückwirkungen, welche zwischen den verschiedenen Theilen des Apparates stattfinden, und der beständigen Elektricitätszerstreuung durch die Luft und die Stützen, die Maschine aufhört zu wirken oder zum mindesten nur mehr dazu hinreicht, den Verlust an Elektricität wieder gutzumachen; dann hat der Conductor der Maschine seine Maximalladung erreicht. Stellen wir nun eine Verbindung durch einen Metallstab zwischen der Maschine und einem anderen isolierten Con-

(¹) Lehrbuch der Experimentalphysik, 4. Bd.

ductor her, so wird dieser neue Conductor seinerseits elektrisch, es wird aber nicht lange dauern und auch dieser wird einen Grenzzustand erreichen: das Gleichgewicht wird vom neuen stattfinden, und zwar am Ende einer mehr oder weniger langen Zeit, sobald die Abstoßung, welche von diesem neuen Conductor auf ein Molecül des elektrischen Fluidums, das auf dem Verbindungsstabe liegt, ausgeübt wird, gleich jener Abstoßung ist, welche dasselbe elektrische Theilchen von Seite der Elektrisiermaschine erfährt, und diese letztere besitzt, wie wir gesehen haben, eine beschränkte Ladung. Die Elektricitätsmenge, welche der Maschine durch die Herstellung dieser Verbindung entnommen wurde, hängt überdies von den Dimensionen des in Anwendung gebrachten Conductors ab.

Die Bezeichnung „Elektricitätsquelle,“ welche auf irgendeinen Elektricität erzeugenden Apparat angewendet wird, weist zur Genüge auf die Ähnlichkeit hin, welche zwischen derartigen Apparaten und den natürlichen Wasserquellen besteht, deren Production auch unbegrenzt ist, wenn die Flüssigkeit in permanenter Weise abfließen kann, welche aber nicht vermögen würden, das Wasser in einer verticalen Röhre oder in einem ausflusslosen Wasserbehälter zu einem Niveau zu heben, das höher wäre als jenes der unterirdischen Wässer, welche die Speisung vornehmen. Die Ähnlichkeit wird noch mehr hervortreten, wenn wir im weiteren Verlaufe die Bedeutung der Elektrisiermaschinen klar dargelegt haben werden.

121. Princip der elektrischen Condensation. Wie dem auch immer sei, mit einer gegebenen Elektricitätsquelle kann man auf einem Conductor, wenn man aus den Erscheinungen der Influenz Nutzen zieht, eine größere Elektricitätsmenge ansammeln, als wenn dieser Conductor einfach mit der Elektricitätsquelle in leitende Verbindung gebracht und der Influenzwirkung aller äußeren Conductoren entzogen wäre; dies ist das, was die Erscheinung der elektrischen Condensation ausmacht.

Einige elementare Betrachtungen werden genügen, um das Spiel der Condensation zu erklären. Setzen wir voraus, dass eine positive Elektricitätsquelle S (Fig. 73) durch einen Metalldraht in leitende Verbindung mit einem Conductor ge-

setzt wäre; das Gleichgewicht wird dann erreicht sein, wenn die Ladung des Conductors A so groß ist, dass sie auf ein elektrisches Molecül M des Verbindungsdrahtes eine Abstoßung ausübt, welche gleich jener der Maschine ist; dieses Molecül wird an seiner Stelle bleiben und weder gegen den Conductor fließen, noch zur Quelle zurückkehren können.

Entfernen wir nun den Verbindungsdraht und nähern der Kugel A einen isolierten Conductor, z. B. einen Cylinder BC. Dieser Cylinder wird durch Influenz in seinem Vordertheile negativ, rückwärts hingegen positiv elektrisch; gleichzeitig ändert sich die Vertheilung auf dem Conductor A und die positive Elektricität, welche der letztere besitzt, nähert sich dem Cylinder. Wenn man unter diesen Bedingungen die Verbindung dieses Conductors mit der Quelle herstellt, so ist es klar, dass das Gleichgewicht nicht mehr besteht. Die durch die Elektricitätsquelle auf das Molecül M ausgeübte Abstoßung hat sich nicht geändert, aber die Abstoßung von Seite des

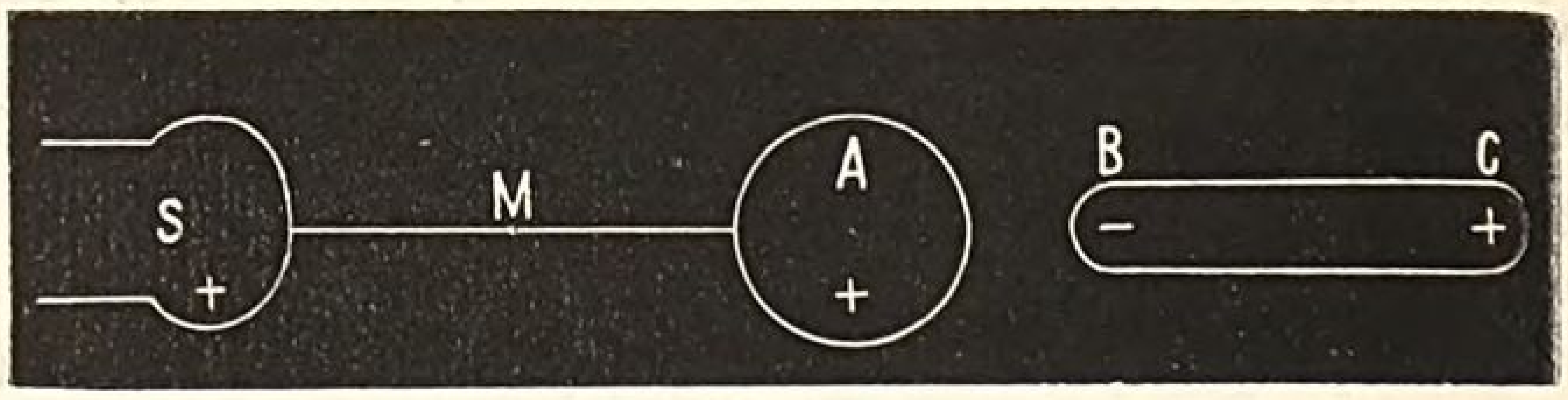


Fig. 73.

Conductors A ist kleiner geworden, weil die Elektricität sich entfernt hat und weil weiter das Molecül M eine Anziehung von Seite des Cylinders erfährt, da die negative Elektricität dieses Cylinders in einer kleineren Entfernung als die positive Elektricität wirkt. Dieses positive Molecül M bewegt sich daher zum Conductor A und vergrößert dessen Ladung. Bei solchem Stande der Dinge wird sich am Ende irgendeiner Zeit ein neuer Gleichgewichtszustand herstellen, sobald die von der Elektrisiermaschine auf ein in M befindliches positives Molecül ausgeübte Abstoßung gleich dem Überschusse der Abstoßung der positiven Elektricitäten des Conductors A und des Endes C des Cylinders über die Anziehung der negativen Elektricität, die sich in B befindet, sein wird.

Beseitigen wir neuerdings die Verbindung des Conductors A mit der Elektricitätsquelle und bringen den Cylinder B in

leitende Verbindung mit dem Erdboden: die positive Elektricität dieses Cylinders verschwindet dann, seine negative Elektricität vergrößert sich und ein neuer Wechsel in der Vertheilung der Elektricität auf A findet statt. Beseitigen wir die Verbindung des Cylinders mit der Erde und stellen wieder jene des Conductors A mit der Elektricitätsquelle her, so wird das Gleichgewicht vom neuen gestört und dieser Conductor wird eine neue Elektricitätsmenge erhalten.

Man kann denselben Vorgang mehreremale wiederholen und es vergrößert sich bei jeder Operation die Ladung des Conductors. Schließlich wird, wenn man den Cylinder mit dem Erdboden und den Conductor A mit der Elektricitätsquelle in einer bleibenden Weise verbindet, dieser letztere seine Maximalladung erhalten, wenn die Resultierende der auf ein Molecül M ausgeübten Kräfte wieder Null sein wird.

122. Man bringt diese aufeinanderfolgenden Effecte zur Anschauung, wenn man sich zweier metallischen Platten A und B (Fig. 74) bedient, die von Glasfüßen getragen werden und mit leitenden Pendeln *a* und *b* versehen sind. Die Scheibe B entfernt man und bringt A in leitende Verbindung mit einer Elektrisiermaschine; es erreicht dann das Pendel *a* bald eine Maximalausweichung. Man unterdrückt diese Verbindung und nähert die Scheibe B: das Pendel *a* fällt nieder, während das Pendel *b* sich aber etwas weniger erhebt.

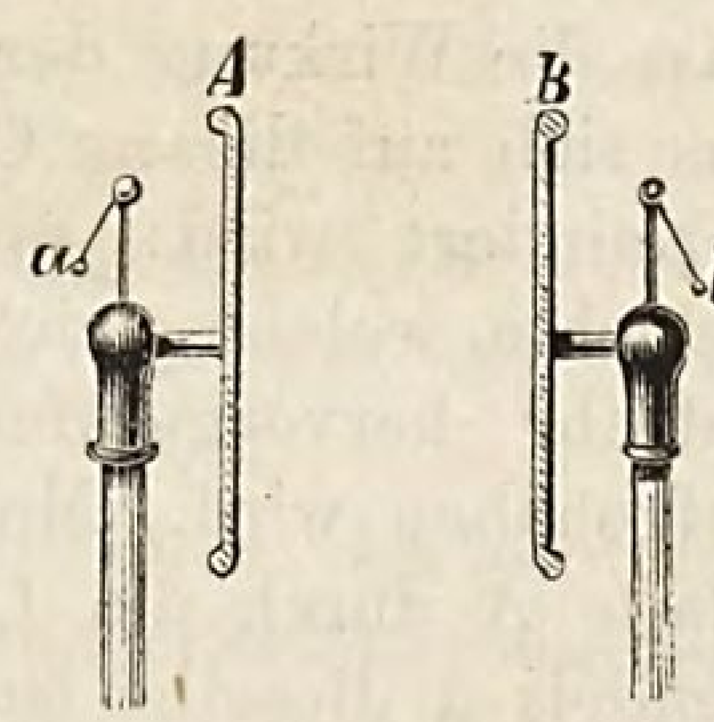


Fig. 74.

Stellt man die Verbindung der Scheibe A mit der Maschine wieder her, so bemerkt man, dass das Pendel *a* seine ursprüngliche Ausweichung wieder annimmt und die Divergenz des Pendels *b* noch größer wird. Man hebt die Verbindung mit der Maschine auf und berührt B, das Pendel *b* fällt zurück und das Pendel *a* senkt sich. Man kann den Finger entfernen und denselben Vorgang mehreremal wiederholen.

Wenn man schließlich die leitende Verbindung der Platte A mit der Quelle herstellt, ebenso jene der Platte B mit dem Erdboden, so bleibt das Pendel *b* vertical und das Pendel *a*

erhält allmählich seinen ersten Ausschlag: es ist dann das Gleichgewicht erreicht. Die Platte A hat unter dem Einflusse (Influenz) der Platte B eine viel größere Elektricitätsmenge empfangen, als wenn sie mit der Elektricitätsquelle in leitende Verbindung gesetzt worden wäre und von jedem fremden Conductor ferne gewesen wäre; man kann sagen, dass die Elektricität der Quelle auf dieser Platte condensiert wurde.

123. Verborgene (dissimulierte) Elektricitäten. Die beiden Platten A und B sind in dieser Weise auf ihren inneren Oberflächen mit zwei relativ sehr dicken Schichten entgegengesetzter Elektricitäten beladen, deren Wirkungen auf einen äußeren Punkt entgegengesetzt bezeichnet sind und nur eine sehr schwache Resultierende liefern. Man sagt zuweilen, die Elektricität der Platte B ist ganz durch jene der Platte A gebunden und dass ebenso ein Theil dieser Elektricität durch jene der Platte B gebunden sei. Man will damit ausdrücken, dass auf einen Punkt des Conductors B und des Körpers, welcher ihn mit dem Erdboden in Verbindung setzt, die Wirkung der Platte A gleich und entgegengesetzt jener der Platte B ist, woraus sich eine Resultante Null ergibt; und andererseits, dass die Wirkung der Platte A auf ein elektrisches Theilchen, das sich auf diesem Conductor befindet, um jene der Platte B vermindert wird: es ist dieselbe Wirkung, wie die einer Schichte, welche gleich jener ist, die ohne Influenz der Platte B auf ihr hervorgerufen wurde, während der Rest sozusagen aufgehoben wird. Man bemerkt in der That, dass, wenn die Platte A durch die Quelle geladen wird, die Divergenz des Pendels *a* dieselbe ist, ob jetzt diese Platte der Influenz von Seite der Platte B unterworfen ist oder nicht.

Wenn der Ausdruck verborgene oder gebundene Elektricität keinen anderen Zweck hat, als diese mehr oder weniger vollständige Ausgleichung der Wirkungen zu bezeichnen, so hat er doch weiter keinen Nutzen; man würde aber einen schweren Fehler begehen, wenn man mit diesem Ausdrucke einen speciellen Zustand der Elektricität bezeichnen wollte, der von einem der gewöhnlichen Gesetze abweichen würde. Die Wirkungen der beiden Elektricitätsschichten auf einen elektrisierten Punkt, der sich zwischen den beiden Platten befindet, erfolgen in demselben Sinne und summieren sich, ohne dass dann irgendeine Verbergung der Elektricität statt-

finden würde; legt man eine Probeplatte auf die innere Oberfläche der einen Platte, so wird diese Platte wie gewöhnlich eine Ladung aufnehmen, welche jener des berührten Punktes proportional ist.

Palmieri hat durch einen einfachen Versuch gezeigt, dass die sogenannte dissimulierte oder gebundene Elektricität auch nach außen Attractionen und Repulsionen ausübe. Als er den Goldblättern eines Bohnenberger'schen Elektroskopes von oben einen positiv elektrischen Körper näherte, schlugen sie mit positiver Elektricität aus, wurde aber der Körper den Goldblättern von unten genähert, so schlugen sie mit negativer Elektricität aus. (1)

124. Condensierende Kraft. Man sieht, dass im wesentlichen ein elektrischer Condensationsapparat aus zwei Leitern A und B besteht, von denen der eine A in Verbindung mit der Elektricitätsquelle gesetzt wird, während der andere B in leitender Verbindung mit der Erde sich befinden kann oder isoliert gehalten wird; diese beiden Leiter sind durch ein isolierendes Medium voneinander getrennt.

Man nennt den ganzen Apparat einen Condensationsapparat, dessen beide Leiter die Belegungen genannt werden; die Belegung A, welche mit der Elektricitätsquelle verbunden ist, ist die Collectorplatte und die andere B die Condensatorplatte.

Man nennt condensierende Kraft jenes Verhältnis, das zwischen der gesammten Ladung, welche die vollständig geladene Collectorplatte von der Elektricitätsquelle unter dem Einflusse der Condensatorplatte aufnahm, und jener Ladung besteht, die sie empfangen würde, wenn die condensierende Belegung des Condensationsapparates nicht vorhanden wäre. Dieses Verhältnis hängt von der Gestalt, den Dimensionen und der Entfernung der Belegungen ab und ist von der in Anwendung gebrachten Elektricitätsquelle unabhängig.

Man hat es nicht nöthig, irgendeine Rechnung zu machen, um zu begreifen, dass die condensierende Kraft sich mit der

(1) Man sehe über diesen Gegenstand, insbesondere die Literatur desselben: G. Wiedemann, die Lehre von der Elektricität. Braunschweig, 1882.

auf die condensierende Platte ausgeübten Influenz vergrößern wird; sie wird umso größer werden, je näher die Belegungen einander sind und die Gestalt der parallelen Oberflächen, z. B. von Platten, ist jene, welche die besten Dienste leisten muss.

125. Condensator mit einer festen isolierenden Platte. In den beiden vorhergehenden Beispielen war das zwischen den Belegungen befindliche isolierende Medium einfach eine Luftschichte; wenn aber die Elektricitätsquelle stark ist und wenn die Belegungen nicht sehr ferne voneinander sind, so werden die beiden Elektricitätsschichten, welche sich einander gegenüber befinden, bald einen Funken hervorrufen und es wird auf diese Weise eine freiwillige Entladung des Apparates

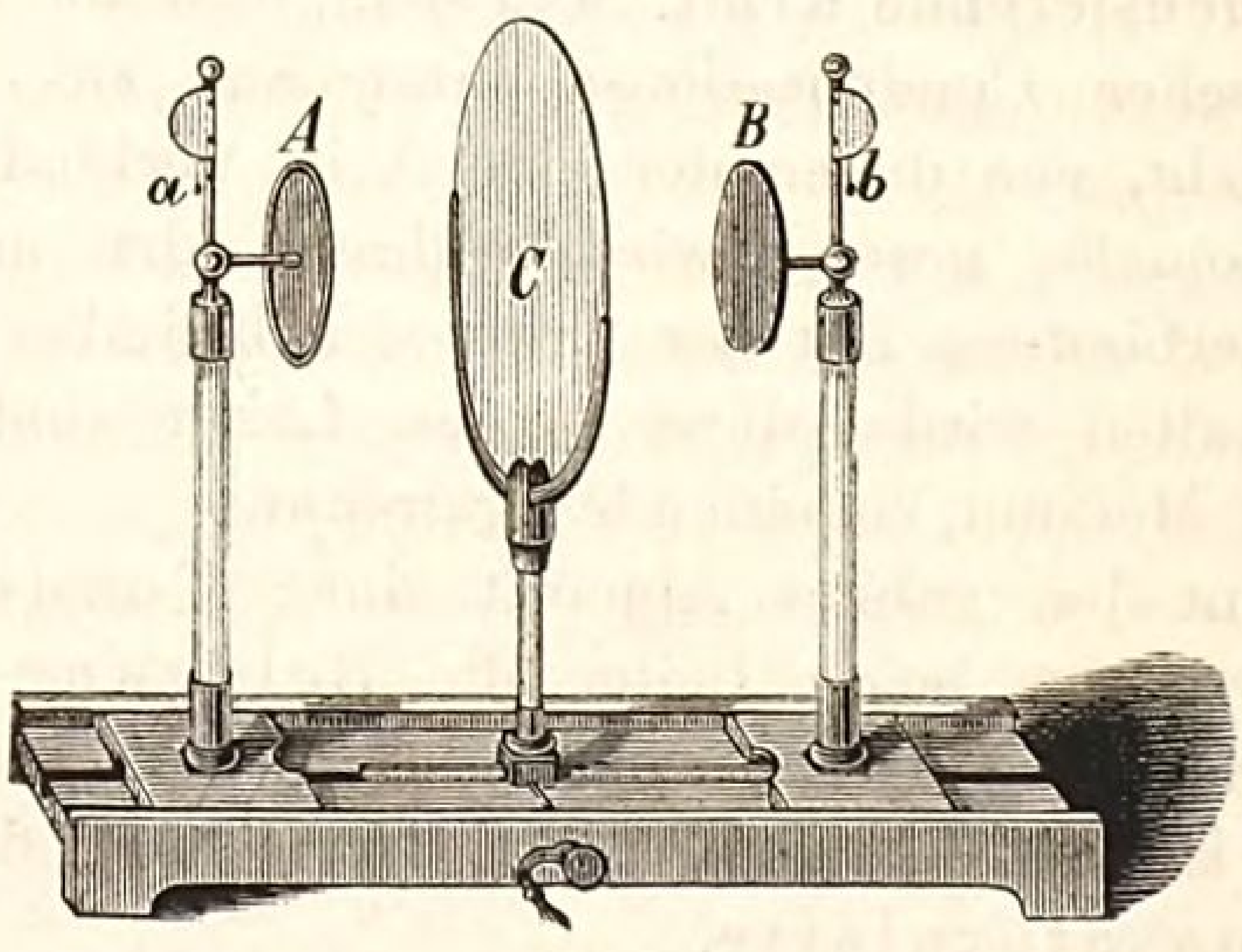


Fig. 75.

eintreten. Man vermeidet diese Schwierigkeit, wenn man die Luftschichte durch ein festes isolierendes Medium ersetzt, wie z. B. durch eine Glaslamelle, welche dem Durchgange des Funkens einen viel beträchtlicheren Widerstand leistet.

Der Plattencondensator, dessen man sich hauptsächlich bedient, um das Phänomen der Condensation zu zeigen und deren Gesetze zu studieren, besteht aus zwei Metallplatten A und B, deren Ränder abgerundet sind und die mit leitenden Pendeln *a* und *b* versehen sind; sie werden mittelst Glasfüßen isoliert. Die Füße der Platten stehen auf Schiebplatten, die mit Zähnen versehen sind; diese gestatten, die Platten des Condensationsapparates nach Belieben einander zu nähern oder voneinander zu entfernen. Zwischen den Platten oberhalb des Getriebes,

durch das die Schieber in Bewegung versetzt werden, ist eine Glasplatte C, die ebenfalls auf einem isolierenden Fuße aufgestellt ist. Um die früher angegebenen Versuche zu wiederholen, ist es besser, die Glasplatte wegzulassen; dies gestattet, die Platten in größere Nähe zu bringen und mit größeren Ladungen zu experimentieren.

Gleichwohl spielen die festen Platten, welche zwischen die Belegungen eines Condensators gestellt werden, eine Rolle, welche etwas complicierter ist, als die einer einfachen Isolierung; wir haben schon gesehen (106), dass diese Platten ein bedeutenderes specifisches Inductionsvermögen als Luft haben, d. h. sie verstärken die Erscheinungen der Influenz; in demselben Verhältnisse vermehren sie auch die condensierende Kraft.

126. Langsame Entladung eines Condensators. Wenn der Collector A eines Condensators mit einer Maschine geladen wird, während die Condensatorplatte B mit der Erde in leitender Verbindung sich befindet, divergiert das Pendel *a* des Collectors allein und das Pendel *b* der Condensatorplatte bleibt vertical. Hebt man diese Verbindungen auf, so fällt das Pendel nach und nach infolge der Elektricitätszerstreuung herab; ein Theil der Elektricität der Condensatorplatte B verlässt die innere Seite desselben und vertheilt sich auf der äußeren, wodurch das Pendel *b* zur Divergenz gebracht wird. Nach einer kurzen Zeit werden die Pendel dieselbe Divergenz haben (Fig. 76), die Elektricitätsverluste werden beiderseits dieselben sein und von diesem Augenblicke an werden die Pendel alle beide in einer regulären Weise fallen, bis der Apparat vollständig entladen ist; diese freiwillige Entladung ist im allgemeinen sehr langsam.

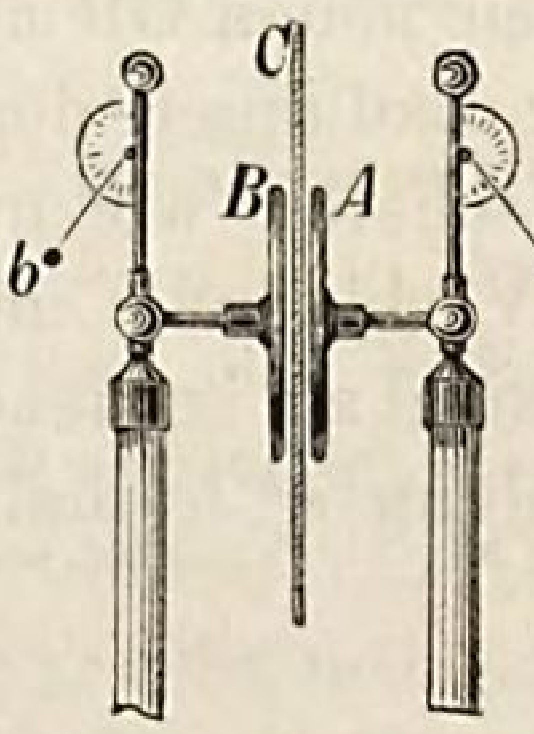


Fig. 76.

Wenn man, nachdem der Apparat geladen wurde und die Verbindungen aufgehoben sind, die Collectorplatte A mit der Hand berührt, erhält man einen kleinen Funken; sogleich wird das Pendel *a* vertical und das Pendel *b* hebt sich rasch in die Höhe. Das Spiel des Apparates ist dann umgekehrt, die Platte B spielt diesmal die Rolle des Collectors

und die Platte A ist jetzt Condensatorplatte. Man entfernt dann die Hand und berührt die Platte B; das Pendel *b* fällt und *a* erhebt sich. Wenn man dieselben Operationen wiederholt, wird man bei jeder Berührung eine gewisse Elektricitätsmenge von der einen oder anderen Platte entfernen und man wird eine sehr lange Zeit brauchen, um den Apparat in den neutralen Zustand zu bringen.

Das Gesetz der Abnahme der Elektricitätsmengen durch abwechselnde Entladungen ist überdies äußerst einfach. Setzen wir die Platten identisch voraus und bezeichnen mit a die Ladung des Collectors, nachdem man die leitende Verbindung desselben mit der Maschine aufgehoben hat; die mit der Erde verbundene Condensatorplatte nimmt eine entgegengesetzte Elektricitätsmenge $-b$ auf und diese Menge ist geringer, da sie aus der Influenzwirkung resultiert.

Man kann schreiben:

$$b = ma$$

wobei m ein Coefficient ist, der kleiner als die Einheit ist; der Wert desselben hängt von der Gestalt und der Entfernung der Platten ab.

Dieser Coefficient hängt nicht von den Elektricitätsmengen ab, denn wenn — sobald Gleichgewicht erreicht ist — man die elektrische Dichte in jedem Punkte verdoppelt, so wird man einen neuen Gleichgewichtszustand erhalten und das Verhältnis der Ladungen der Platten wird nicht geändert.

Isolieren wir nun die Platte B und bringen die Platte A in Verbindung mit der Erde, so wird die Platte B, welche diesmal als influencierender Körper wirkt, auf der Platte A eine Ladung a' festhalten, die ebenfalls durch die Bedingung

$$a' = mb = m^2 a$$

gegeben ist und die Menge positiver Elektricität, welche unter der Form eines Funkens bei dieser Berührung verschwunden ist, ist

$$a - a' = a - mb = a - m^2 a = a\,(1 - m^2).$$

Wenn man vom neuen A isoliert und B berührt, so wird auf dieser letzteren Platte eine Elektricitätsmenge

$$ma' = m^2 b = m^3 a$$

zurückbleiben und man wird an Elektricität entfernen:

$$b(1 - m^2) = am(1 - m^2).$$

Die nachstehende Tabelle gibt die Ladungen an, welche successive auf den beiden Platten zurückbleiben und jene, welche man bei jeder Berührung wegnimmt.

Reihenfolge der Berührungen	Platte B		Platte A	
	Ladung	Verlust	Ladung	Verlust
0	a	"	$b = ma$	"
1	$mb = am^2$	$a(1 - m^2)$	"	"
2	"	"	bm^2	$b(1 - m^2)$
3	am^4	$am^2(1 - m^2)$	"	"
4	"	"	bm^4	$bm^2(1 - m^2)$
5	am^6	$am^4(1 - m^2)$	"	"

Man sieht, dass die successiven Elektricitätsmengen, welche auf den Platten zurückbleiben, und die Elektricitätsverluste der Platten abnehmende geometrische Progressionen bilden, deren Exponent m^2 ist und man muss nach dieser Rechnung eine unendlich große Zahl von Berührungen vornehmen, um die Belegungen in den neutralen Zustand zu bringen.

127. Plötzliche Entladung. Rückstände. Wenn man die beiden Belegungen eines Condensators, welche isoliert sind, mit einem elektrischen Entlader, der aus zwei Metallbögen besteht, welche in ein Charnier gefügt sind und von isolierenden Handhaben getragen werden, verbindet, so erhält man einen sehr starken Funken und der Apparat ist fast ganz entladen. Wenn der Condensator eine Luftlamelle besitzt, so lässt diese plötzliche Entladung nur mehr den Überschuss $a - b$ der Elektricität der Collectorplatte über jene der Condensatorplatte zurück, ein Überschuss, der sich in regulärer Weise auf den beiden Platten zusammen vertheilt; wenn aber die isolierende Schichte aus einer Lamelle aus Glas oder Harz oder Schwefel u. s. f. besteht und wenn man nach einigen

Augenblicken vom neuen die Belegungen mit dem Auslader verbindet, so erhält man einen neuen schwächeren Funken als der erste war; man kann dann noch einen dritten, einen vierten Funken u. s. w. erhalten; die Stärke dieser Rückstands-Funken wird immer schwächer und schwächer.

Diese Erscheinung ist eine Folge des langsamen Eindringens der Elektricität in die isolierenden Körper (104). Wenn der Condensator geladen ist, so ist die elektrische Dichte auf der Innenseite jeder Belegung sehr groß, die Elektricitätsschichten der Belegungen gehen daher auf die isolierende Platte über und dringen in dieselbe bis zu einer gewissen Tiefe ein. Wenn man den Apparat entladet, so können die oberflächlichen elektrischen Schichten die isolierende Lamelle verlassen und auf die entsprechenden Belegungen übergehen; die tieferen Schichten rücken aber nicht rasch von der Stelle, sie gelangen nach und nach zu den Belegungen und können einen neuen Funken liefern.

Man zeigt überdies mittelst eines Glaslamellen-Condensators (Fig. 75), dass die elektrischen Schichten die Platten verlassen und sich an die Glaslamelle anlegen. Wenn dieser Apparat geladen ist und die Platten in Berührung mit der Glaslamelle sind, so hebt man die Verbindungen auf, dann entfernt man die Platten mittelst des Getriebes und berührt sie abwechselnd oder zugleich; man weist nach, dass sie schwach elektrisch sind; es genügt, sie wieder bis zur Berührung zu nähern und sie mit einem Auslader zu verbinden, um einen kräftigen Funken zu erhalten.

Man kann die Elektricität, welche sich auf der isolierenden Platte vorfindet, durch ein ganz anderes Mittel als durch die ursprünglichen Platten sammeln. Wenn man, nachdem der Condensator geladen ist und die beiden Platten entfernt wurden, auf die eine Seite der Glaslamelle die Hand anlegt, so vernimmt man ein schwaches Knistern und der Effect tritt deutlicher auf, wenn man gleichzeitig auf der entgegengesetzten Seite einen Finger der andern Hand hin- und herbewegt; es entstehen auf diese Weise partielle Entladungen in jedem der Punkte, welche successive mit dem Finger berührt wurden. Das Experiment bietet keinerlei Misslichkeiten, wenn man

unter diesen Bedingungen vorgeht; wenn man aber gleichzeitig die beiden Hände auf die beiden Seiten der Glaslamelle anlegen würde, so würden sie die Function vollständiger Belegungen übernehmen und man würde eine ebenso unangenehme Erschütterung erfahren, als ob man gleichzeitig die beiden Platten des geladenen Condensators berührt hätte.

128. Die Platten des Condensators sind bezüglich der isolierenden Lamelle so gelegen, wie die Scheibe eines Elektrophors auf einem Harzkuchen, und müssen zu ähnlichen Erscheinungen Anlass geben. In der That findet man, wenn man, nachdem aus einem Plattencondensator 4 oder 5 alternative Entladungen gezogen wurden, die Collectorplatte A, welche nun zur Berührung kommt, entfernt, diese geladen, nicht aber mit positiver Elektricität, wie es ganz anfangs der Fall wäre, sondern mit negativer Elektricität. Die positive Elektricitätsschichte, welche durch die Collectorplatte auf der isolierenden Lamelle abgesetzt wurde, wurde durch die ersten alternativen Entladungen geschwächt und kehrt nicht zur Belegung zurück, wenn die letztere sich in leitender Verbindung mit der Erde befindet, während die andere isoliert ist; es entsteht dann auf dieser Belegung Elektricität vom entgegengesetzten Zeichen infolge des Überschusses der Influenz von Seite der nächsten Schichte.

Diese Erscheinungen, welche den Luftcondensator begleiten, wurden zuerst von Crahay(1) angegeben und sorgfältig von Neyreneuf(2) studiert; man erklärt sie in sehr einfacher Weise durch die allgemeinen Eigenschaften der mittelmäßig leitenden Körper und sie spielen in den Anwendungen nur eine unbedeutende Rolle.

129. Entdeckung der Condensation. — Leydner Flasche. Die elektrische Condensation wurde vor der Entdeckung der Influenz beobachtet und daher zu einer Zeit, zu welcher die Erklärung der Erscheinung in keiner genügenden Weise gegeben werden konnte; die erste Beobachtung scheint auf von

(1) Journal l' Institut, T. VII., p. 409.

(2) Journal de Physique, T. I., p. 62.

Kleist, Dechant des Domcapitels zu Kamin in Pommern[1] zurückgeführt werden zu müssen.

Im Jahre 1745 steckte von Kleist in den Hals einer Flasche, welche Quecksilber enthielt, einen Eisenstab und brachte, diese Flasche in der Hand haltend, den Stab in Berührung mit dem Conductor einer Elektrisiermaschine. Er berührte zufällig diesen Conductor mit der anderen Hand und erhielt im Arme und im Ellbogen eine heftige Erschütterung.

Dasselbe Experiment wurde im folgenden Jahre unter fast denselben Umständen von Cunaeus und Musschenbroek (geb. 1692, † 1761) in Leyden gemacht. Diese Physiker, welche beobachteten, dass die elektrischen Körper schnell ihre elektrischen Eigenschaften verlieren und diesen Verlust der Anwesenheit leitender, in der Luft enthaltener Partikelchen zuschrieben, kamen auf die Idee einen Conductor zu elektrisieren, der ganz von einem isolierenden festen Körper umhüllt war, wobei sie erwarteten, dass die elektrische Ladung viel größer sein würde und sich längere Zeit erhalten könne; sie gossen zu diesem Zwecke Wasser in Glasflaschen und elektrisierten dasselbe mittelst einer Metallkette, welche vom Conductor einer Elektrisiermaschine herabhieng und in die Flüssigkeit tauchte. Der Versuch ergab ihnen keine diesbezüglichen genügenden Resultate; als aber der eine von ihnen die Flasche in der einen Hand hielt und sie genügend geladen war, wollte er die Kette mit der anderen Hand losmachen; er fühlte einen heftigen Schlag in den Armen und der Brust.

Musschenbroek wiederholte diesen Versuch mit einem sehr dünnen Glasgefäße; er fühlte Schläge in den Armen, den Achseln und der Brust, als ob er den Athem verlieren sollte und es brauchte mehrere Tage, bis er sich von seinem Schrecken erholte. In einem an Reaumur gerichteten Briefe, der berühmt geblieben ist, weil er die Anzeige dieser denkwürdigen Entdeckung enthielt,[2] sagt Musschenbroek, dass er durch diesen Schlag in einer schrecklichen Weise er-

(1) Versuche und Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig, T. II. p. 408.

(2) Mémoires de l' Académie (1746), p. 2.

schüttert wurde und glaubte, dass es um ihn geschehen wäre. Gleichwohl suchte man die Wirkungen, die man in der erörterten Weise beobachtete, zu verstärken und bald darauf wurde der Leydner-Versuch, wie ihn der Abt Nollet bezeichnete, eine Spielerei für alle Elektriker. Schon 1746 leitete Gralath in Danzig den elektrischen Schlag durch eine aus 20 Personen gebildete Reihe und den zwischen ihnen befindlichen Leitern. Gralath und Winkler in Leipzig waren in Deutschland die ersten, welche den Versuch von Musschenbroek wiederholten und weiter verfolgten. Beide wandten auch mehrere Gläser an und Gralath ist die Entdeckung des Ladungsrückstandes zu danken.

Man nahm bald wahr, dass der Schlag heftiger war, wenn man die Flasche mit der ganzen Handfläche anfasste, anstatt sie nur an einem Theile ihrer Oberfläche mit den Fingern zu halten; man ersetzte das Wasser durch irgendeine Flüssigkeit oder durch Bleischrot oder durch ein Stanniolblatt, welches in das Innere der Flasche geklebt wurde und das mit einem Metallstäbchen, welches durch den Flaschenhals gieng, in Verbindung war; endlich überkleidete man auch die Außenseite der Flasche mit einem Stanniolblatte, welches nur in der Nähe des Halses eine nackte Stelle übrig ließ. Diese von Doctor Bevis ersonnene Anordnung ist dieselbe, welche man noch heutigen Tages anwendet.

Man sieht nach dem Vorstehenden, dass die Leydnerflasche oder elektrische Flasche ein Condensator ist, dessen Belegungen die Flüssigkeit und die Hand des Experimentators sind, oder auch die beiden Stanniolblätter, während der isolierende Körper die Glasschichte ist. Franklin machte viele Versuche mit diesem Apparate und gab vom letzteren eine Erklärung mittelst der Theorie von einem einzigen elektrischen Fluidum. Er stellte sich vor, dass — wenn eine Leydnerflasche auf der Innenseite positiv elektrisch gemacht wurde, auf der Außenseite sich also negativ elektrisch erwies — die innere Belegung ebensoviel Elektricität gewonnen wie die andere abgegeben hat. Es ist nach seiner Ansicht in der geladenen Flasche nicht mehr elektrische Materie als vor der Ladung; da nun das Glas keine Elektricität durchlässt, so kann das Gleich-

gewicht nur durch Leiter wiederhergestellt werden, welche die innere und äußere Belegung miteinander verbinden.

Er construierte auch die nach ihm benannte Tafel, welche nichts anderes als ein Glaslamellen-Condensator ist; einige Jahre später construierten Aepinus und Wilke den Luftlamellen-Condensator. Die wahre Erklärung der Condensation scheint zum erstenmale von Volta im Jahre 1782 gegeben worden zu sein.

130. Die Leydnerflasche ist die bequemste Form des Condensators für die Versuche und auch jene, welche die stärksten Wirkungen gibt. Die eine der Belegungen, die äußere, ist immer aus einem Stanniolblatte gebildet, das auf der ganzen Oberfläche bis zum Beginne des Halses aufgeklebt ist. Wenn die Öffnung des Halses genügend groß ist, so dass man die Hand oder eine kleine gegliederte Bürste einführen kann, so klebt man auch auf die ganze innere Oberfläche Stanniolstreifen und man setzt sie in Verbindung mit einem Metallstäbchen, das durch den Stöpsel der Flasche geht, entweder mittelst einer Metallkette oder lieber mittelst umgebogener Messingstäbchen, welche sich federnd an die innere Oberfläche anlegen: man erhält so eine beständigere Communication. Man begnügt sich auch zuweilen die Flasche mit zerknitterten Stanniolblättern oder Blättern von Rauschgold anzufüllen, diese Anordnung ist aber nicht gut, wenn die Metallblätter nicht stark in der Flasche angehäuft sind.

Der Hals der Flasche wird mit Schellack oder einer Schichte Siegellack überfirnisst, um die Isolierung des Glases vollkommener zu machen und zu verhindern, dass die Funken nicht von selbst zwischen den beiden Belegungen längs der Oberfläche des Glases überspringen.

Die condensierende Kraft einer Flasche ist umso größer, je dünner das Glas ist; man kann aber diese Eigenschaft nicht zu weit treiben, weil die Flaschen bald infolge der elektrischen Entladung, welche von der einen Belegung zur anderen stattfindet, durchlöchert werden. Die Dicke des Glases muss daher genügend groß sein, damit die freiwillige Entladung, die dann eintritt, wenn die Flasche zu stark geladen ist, lieber von

dem oberen Stäbchen zur äußeren Belegung längs der Oberfläche des Glases stattfinde.

Es ist vom Belange, dass die Dicke des Glases fast gleichförmig sei und dass das Glas keine Blasen besitze; denn sonst entstehen an diesen Stellen, an welchen der Widerstand kleiner ist, Entladungen und die Flasche wird durchbohrt. Die materielle Beschaffenheit des Glases hat auch einen großen Einfluss; gewisse Glassorten sind ein wenig leitend, so dass die Elektricität in sie bis zu einer gewissen Tiefe dringt und bei der ersten Entladung kein sonderlicher Theil der Elektricität verschwindet; man erhält dann sehr zahlreiche Rückstands-

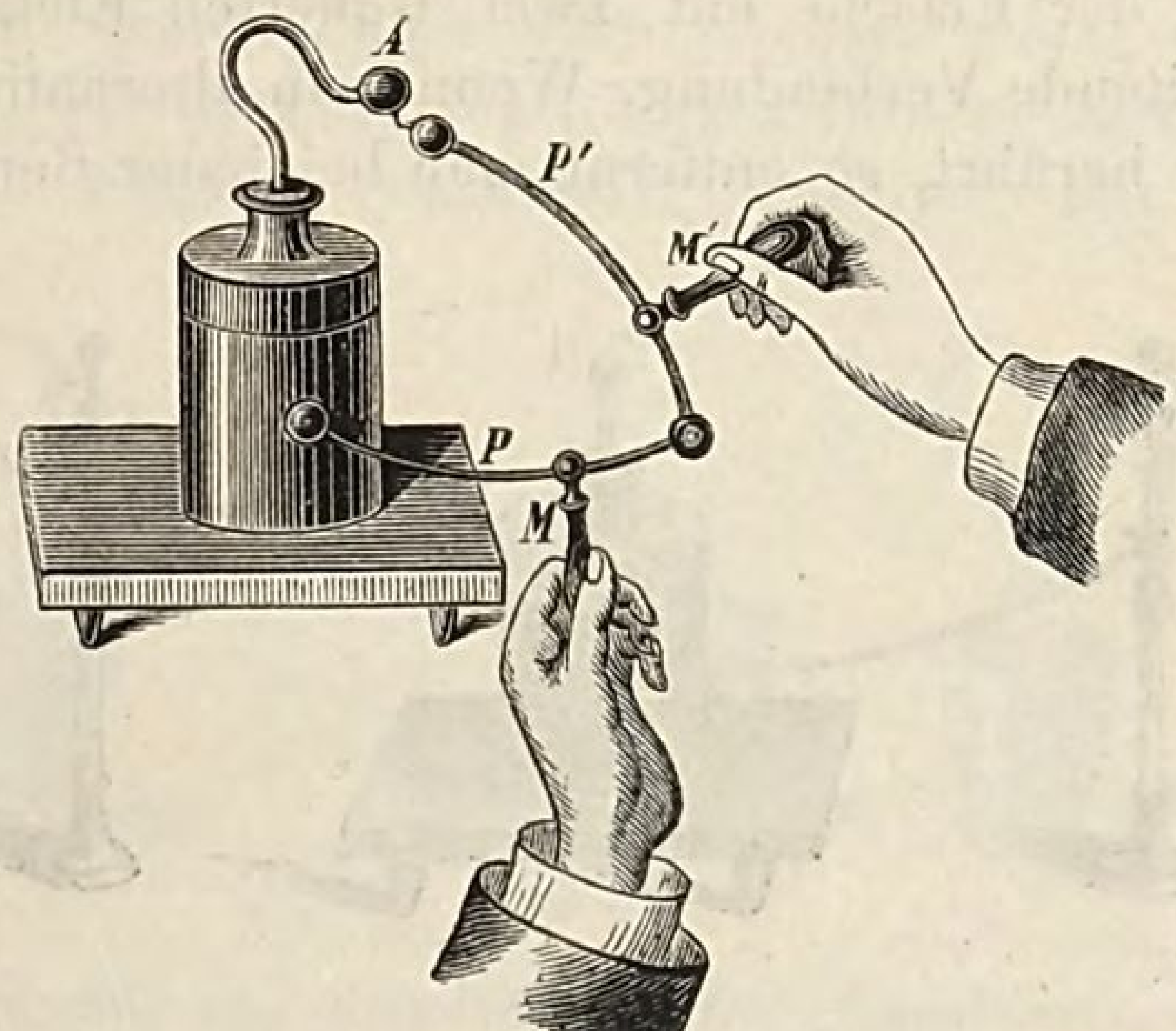


Fig. 77.

funken. Da die Wirkung eines Condensators nicht nach der Elektricitätsmenge, welche er ansammeln kann, sondern nach jener, welche bei seiner Entladung verbraucht wird, geschätzt werden muss, so sieht man, dass die Rückstandsfunken nur ein Hindernis bereiten. Man muss daher gleichartigere Gläser wählen und solche, welche nach der ersten Entladung sehr wenige Rückstandsentladungen liefern.

131. Mittelst der Leydnerflasche kann man in leichter Weise mehrere Haupteigenthümlichkeiten der Condensatoren bestätigen.

Man ladet eine Flasche und stellt sie auf eine isolierende Unterlage; dann berührt man die äußere Belegung mit dem

einen Arme eines Ausladers und nähert den anderen Arm der inneren Belegung (Fig. 77). Ist die Entfernung genügend klein, so entsteht ein starker Funke. Überlässt man dann die Flasche sich selbt und wiederholt nach einigen Augenblicken das Experiment, so erhält man einen neuen schwächeren Funken u. s. w.

Diese Rückstandsfunken sind oft in sehr großer Zahl vorhanden.

Um den Versuch der alternativen Entladungen eines Condensators zu wiederholen, stellt man eine geladene Flasche auf eine isolierende Unterlage (Fig. 78) und man setzt die beiden Belegungen der Flasche mit zwei isolierten Elektroskopen *a* und *b* in leitende Verbindung. Wenn man alternativ die beiden Belegungen berührt, so entfernt man bei jeder Berührung eine

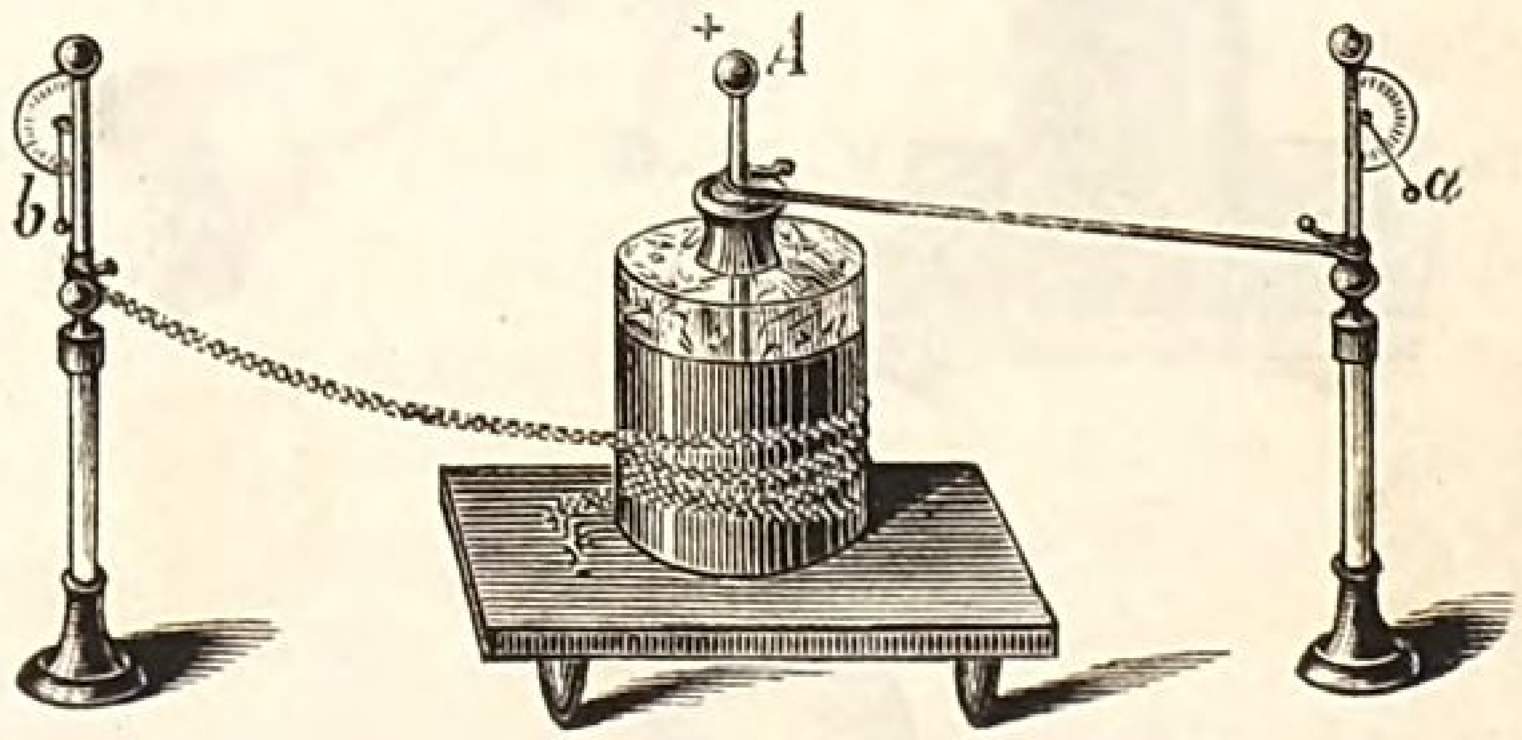


Fig. 78.

kleine Elektricitätsmenge, das mit der berührten Belegung verbundene Elektroskoppendel wird vertical, das andere divergiert und man kann eine sehr große Zahl von alternativen Entladungen erhalten, ohne dass die Sichtbarkeit der Wirkungen aufhört. Wenn man dann die beiden Belegungen mit einem Auslader verbindet, erhält man noch einen ganz lebhaften Funken.

Man kann auch mittelst der Lichtenberg'schen Figuren, wenn man auf einem isolierenden Kuchen mit den beiden Belegungen einer Flasche Schriftzüge entwirft, zeigen, dass diese Belegungen mit verschiedenen Elektricitäten geladen sind.

Franklin hat eine Flasche mit beweglichen Belegungen construiert, mittelst welcher man zeigt, dass die Elektricität

sich auf der isolierenden Zwischenscheibe aufhält. Diese Flasche besteht aus einem conischen Glasgefäße C (Fig. 79), welches man in ein Metallgefäß B stellt, und in welches man ein anderes Metallgefäß A bringt, das mit einem Stäbchen versehen ist, welches in einen Haken ausgeht. Man ladet diese Flasche in der gewöhnlichen Weise, dann stellt man sie auf einen Isolierschemel. Man hebt die innere Belegung A heraus, dann das Glasgefäß und erhält, wenn man die beiden Belegungen berührt, nur Spuren von Elektricität. Es genügt, die Flasche zusammenzusetzen und die Belegungen mit einem Auslader in Verbindung zu bringen, um einen starken Funken zu erzeugen. Man könnte auch ebenso, wie beim Plattencondensator, das Glas mit den beiden Händen entladen, nachdem man die Flasche auseinander genommen hat.

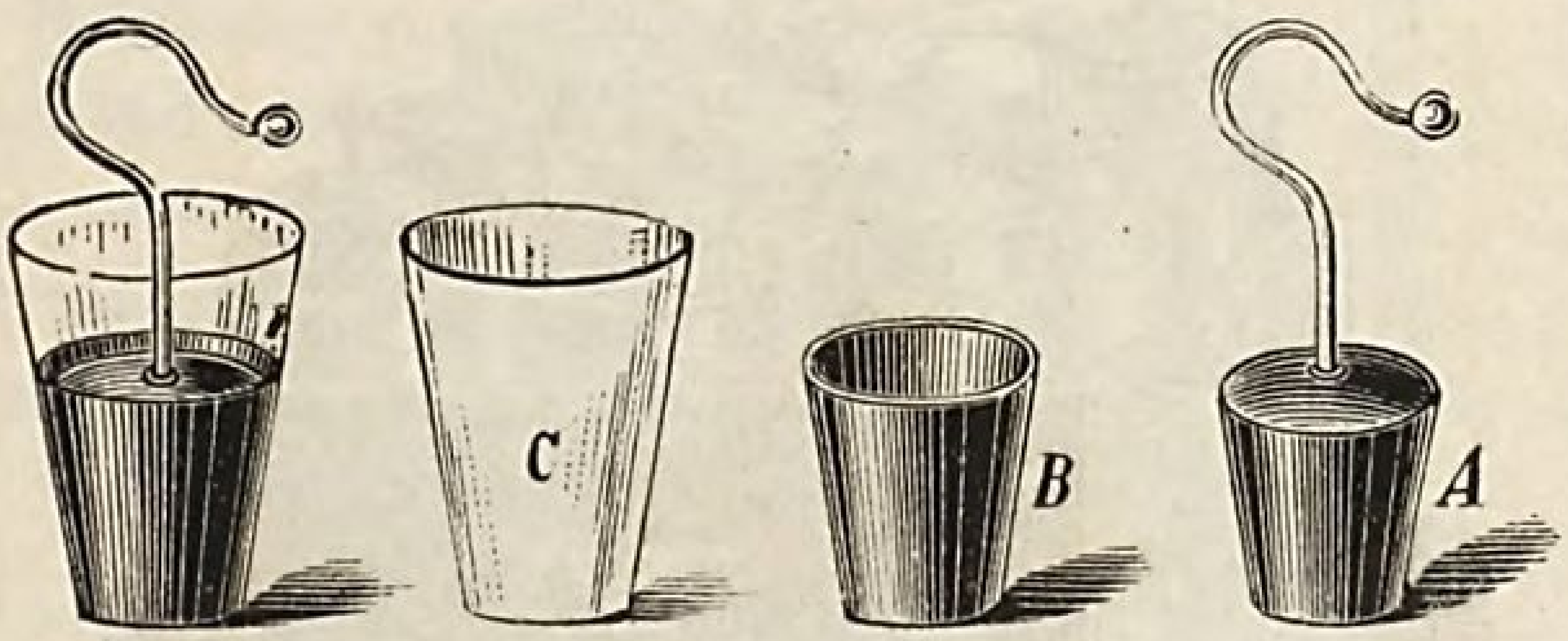


Fig. 79.

Was überhaupt die Leydnerflasche charakterisiert, das ist der Umstand, dass die eine Belegung dieser Form von Condensatoren beinahe vollständig von der anderen umgeben ist. Wenn daher die innere Belegung mit einer Elektricitätsquelle verbunden ist, so folgt aus dem Theorem von Faraday (90), dass die äußere Belegung, welche mit dem Erdboden in Verbindung steht, sich mit einer gleichen aber entgegengesetzten Elektricitätsmenge ladet.

Franklin zeigte diese Eigenschaft, zu welcher er durch die Theorie von einem einzigen Fluidum geleitet wurde, in der Weise, dass er auf einen isolierenden Körper eine geladene Flasche stellte und die beiden Belegungen mittelst eines leitenden Bogens in permanenter Weise verband; man findet dann auf diesen Belegungen keine Spur von Elektricität mehr.

132. Elektrische Batterien. Die Elektricitätsmenge, mit welcher sich eine Leydnerflasche ladet, ist bei derselben Glasdicke proportional der Oberfläche der Belegungen; es ist aber schwer sich Glasgefäße von großen Dimensionen zu verschaffen, deren Dicke genügend gleichförmig ist, und auch dann sind diese Gefäße unbequem zu handhaben. Wenn man mächtige Funken erhalten will, vereinigt man mehrere elektrische Flaschen, welche die Form cylindrischer Becher haben, in einer Holzkiste, deren Inneres mit einem Stanniolblatte belegt ist und man verbindet alle inneren Belegungen mittelst Metallstäben, wie man aus der Figur 80 ersieht. Alle äußeren Belegungen sind durch die Umkleidung des Kästchens mit

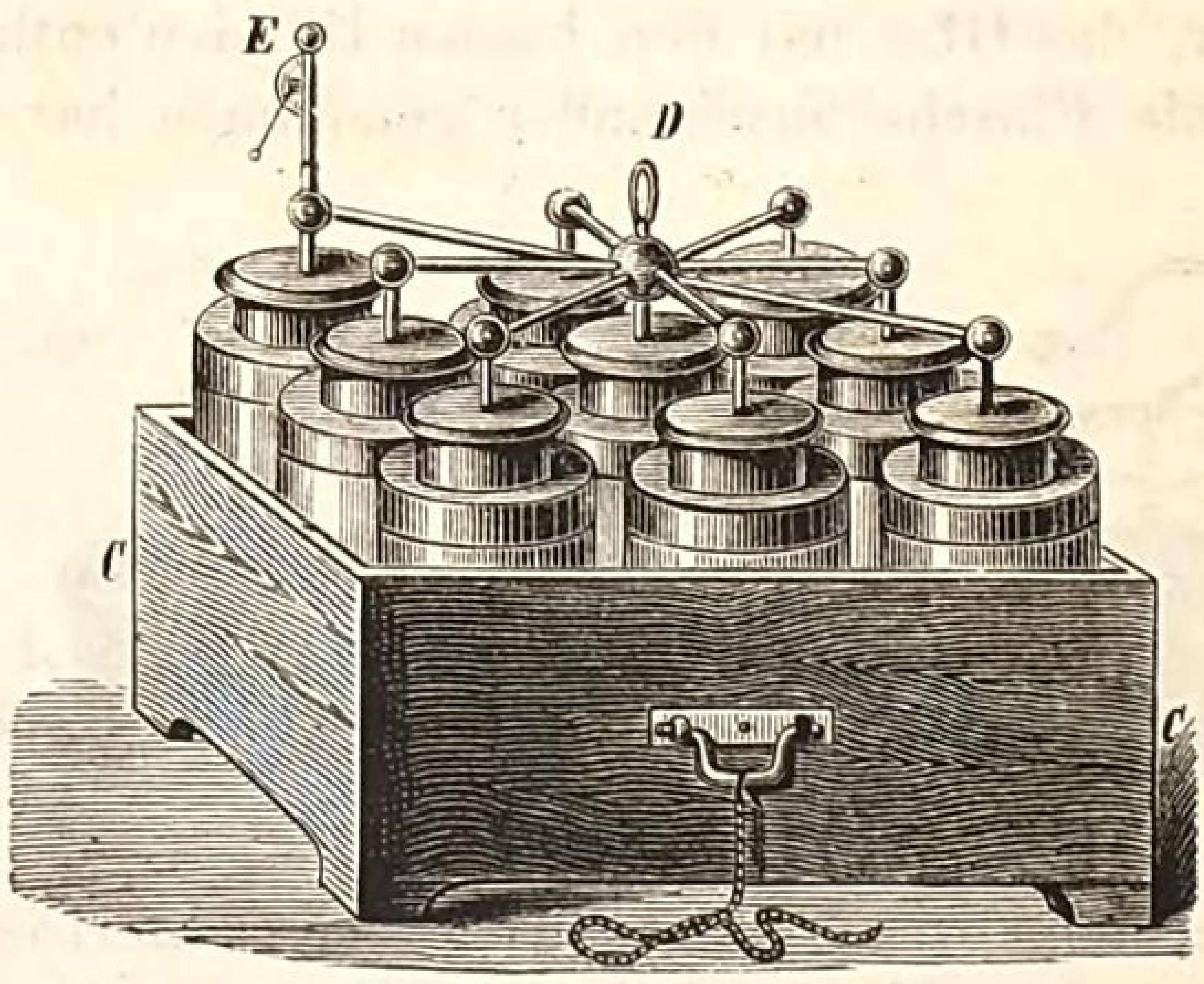


Fig. 80.

einem Handgriffe A in Verbindung, welchen man durch eine Kette mit dem Erdboden in leitende Verbindung bringen kann. Dieses System von Flaschen, welches man eine Batterie nennt, verhält sich wie eine einzige Flasche, deren ganze Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen der Flaschen ist, welche die Batterie zusammensetzen. Man sieht, dass für ein und dasselbe Volumen die Oberfläche der Batterie beträchtlich größer ist als die Oberfläche einer einzigen Flasche; ferner ist der Apparat viel leichter zu construieren und zu ersetzen. Man bringt oft mit den elektrischen Batterien ein Zifferblatt-Elektrometer in Verbindung, welches das Fortschreiten der Anhäufung der Elektricität nahezu angibt und

gestattet zu große Ladungen, bei welchen man Gefahr laufen würde, dass die Becher durchbohrt werden, zu vermeiden.

133. Franklin hat auch eine andere Form der Batterie construiert, welche man eine Cascadenvertheilung der Condensatoren genannt hat. Nehmen wir an, man hätte Flaschen, die an ihren Unterseiten mit Häkchen versehen sind, so dass man die einen mit den anderen verbinden kann, wie es die Figur 81 anzeigt, dass ferner die innere Belegung der ersten Flasche mit der Elektrisiermaschine in Verbindung stehe, während die äußere Belegung dieser Flasche mit der inneren Belegung der folgenden verbunden ist und ebenso für alle anderen bis zur letzten, deren äußere Belegung mit dem Erdboden leitend verbunden ist. Erhält die erste Flasche von der Elektricitätsquelle eine Elektricitätsmenge $+a$, so nimmt die äußere Belegung eine negative Ladung $-ma$ an, welche sich von ihr äußerst wenig unterscheidet; die innere Belegung der folgenden Flasche erhält eine Ladung gleich $+ma$; setzt man dieselbe Betrachtung fort, so sieht man, dass die letzte Flasche, die n^{te}, auf der inneren Belegung eine Ladung gleich am^{n-1} und auf der äußeren Belegung $-am^n$ hat.

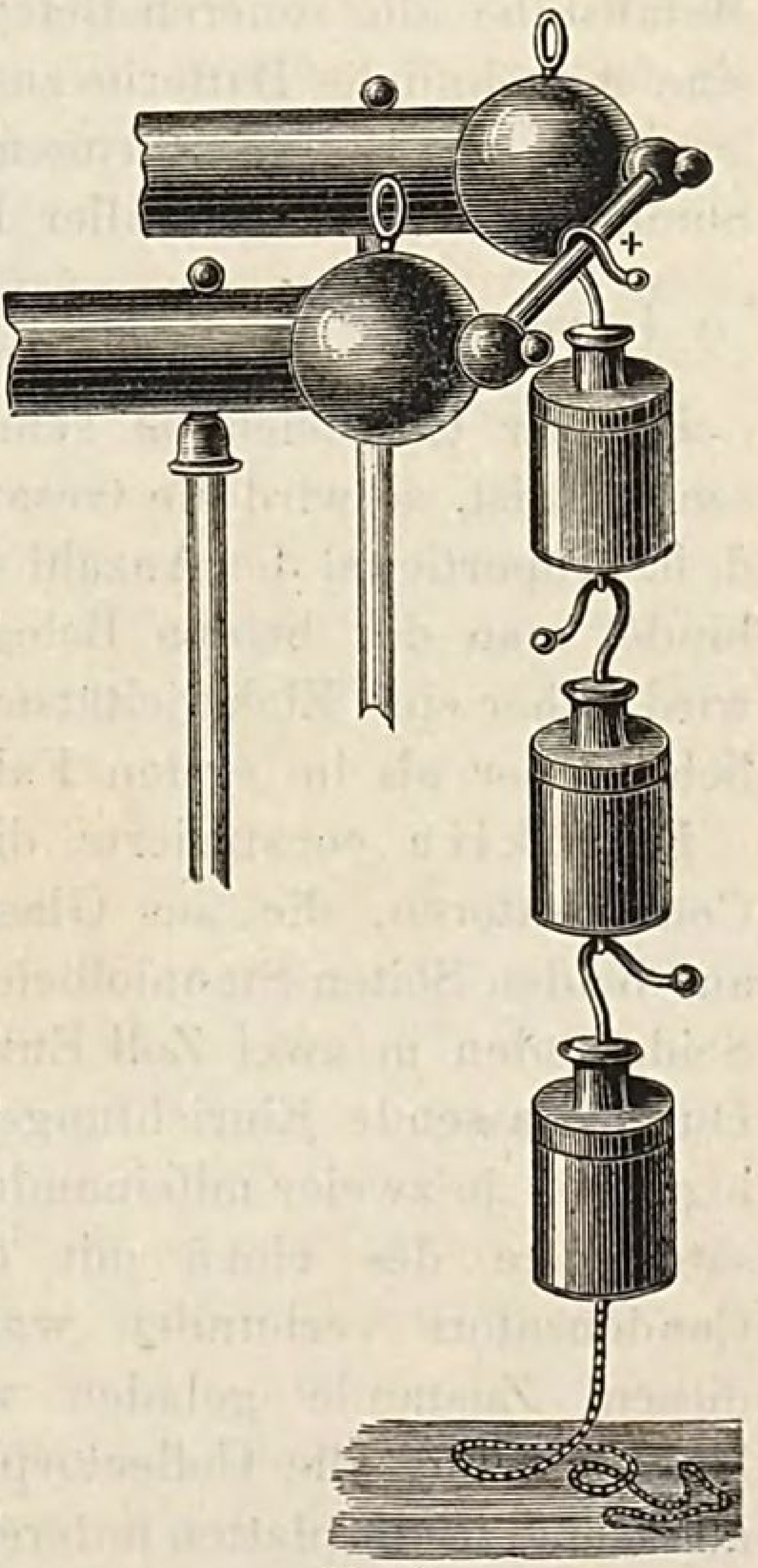


Fig. 81.

Man kann diese Batterie in zweifacher Weise entladen.

Wenn man die äußersten Belegungen mit einem Auslader verbindet, so erhält man einen Funken, welcher der Ladung a der ersten Flasche entspricht, und alle zwischenliegenden Conductoren kommen in den neutralen Zustand. Es scheint, dass in diesem Falle der Vortheil, den die Cascadenbatterie

gewährt, Null sei, da die Elektricitätsmenge, welche verschwindet, ebenso groß ist, als wenn die erste Flasche allein entladen worden wäre.

Wenn man andererseits die Batterie auseinander nimmt, indem man die Flaschen eine nach der andern mittelst gläserner Handhaben entfernt, so bleibt, nachdem man die erste von der Maschine losgemacht hat, jede Flasche geladen. Man stellt sie dann in ein und dasselbe Kästchen und verbindet durch Metallstäbe alle inneren Belegungen. Man hat auf diese Weise eine gewöhnliche Batterie zusammengestellt, deren innere Belegung eine Elektricitätsmenge haben wird, die gleich der Summe der Ladungen aller Flaschen ist, d. h.

$$a + am + am^2 + \ldots + am^{n-1} = a\,(1 + m + \ldots + m^{n-1})$$

Da der Coefficient m sehr wenig von der Einheit m verschieden ist, so wird die Gesammtladung nahezu gleich an sein, d. h. proportional der Anzahl der Flaschen in der Batterie. Verbindet man die beiden Belegungen durch einen Auslader, so wird daher eine Elektricitätsmenge verschwinden, die beträchtlich größer als im ersten Falle ist.

Franklin construierte diese Batterie (¹) mittelst Platten-Condensatoren, die aus Glasscheiben gebildet waren, welche auf beiden Seiten Stanniolbelegungen enthielten; sie waren an Seidenfäden in zwei Zoll Entfernung voneinander aufgehängt. Durch passende Einrichtungen konnte man die nächsten Belegungen je zweier miteinander verbinden, so dass die Condensatorplatte des einen mit der Collectorplatte des anderen Condensators verbunden war; wenn der Apparat dann in diesem Zustande geladen war, wurden die Verbindungen beseitigt und alle Collectorplatten untereinander, ebenso wie alle Condensatorplatten untereinander verbunden; sodann wurde die Batterie in der gewöhnlichen Weise entladen.

In neuerer Zeit haben Holtz (²) und Planté (³) derartige Cascadenbatterien construiert. Ersterer verwendet zwölf Condensatoren, die aus Zinkplatten von 900 □cm. Oberfläche,

(¹) Troisième lettre sur l'électricité (1748).

(²) Pogg. Ann. Bd. 155, 1875.

(³) Compt. rend. Bd. 85, 1877.

welche durch Guttaperchapapier getrennt waren, bestanden; Planté hat als Condensatoren belegte Glimmerplättchen verwendet; zur Ladung dieser Condensatoren verwendet er seine Polarisationsbatterie.

Franklin gesteht indess, aus dieser Cascaden-Anordnung der Condensatoren keinen großen Nutzen gezogen zu haben und er schreibt das Misslingen der mangelhaften Weise zu, in welcher die Verbindungen hergestellt werden konnten. In Wirklichkeit ist der Vortheil, welchen Franklin erhoffte, ganz und gar illusorisch und es ist unrecht, dass man oft dieses Mittel als ein solches bezeichnet, durch welches man die Ladung einer Batterie beschleunigen kann. Wir werden bald die Theorie der elektrischen Wirkungen in den Cascadenbatterien kennen lernen und ebenso die Anwendungen, welche sich daraus für gewisse Versuche ergeben können, betrachten.

VI. Capitel.

Theorie der elektrischen Erscheinungen. Elektrostatisches Potential. Allgemeine Theoreme.

134. Definition des Potentials. Eigenschaften der ersten Derivierten desselben.

Wir haben bis jetzt dort, wo es sich um die Theorie der elektrischen Erscheinungen handelte, nur elementare Betrachtungen in Anwendung gebracht, directe Überlegungen, welche zumeist Coulomb entlehnt sind, angestellt; auf einem solchen Wege begegnen wir jedoch bald Hindernissen, so z. B. kann man die Wirkungen, welche zwei elektrisierte Körper aufeinander ausüben, nur in ganz speciellen Fällen nach dem früher Vorgeführten berechnen und es gibt nahezu kein Phänomen der Condensation, von dem man sich auf diesem Wege in einer ganz genügenden Weise Rechnung verschaffen kann. Es ist hiernach einleuchtend, dass man auf allgemeinere Rechnungsmethoden zurückgreifen muss.

Die gegenseitige Wirkung zweier unendlich kleiner elektrischen Massen m und m' äußert sich in einer Kraft, deren Richtung mit der geraden Verbindungslinie der beiden Massen zusammenfällt; sie ist abstoßend oder anziehend, je nachdem diese Massen gleich oder entgegengesetzt bezeichnet sind und sie ändert sich im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung r der aufeinander wirkenden Massen; man kann deshalb die Kraft durch die Gleichung

$$-\frac{m.m'}{r^2}$$

ausdrücken, wobei man die Kraft positiv oder negativ betrachtet, je nachdem sie in einer Anziehung oder Abstoßung besteht, und als Elektricitätseinheit eine elektrische Masse wählt, welche auf eine gleiche in der Entfernungseinheit gelegene Masse eine der Einheit gleiche Kraft hervorruft.

Man nennt diese Einheit elektrostatische Einheit der Elektricität.

Betrachten wir eine Quantität positiver Elektricität, welche gleich der Einheit ist und in einem Punkte P gelegen ist; sei diese Quantität der Wirkung mehrerer unendlich kleiner Massen m, m', m''..., die in irgendeiner Weise vertheilt sind, unterworfen. Nennen wir x, y, z die Coordinaten des Punktes P bezogen auf drei rechtwinklige Axen; ξ, η, ζ seien jene des Punktes m; ξ', η', ζ' jene des Punktes m' u. s. f.; r, r', r''... seien die Entfernungen des Punktes P von den verschiedenen Massen m, m', m''...

Die parallel zu den Coordinatenaxen gerichteten Componenten der Kraft, welche die Masse m auf den Punkt P ausübt, sind:

$$-\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\xi-x}{r},\quad -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\eta-y}{r},\quad -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\zeta-z}{r}.$$

Die Componenten X, Y, Z der Resultierenden F der von allen betrachteten elektrischen Massen auf die im Punkte P befindliche Masseneinheit ausgeübten Kräfte sind dann:

$$X=-\sum\frac{m(\xi-x)}{r^3},$$

$$Y=-\sum\frac{m(\eta-y)}{r^3},$$

$$Z=-\sum\frac{m(\zeta-z)}{r^3}.$$

135. Diese drei Summen erstrecken sich auf alle wirkenden Massen und man kann sie ersetzen durch eine einzige Summe. Denn man hat:

$$r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2.$$

Die Distanz r ist eine Function der Coordinaten x, y, z des Punktes P, die Componenten X, Y, Z sind Functionen der drei unabhängigen Variablen x, y, z. Wenn man die vorstehende Gleichung nach der Variablen x differentiiert, erhält man:

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = -(\xi - x), \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\xi - x}{r},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\xi - x}{r^3}$$

und deshalb:

$$\mathrm{X} = -\sum m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Betrachten wir das Integral

$$\mathrm{V} = \sum \frac{m}{r}$$

ausgedehnt auf alle wirkenden Massen; diese Summe ist auch eine Function der Coordinaten x, y, z des Punktes P, und man hat:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = \sum m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\mathrm{X}.$$

Daraus schließt man:

$$\mathrm{X} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \quad \mathrm{Y} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, \quad \mathrm{Z} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z};$$

hieraus folgt das

Theorem: Die Componenten der Wirkung, welche die elektrisierten Körper zusammen auf eine positiv elektrische Masse *1*, die im Punkte P sich befindet, ausüben, sind die mit entgegengesetztem Zeichen genommenen partiellen Derivierten einer gewissen Function V der Coordinaten des Punktes P.

Die bemerkenswerten Eigenschaften der Function V, die beim Studium der Kräfte, welche entsprechend dem Newton'schen Gesetze sich ändern, vom Belange sind, wurden zuerst von

Laplace in seiner Mécanique céleste hervorgehoben und von Poisson in seinen Abhandlungen über Elektricität benützt. Später zeigte Georges Green[1] die Vortheile, welche man beim Studium der Elektricität und des Magnetismus aus dieser Function ziehen kann, und belegte sie mit dem Namen der Potentialfunction. Die Arbeit von Green ist lange Zeit hindurch unbekannt geblieben und mehrere der Haupttheoreme, welche dieser Forscher aufgestellt hat, sind von verschiedenen Mathematikern mittelst anderer Methoden wiedergefunden worden. Endlich hat Gauss[2] dieselbe Function bei seinen Rechnungen über die Attraction in Betrachtung gezogen und er nannte sie das Potential. Clausius hat die Bezeichnung von Green beibehalten und hat den Namen „Potential" einer anderen Function beigelegt, welche sich aus der ersten ergibt.

Mehrere Gelehrte haben diese Sprachweise angenommen; indess nennen die meisten Elektriker, vorzüglich in England, die Function V das Potential und diese Bezeichnungsweise, welche sich heute durch den allgemeinen Gebrauch ein Recht erworben hat, werden wir beibehalten.

136. Niveauflächen. Man nennt Niveaufläche den geometrischen Ort jener Punkte, in welchen das Potential einen und denselben Wert besitzt. Durch den Punkt P geht eine Niveaufläche und eine allein, und es ist leicht einzusehen, dass die Kraft, welche in diesem Punkte herrscht, normal zur Niveaufläche ist. Denn man weiß, dass die Normale zu dieser Fläche im Punkte P mit den Coordinatenaxen Winkel macht, deren Cosinusse den partiellen Derivierten

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$$

(1) An essay of the application of mathematical analysis to the theories of Electricity and Magnetism. Nottingham, 1828. — Math. papers of the late G. Green. Neue Ausgabe. London, 1871.

(2) Gauss, theoria attractionis corporum sphaeroid. ellipt. Crelle's Journal 1811.

Gauss, allgemeine Lehrsätze über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte. Resultate des magnetischen Vereines vom Jahre 1839; auch Gauss Werke, Bd. V. pg. 195. Göttingen.

und deshalb auch den Kraftcomponenten X, Y, Z proportional sind. Man schließt daraus, dass die Kraft nach der Normale zur Niveaufläche gerichtet ist.

Sei dn der Theil der Normale, welcher zwischen den zwei unendlich benachbarten Niveauflächen V und $V + dV$ liegt, und nehmen wir an, dass die X-Axe mit der Normale zusammenfällt; dann hat man:

$$F = X = -\frac{dV}{dn}.$$

Es ist somit die in einem Punkte wirksame Kraft gleich der Derivierten des Potentials nach der im betrachteten Punkte zur Niveaufläche gelegten Normale, und diese Kraft ist gerichtet nach jener Seite, in welcher das Potential abnimmt.

In den vorhergehenden Betrachtungen haben wir vorausgesetzt, dass der Punkt P außerhalb der wirkenden Massen liegt; in diesem Falle wird die Distanz r nicht Null, der Quotient $\frac{1}{r}$ bleibt endlich, und das Integral V hat einen vollkommen bestimmten Wert; das Potential ist eine endliche und continuierliche Function von x, y, z und die Componenten X, Y, Z nehmen an derselben Eigenschaft theil. Wenn aber der Punkt P innerhalb der wirkenden Massen gelegen ist, wird die Function $\frac{1}{r}$ unendlich, und es bereitet die Bestimmung der Integrale große Schwierigkeiten.

Um zu erfahren, ob das auf die ersten Derivierten bezügliche Theorem noch gilt, wenn der Punkt P innerhalb der wirkenden Massen liegt, werden wir einige Eigenschaften sphärischer Schichten ins Auge fassen.

137. Potential einer homogenen Kugelschichte. Die Wirkung, welche eine elektrische Schichte, die gleichförmig auf einer Kugeloberfläche ausgebreitet ist, auf einen inneren Punkt ausübt, ist Null, wie wir bereits gesehen haben (50 und 51); das Potential dieser Schichte auf das Innere ist daher constant, da das Theorem (135) dann anwendbar ist; im ganzen inneren Raume hat das Potential denselben Wert wie im

Centrum der Kugel, wo es gleich $\frac{M}{R}$ ist, wenn R den Halbmesser der Kugel und M die gesammte elektrische Masse bezeichnet.

Ebenso ist das Potential einer homogenen Schichte, welche zwischen zwei concentrischen Kugeloberflächen mit den Radien R_1 und R_2 sich befindet, für alle inneren Punkte auch constant und der Wert desselben gleich jenem, welchen es im Centrum hat. Nennt man ρ die Dichte einer Schichte, welche zwischen zwei unendlich benachbarten Kugelflächen, deren Radien a und $a + da$ sind, liegt, so ist die Änderung des Potentiales im Mittelpunkte, welche dieser Schichte entspricht:

$$dV = \rho \frac{4\pi a^2 da}{a} = 4\pi\rho a da.$$

Man erhält dann für das Potential in allen jenen Punkten, welche in dem von der vorausgesetzten Schichte eingeschlossenen Raume liegen, folgenden Ausdruck:

$$V = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi\rho a da = 2\pi\rho(R_2^2 - R_1^2).$$

138. Andererseits ist die Wirkung, welche eine homogene Kugelschichte oder eine solche, welche aus concentrischen homogenen Theilen (28) gebildet wird, auf einen äußeren Punkt ausübt, dieselbe, als wenn die gesammte Masse im Kugelcentrum vereinigt wäre oder $\frac{M}{D^2}$, wenn D die Distanz des Punktes vom Centrum und M die gesammte Masse der betrachteten Schichte ist. Die Niveauflächen sind dann augenscheinlich Kugelflächen, welche zur ersten concentrisch liegen, und die in einem Punkte wirksame Kraft ist gleich und entgegengesetzt der nach D genommenen Derivierten des Potentials oder es ist:

$$\frac{dV}{dD} = -\frac{M}{D^2},$$

woraus $$V = \frac{M}{D} \text{ folgt.}$$

Die Integrationsconstante ist Null, da das Potential sicherlich Null wird, wenn D unendlich wird.

Das Potential einer Kugelschichte auf einen äußern Punkt ist also gleichfalls ebenso groß, als wenn die Gesammtmasse im Mittelpunkt vereinigt wäre.

139. Allgemeinheit des ersten Theoremes. Betrachten wir nun einen Punkt P, der im Innern einer homogenen Kugel vom Radius R und der Dichte ρ und zwar in einer Distanz r vom Centrum sich befindet. Das Potential in P, welches von jenen Kugelschalen herrührt, deren Radius größer als r ist, ist, da der Punkt P sich in dem von jenem Kugeltheile eingeschlossenen Raum befindet:

$$2\pi\rho\ (\mathrm{R}^2 - r^2);$$

das von dem inneren Kerne herrührende Potential in demselben Punkte P ist

$$\frac{\mathrm{M}}{r} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho r^2.$$

Das Gesammtpotential im Punkte P ist dann:

$$\mathrm{V} = 2\pi\rho\ (\mathrm{R}^2 - r^2) + \frac{4}{3}\pi\rho r^2 = 2\pi\rho\, \mathrm{R}^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2.$$

Nehmen wir den Mittelpunkt O der Kugel zum Ursprung des Coordinatensystemes; die partiellen Derivierten des Potentiales werden dann sein:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi\rho x,$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = -\frac{4}{3}\pi\rho y,$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi\rho z.$$

Andererseits ist die Wirkung, welche die außerhalb des Punktes P liegenden Schichten auf denselben ausüben, Null; die Wirkung des inneren Kernes ist dieselbe, als wenn die ganze Masse desselben im Mittelpunkte vereinigt wäre und ist gleich:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho r.$$

Diese Kraft besitzt die Richtung des Radius OP und ihre Componenten parallel zu den Axen sind

$$X = \frac{4}{3}\pi\rho x,$$

$$Y = \frac{4}{3}\pi\rho y,$$

$$Z = \frac{4}{3}\pi\rho z.$$

Man sieht, dass dieselben den partiellen Derivierten des Potentiales gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind.

140. Betrachten wir nun schließlich den Fall, dass der Punkt P in irgendeiner wirkenden Masse gelegen sei. Wir theilen diese Masse in zwei Theile: der eine sei umschlossen von einer sehr kleinen Kugelfläche S, innerhalb welcher der Punkt P liegt, und der andere Theil liege außerhalb dieser Kugelfläche.

Das Potential in P setzt sich zusammen aus dem Potentiale V_2 der äußeren Masse und dem Potentiale V_1 der Kugel, die von S umschlossen wird, es ist also:

$$V = V_1 + V_2,$$

und die Kraftcomponenten sind ebenso gleich der Summe jener, welche einzeln herrühren von den beiden Theilen, somit

$$X = X_1 + X_2.$$

Da der Punkt P außerhalb der zweiten Masse liegt, so sind die Componenten X_2, Y_2, Z_2 den Derivierten des Potentiales V_2 gleich, aber vom entgegengesetzten Zeichen. Wenn die Dichte der kleinen von S eingeschlossenen Kugel constant ist, ist dies, wie wir gesehen haben, auch für die Kräfte X_1, Y_1, Z_1 und das Potential V_1 der Fall. Es sind somit die Componenten X, Y, Z der im Punkte P wirksamen Kraft noch gleich und entgegengesetzt den Derivierten des Potentiales in diesem Punkte.

Wir haben an dieser Stelle, um die Darstellung zu vereinfachen, angenommen, dass die Dichte innerhalb der kleinen, den Punkt P umschließenden Kugel constant ist; man kann übrigens auch zeigen, dass das Theorem noch richtig ist, wenn diese elektrische Dichte in der Nachbarschaft des Punktes P nicht constant ist; wir wollen dies im Folgenden nachweisen.

141. Nehmen wir nun an, die elektrische Dichte in der Nähe des Punktes P sei veränderlich. Wir beschreiben um P (Fig. 82) als Mittelpunkt eine Kugelfläche S, die den unendlich kleinen Radius ρ besitze.

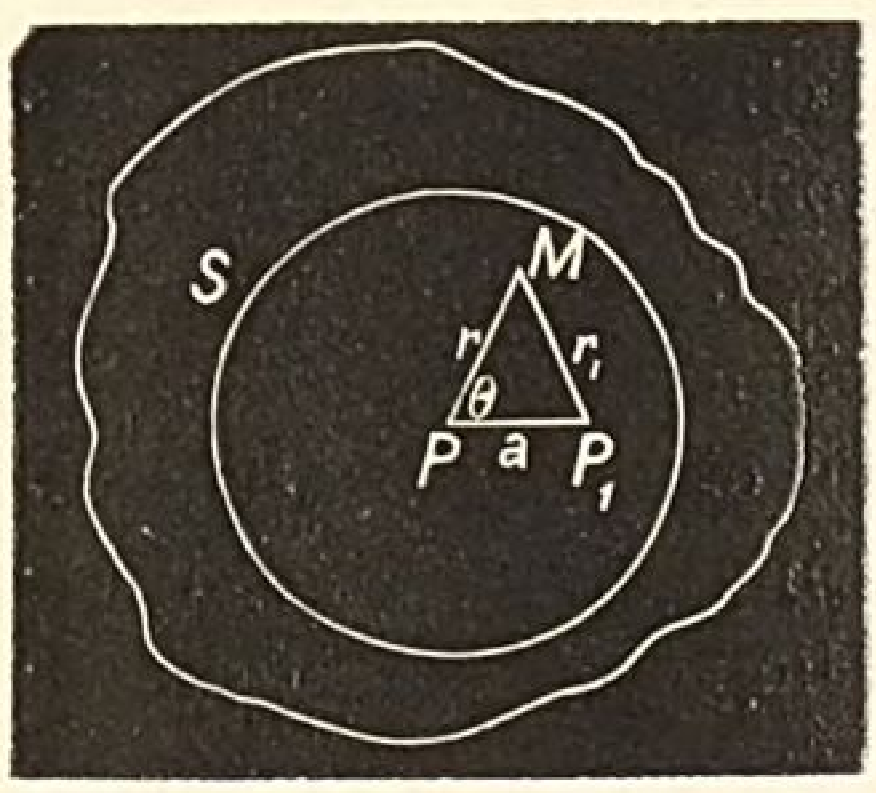


Fig. 82.

Wir nennen wieder das Potential des außer der Kugel liegenden Theiles im Punkte P V_2, das Potential der Kugel in diesem Punkte V_1. Nahe dem Punkte P im Innern der Kugel nehmen wir einen Punkt P′ an, die Länge der Strecke PP′ bezeichnen wir a. Nach dem Vorgange von Bouquet[1] werden wir dann zeigen, dass $\frac{V-V'}{a}$, wenn a gegen Null convergiert, eine Grenze hat, welche gleich ist der Kraftcomponente in der Richtung PP′, die mit X bezeichnet werden soll. V ist das Potential der ganzen Masse im Punkte P, ebenso V′ das Potential derselben Masse im Punkte P′. Ferner haben V_1' und V_2' für den Punkt P′ dieselbe Bedeutung, wie V_1 und V_2 für den Punkt P. Es ist klar, dass $\frac{V_2-V_2'}{a}$ sehr wenig von X_2, wenn X_2 die von der außerhalb der Kugel liegenden Masse herrührende Wirkung in der Richtung PP′ bedeutet, differieren wird; da aber X_2 sich sehr wenig von X unterscheidet, so hat man

$$V_2 - V_2' = a\,(X + \varepsilon),$$

wobei ε verschwindet, wenn a und ρ gegen Null conver-

(1) Man sehe auch: Briot, Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie; deutsch von H. Weber; Leipzig 1871.

gieren. Wir gehen nun an die Bestimmung von V_1 und V_1'. Wir nehmen einen Punkt M an, dessen Abstände von P und P′ r und r' seien; der Winkel MPP′ werde θ bezeichnet, ferner schließe die Ebene MPP′ mit einer festen, durch PP′ gehenden Ebene den Winkel φ ein.

Ein Element der Ebene PMP′ ist $rdrd\theta$; differenzieren wir die Formel:

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$$

unter der Voraussetzung, dass r constant ist, so ist:

$$r'dr' = ar\sin\theta.\, d\theta = a.\, y.\, d\theta\,,$$

wenn man y den Abstand des in M liegenden Flächenelementes von PP′ nennt. Das betrachtete Flächenelement ist daher auch ausdrückbar durch:

$$\frac{rr'drdr'}{ay} = df.$$

Dreht sich das Flächenelement um die Axe PP′ und zwar um einen Winkel $d\varphi$, so ist das erzeugte Volumen dargestellt durch:

$$dv = y.df.\, d\varphi = \frac{rr'\,dr\,dr'\,d\varphi}{a}.$$

Man hat demnach, wenn σ die variable Dichte bedeutet:

$$V_1 = \frac{1}{a}\int\!\!\int\!\!\int \sigma r'\,dr\,dr'\,d\varphi \text{ und}$$

$$V_1' = \frac{1}{a}\int\!\!\int\!\!\int \sigma r\,dr\,dr'\,d\varphi.$$

Setzt man:

$$H = \int_0^{2\pi} \sigma d\varphi,$$

so ist H eine Function von r und r'; die obigen Ausdrücke werden:

$$V_1 = \frac{1}{a}\int\!\!\int H\,r'\,dr\,dr',$$

$$V_1' = \frac{1}{a}\int\!\!\int H\,r\,dr\,dr'.$$

Nun ist:

$$V_1 - V_1' = \int\int H \frac{r'-r}{a} dr\, dr'.$$

Die Function H behält immer dasselbe Zeichen, das Verhältnis $\frac{r'-r}{a}$ liegt ferner zwischen -1 und $+1$, und deshalb kann man auch schreiben:

$$V_1 - V_1' = \lambda \int\int H\, dr\, dr',$$

wenn λ eine Größe ist, die zwischen -1 und $+1$ liegt. Wir bezeichnen ferner noch den Mittelwert von H mit H' und können dann setzen:

$$V_1 - V_1' = \lambda H' \int\int dr\, dr'.$$

Das vorstehende Doppelintegral können wir in zwei Integrale zerlegen und zuerst nach r' integrieren. Man hat dann:

$$\int\int dr\, dr' = \int_0^a dr \int_{a-r}^{a+r} dr' + \int_a^\rho dr \int_{r-a}^{r+a} dr' = (2\rho - a)\, a$$

Es ist daher:

$$V_1 - V_1' = \lambda H' a\, (2\rho - a),$$

und deshalb:

$$V - V' = (V_1 + V_2) - (V_1' + V_2') = a\,(X + \varepsilon) + \lambda H' a\, (2\rho - a)$$

somit

$$\frac{V - V'}{a} = X + \varepsilon + \lambda H' (2\rho - a).$$

Nähern sich a und ρ der Null, so wird

$$lim \frac{V - V'}{a} = X,$$

wie in dem früher betrachteten Falle bei Voraussetzung constanter Dichte.

142. Bemerkungen über die Stetigkeit des Potentiales und der ersten Derivierten desselben.

Das Potential einer homogenen Kugel vom Radius R und der

Dichte ρ in einem innerhalb der Kugel gelegenen Punkte P, dessen Entfernung vom Kugelmittelpunkte r ist, war gegeben durch die Formel:

$$V_i = 2\pi\rho\, R^2 - \frac{2}{3}\,\pi\rho r^2.$$

Das Potential für einen außerhalb der Kugel gelegenen Punkt ist, wenn R, r, ρ die vorige Bedeutung haben:

$$V_e = \frac{4\pi\rho R^3}{3r}.$$

Bezeichnet man mit $\overline{V_i}$ und $\overline{V_e}$ die Potentiale für einen an der Oberfläche gelegenen Punkt, so hat man nach der ersten Formel:

$$\overline{V_i} = \frac{4}{3}\pi\rho R^2,$$

und nach der zweiten:

$$\overline{V_e} = \frac{4}{3}\pi\rho R^2.$$

Es ist daher ersichtlich, dass *das Potential beim Übergange von dem Innern der Kugel in den Außenraum continuierlich verläuft.*

Dasselbe lässt sich in analoger Weise mittelst der vorangegangenen Formeln für die partiellen Derivierten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ nachweisen. Auch diese verlaufen stetig, wenn man von einem innerhalb der Kugel gelegenen Punkte zu einem außerhalb derselben befindlichen übergeht. Dabei ist wohl zu bemerken, dass diese Schlüsse nur dann Giltigkeit haben, wenn die Elektricität oder ein anderes Agens einen *Raum* erfüllt; für sogenannte *Flächenladungen* werden wir später einen anderen Satz kennen lernen.

Wir wollen im Nachstehenden zeigen, dass *allgemein* das Potential und die ersten Derivierten desselben sowohl im Innern und an der Oberfläche eines mit wirksamen Agens erfüllten *Raumes* als auch außerhalb desselben sich überall nach der Stetigkeit ändern.

Wenn der Punkt außerhalb der wirksamen Masse liegt, so haben das Potential und sämmtliche Derivierte desselben be-

stimmte endliche Werte; daraus kann man den Schluss ziehen, dass im äußeren Raume diese Größen stetige Functionen von x, y, z sind. Dass das Potential auch im Innern des von der Masse erfüllten Raumes stetig bleibt, folgt aus dem Vorhergehenden, weil die ersten Derivierten des Potentiales auch in diesem Falle immer bestimmte endliche Werte haben.

Die Stetigkeit der Größen $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ wollen wir dadurch nachweisen(¹), dass wir eine jede dieser Größen in zwei Theile zerlegen, von denen der eine offenbar stetig ist, während der andere so klein gemacht werden kann, als wir nur immer wollen; wenn dies möglich ist, dann ist die Continuität der in Frage stehenden Größen nachgewiesen. Wir beschreiben (Fig. 83) um den Punkt P, der entweder im Innern der Masse oder an der Oberfläche des Körpers liegen mag, eine Kugelfläche mit dem Radius ε; auf diese Weise wird die ganze Masse in zwei Theile getheilt, in den von der Kugelfläche oder, wenn der Punkt P auf der Oberfläche der Masse liegt, von einem Theile der Kugeloberfläche und einem Stücke der Massenoberfläche begrenzten Theil und den übrigen. Nennen wir das Potential des ersten Theiles V_1, das des zweiten V_2, das Gesammtpotential V, so hat man:

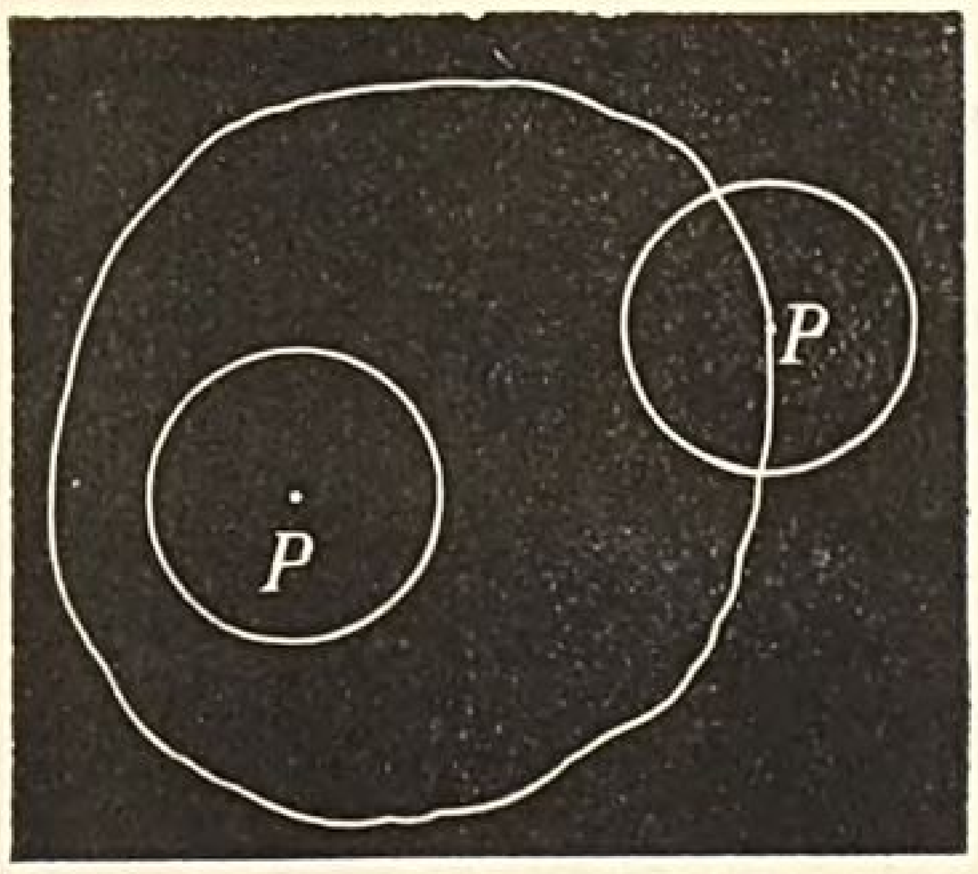


Fig. 83.

$$V = V_1 + V_2$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x}.$$

$\frac{\partial V_2}{\partial x}$ ist stetig, weil der Punkt P für jene Masse, deren Potential V_2 ist, ein äußerer ist; $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ ist nach dem früheren

(¹) Man sehe: P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte; herausgegeben von Dr. F. Grube, Leipzig, 1876.

die X-Componente der Kraft, welche die Kugel auf den betrachteten Punkt ausübt. Es ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int dm. \frac{\xi - x}{r^3},$$

wenn dm das Massenelement bedeutet, das in dem Punkte ξ, η, ζ liegt. Da man bekanntlich ein Volumenelement durch die Formel

$$dv = r^2 dr\, dw$$

ausdrücken kann, wo dw den sogenannten räumlichen Winkel bedeutet, so erhält man:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int \rho\, dw\, dr \frac{\xi - x}{r},$$

unter ρ die Dichte in dem betrachteten Elemente verstanden. Bedeutet K den größten Wert des Productes $\rho \frac{\xi - x}{r}$ innerhalb des Integrationsgebietes, das sich über die gezeichnete Kugel erstreckt, so hat man

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} < K \int dw \int dr.$$

Da nun $\int dr = \varepsilon$ und $\int dw$ entweder 4π oder 2π ist, je nachdem der Punkt P im Innern oder auf der Oberfläche der wirkenden Massen liegt, so hat man jedenfalls

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} < 4\pi K \varepsilon.$$

Weil man die Größe $4\pi K\varepsilon$ bei abnehmendem ε beliebig klein machen kann, so gilt dies umsomehr von $\frac{\partial V_1}{\partial x}$. Es ist somit bewiesen, dass die ersten Derivierten des Potentiales überall stetig sind, obgleich — wie wir bald sehen werden — die zweiten Derivierten sich nicht mehr überall stetig ändern.

143. Eigenschaften der zweiten Derivierten des Potentiales. Die zweiten Derivierten des Potentiales besitzen ebenfalls bemerkenswerte Eigenschaften.

Betrachten wir zuerst den Fall, wo der Punkt P außerhalb der wirkenden Massen gelegen ist; die Function $\frac{1}{r}$ wird nicht unendlich, man kann die Differentiation unter dem Summenzeichen in gewöhnlicher Weise vornehmen. Durch eine erste Operation hat man gefunden:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - X = \sum m \frac{\xi - x}{r^3}.$$

Eine zweite Differentiation nach x liefert:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\sum m \left(\frac{1}{r^3} + \frac{\xi - x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x}\right) = -\sum \frac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\frac{\xi - x}{r}\right)^2\right];$$

man hat in derselben Weise

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\sum \frac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\frac{\eta - y}{r}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\sum \frac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)^2\right].$$

Addiert man die drei vorstehenden Gleichungen Glied für Glied, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Wenn daher der Punkt P außerhalb der wirksamen Massen liegt, ist die Summe der drei partiellen zweiten Derivierten des Potentiales Null.

Da diese Summe der drei Derivierten eine große Rolle in der Theorie spielt, hat man sie abkürzend durch das Symbol ΔV bezeichnet, so dass man vorstehende Gleichung in der folgenden Weise schreiben wird:

$$\Delta V = 0.$$

144. Dieses wichtige Theorem wurde zuerst von Laplace(¹)

(¹) In der Abhandlung: Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes (1782).

ausgesprochen; Poisson[1] hat aber nachgewiesen, dass die Betrachtungsweise nicht mehr gilt, wenn der Punkt P im Innern der wirkenden Massen gelegen ist, weil die unter dem Summenzeichen befindliche Function dann unendlich wird. Die zweiten Derivierten ändern sich mit dem Cubus der Distanzen r und die dem Punkte P benachbarten Elemente nehmen einen überwiegenden Einfluss. Man muss dann zu anderen Methoden seine Zuflucht nehmen.

Nehmen wir zunächst an, dass die wirkende Masse in der Nachbarschaft des Punktes P eine constante Dichte ρ besitze und theilen wir noch diese Masse in zwei Theile: in eine kleine Kugel S, welche den Punkt P umfasst und in demselben ein Potential V_1 hervorruft, und in die außerhalb liegende Masse, welche in demselben Punkte das Potential V_2 erzeugt.

Das Potential im Punkte P ist:

$$V = V_1 + V_2.$$

Da der Punkt P außerhalb der elektrischen Massen sich befindet, die nicht der Kugel S angehören, so ist nach dem vorangegangenen Theoreme:

$$\Delta V_2 = 0,$$

woraus

$$\Delta V = \Delta V_1 \text{ folgt.}$$

Der Wert von ΔV hängt also nur von der Masse ab, welche sich in der kleinen Kugel befindet.

Man hat andererseits, wenn man den Ursprung des Coordinatensystems im Centrum dieser Kugel annimmt, nach (139)

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi\rho x,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{4}{3}\pi\rho y,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi\rho z;$$

[1] Bulletin de la société philomatique. Tome 3, pg. 368; ferner in den Abhandlungen: Mémoire sur la theorie du magnétisme en mouvement und Mémoire sur l'attraction des sphéroides.

hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho,$$

und demzufolge:

$$\Delta V_1 = -4\pi\rho = \Delta V.$$

Durch subtilere Untersuchungen, welche im Folgenden angestellt werden, lässt sich zeigen, dass das Theorem noch giltig ist, wenn die elektrische Dichte in der Nähe des Punktes P nicht mehr constant ist und dass also allgemein die Beziehung:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

besteht, aus welcher das Theorem sich ergibt:

Die Summe der drei partiellen zweiten Derivierten des Potentiales ist gleich der elektrischen Dichte im betrachteten Punkte multipliciert mit -4π.

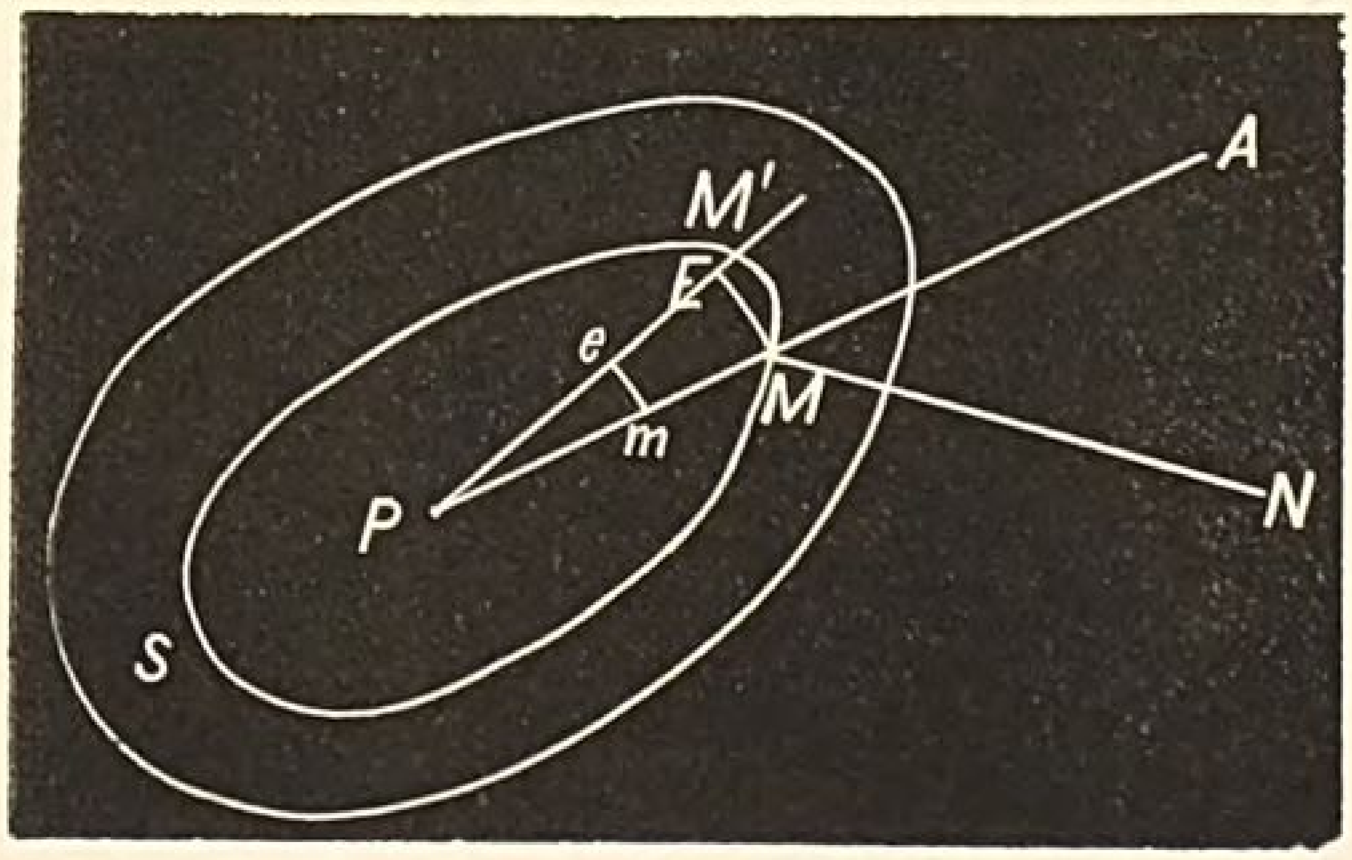


Fig. 84.

Dieses Theorem umfasst als Specialfall auch jenen, wo $\rho = 0$ ist, d. h. den Fall, wenn der betrachtete Punkt außerhalb der wirkenden Massen gelegen ist.

145. Dass auch für den Fall, als in der Nachbarschaft des Punktes P die Dichte ρ veränderlich ist, die von Poisson aufgestellte Gleichung:

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

giltig ist, ist unter anderem von Clausius(¹) und Sturm(²) gezeigt worden. Wir wollen der Darstellung des ersteren folgen.

(¹) Clausius, die Potentialfunction und das Potential; 3. Auflage (Leipzig 1877); man sehe auch diesbezüglich Charles Briot, Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie; deutsch von Dr. Heinrich Weber, p. 213.

(²) Cours de mecanique Nr. 126 und 127. — Man sehe auch: Delsaulx, Ann. de l. soc. d. Bruxelles, 1877.

Der Punkt P sei (Fig. 84) von einer kleinen, geschlossenen, convexen Fläche umgeben; V_1 sei das Potential der in diesem Raume befindlichen Masse im Punkte P, V_2 das Potential der außerhalb der erwähnten Fläche befindlichen Masse in demselben Punkte; wenn V das Gesammtpotential bedeutet, so hat man wegen $\Delta V_2 = o$

$$\Delta V = \Delta V_1.$$

Den Punkt P betrachten wir als die Spitze eines Kegels mit der unendlich kleinen Winkelöffnung $d\omega$; zeichnen wir um P als Mittelpunkt zwei Kugelflächen mit den Radien r und $r + dr$, so wird aus dem Kegel das Volumenelement $r^2 d\omega dr$ herausgeschnitten; die in demselben befindliche Masse ist, unter ρ die Dichte des Agens in diesem Volumelemente verstanden, $\rho r^2 d\omega dr$; die Wirkung, welche die betrachtete Masse im Punkte P ausübt, ist gegeben durch:

$$-\frac{\rho r^2 d\omega dr}{r^2} = -\rho d\omega dr.$$

Schließt die jene Kegelfläche erzeugende Gerade PM mit drei aufeinander senkrechten Axen die Winkel, deren Cosinus a, b, c sind, ein, so hat man

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -X_1 = \int a d\omega \int_0^\lambda \rho dr,$$

wenn λ die Länge eines Radiusvectors bezeichnet, der von dem Punkte P zu irgendeinem Punkte M der Oberfläche S gezogen ist. Bezeichnen wir

$$\int_0^\lambda \rho dr = H,$$

so ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int a H d\omega.$$

Nennt man $mM = r'$ so ist:

$$r = \lambda - r', \quad dr = -dr'$$

$$\text{und } H = -\int_\lambda^0 \rho dr' = \int_0^\lambda \rho dr'$$

Dieses Integral hängt von der Richtung und der Länge des Radiusvectors MP ab, ist also eine Function von a, b, c und λ, von denen jedoch nur drei unabhängige Variable vorkommen, da zwischen den drei Cosinus eine bekannte Beziehung besteht.

Nennen wir das von dem Kegel aus S ausgeschnittene Flächenelement $d\sigma$, das in diesen Kegel fallende Kugelflächenelement ME hingegen df; seien ferner α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die im Punkte M auf S errichtete Normale MN mit den Coordinatenaxen bildet, und i der Winkel AMN; dann ist

$$df = \lambda^2 d\omega = d\sigma . \cos i,$$

deshalb

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int \frac{a\,H \cos i}{\lambda^2} d\sigma.$$

Jetzt sind sowohl das Differenzial $d\sigma$ als auch die Integrationsgrenzen von der Lage des Punktes P innerhalb der Fläche S ganz unabhängig; der unter dem Integralzeichen befindliche Ausdruck behält auch einen endlichen Wert, weshalb man unter dem Integralzeichen differenzieren kann; man erhält so

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a\,H \cos i}{\lambda^2}\right) d\sigma.$$

Sind ξ, η, ζ die Coordinaten von M, so ist

$$\lambda^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

$$a = \frac{\xi - x}{\lambda}, \; b = \frac{\eta - y}{\lambda}, \; c = \frac{\zeta - z}{\lambda}$$

$$\cos i = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

$$\lambda \cos i = \alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z).$$

Schreibt man:

$$\frac{a\,H \cos i}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^3} . \lambda \cos i . H,$$

so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a\,H \cos i}{\lambda^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{\lambda^3}\right) H\,\lambda \cos i + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cos i\right)\frac{aH}{\lambda^3} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{a \cos i}{\lambda^2}$$

oder nach leichter Rechnung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a \mathrm{H} \cos i}{\lambda^2}\right)=\frac{4a^2-1}{\lambda^3}\mathrm{H}\cos i-\frac{a\alpha \mathrm{H}}{\lambda^3}+\frac{a\cos i}{\lambda^2}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}$$

und es wird

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial x^2}=\int\frac{\mathrm{H}}{\lambda^3}\left[(4a^2-1)\cos i-a\alpha\right]d\sigma+\int\frac{a\cos i}{\lambda^2}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}d\sigma.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für $\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial z^2}$, wenn man nur statt a und α ... b und β, respective c und γ setzt. Bei der Addition dieser drei Gleichungen wird:

$$\Delta \mathrm{V}_1=\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial z^2}=\int\frac{\cos i}{\lambda^2}\left(a\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}+b\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}+c\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right)d\sigma.$$

Da nun nach dem früher Auseinandergesetzten

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

ist, so hat man:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a}\frac{a^2-1}{\lambda}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b}\frac{ab}{\lambda}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial c}\frac{ac}{\lambda}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda}a$$

und analoge Ausdrücke für $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}$.

Man erhält nun:

$$a\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}+b\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}+c\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda}$$

und

$$\Delta \mathrm{V}_1=-\int\frac{\cos i}{\lambda^2}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda}d\sigma.$$

Da nun

$$\mathrm{H}=\int_0^\lambda \rho dr'$$

ist und in diesem Integrale die Function unter dem Integralzeichen von λ unabhängig ist und nur die obere Grenze von

demselben abhängt, so hat man, wenn man ρ_1 die Dichte des Agens, also in unserem Falle des elektrischen Fluidums im Punkte P versteht:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \rho_1,$$

somit

$$\Delta V_1 = -\rho_1 \int \frac{\cos i}{\lambda^2} d\sigma = -\rho_1 \int d\omega = -4\pi\rho_1$$

und demnach auch

$$\Delta V = -4\pi\rho_1.$$

Wenn daher die Dichte in der Nähe des betrachteten Punktes auch variabel ist, so ist dennoch — wie oben behauptet und jetzt bewiesen wurde — die Summe der drei partiellen zweiten Derivierten des Potentiales gleich der elektrischen Dichte in dem ins Auge gefassten Punkte multipliciert mit -4π.

146. Elektrisches Gleichgewicht in einem Systeme leitender Körper. Wir haben schon gesagt, dass, wenn ein leitender elektrisierter Körper oder ein solcher, welcher der Influenz elektrisierter Körper ausgesetzt ist, im Gleichgewichte sich befindet, in irgendeinem Punkte des Innern des Conductors die elektrische Kraft Null sein muss. Es würde in der That, wenn die Kraft nicht Null wäre und wenn sich in einem Punkte freie Elektricität vorfinden würde, diese Elektricität der elektrischen Kraft nachgeben und sich in einem gewissen Sinne bewegen, was dem vorausgesetzten Gleichgewichtszustande widersprechen würde. Andererseits würden, wenn keine freie Elektricität vorhanden sein würde, die beiden entgegengesetzten Elektricitätsmengen $+m$ und $-m$, aus welchen die unendlich kleine Masse des neutralen Fluidums besteht, in entgegengesetzten Richtungen bewegt werden und es würde sich eine neue Zerlegung des neutralen Fluidums ergeben, was ebenfalls der Voraussetzung zuwiderläuft. Wenn aber die elektrische Kraft Null ist, so sind die drei Componenten derselben ebenfalls Null, und, da sie einzeln den ersten Derivierten des Potentials gleich sind, folgt, dass diese Derivierten Null sind, somit das P o t e n t i a l c o n s t a n t ist. Ist daher ein Conductor im elektrischen G l e i c h g e w i c h t e, s o i s t d a s

Potential in der ganzen Ausdehnung des Körpers constant.

Ist das Potential constant, so sind die ersten Derivierten und deshalb auch die zweiten Derivierten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ in allen Punkten Null. Die Summe dieser zweiten Derivierten ist auch Null und man hat:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = -4\pi\rho = 0$$

und demzufolge $\rho = 0$.

Die Dichte der freien Elektricität im Innern von im Gleichgewichte sich befindenden Conductoren ist deshalb Null. Daraus folgt, dass die Elektricität derart vertheilt ist, dass sie auf der Oberfläche jedes Leiters eine unendlich dünne Schichte bildet.

Wir haben früher (48) angegeben, dass Coulomb schon direct diese Eigenschaft nachgewiesen hat, indem er von dem Gesetze des Quadrates der Distanz ausgieng.

Wenn man nun mit μ die elektrische Dichte der Oberflächenschichte bezeichnet, so wird die Menge der freien Elektricität, welche sich auf einem Oberflächenelemente $d\sigma$ befindet, $\mu d\sigma$ sein, und die gesammte Elektricitätsmenge, welche auf der ganzen Oberfläche eines Conductors sich vorfindet, wird ausgedrückt werden durch:

$$M = \int \mu d\sigma.$$

In jedem leitenden Körper hat das Potential einen constanten Wert und dieser ist derselbe, wie an der Oberfläche des Conductors; die Oberfläche des Körpers ist daher eine Niveaufläche.

147. Um leicht eine Darstellung der elektrischen Erscheinungen vornehmen zu können, ist es nützlich, sich mit dem Begriffe des Potentials vertraut zu machen und sich von demselben eine bestimmte Vorstellung zu verschaffen.

Wenn ein Conductor mit positiver Elektricität geladen ist, so ist das Potential in der ganzen Ausdehnung dieses Körpers constant; wenn man sich aber von der Oberfläche entfernt,

ändert es sich und wird immer kleiner und kleiner, bis es im Unendlichen Null wird. Stellt man sich vor, dass man den Körper durch eine Ebene schneide, so kann man sich die Änderungen des Potentiales in den verschiedenen Punkten dieser Ebene in der Weise veranschaulichen, dass man in jedem Punkte ein Loth errichtet, dessen Länge proportional dem Werte dieser Function ist. Die Endpunkte dieser Geraden werden eine Art topographischer Karte im Relief bilden, in welcher die Punkte, welche dem Conductor entsprechen, durch ein Plateau repräsentiert werden, das sich in allen Richtungen herabsenkt, wobei ein mehr oder weniger einfaches Gesetz, welches von der Gestalt des Conductors abhängt, befolgt wird.

Sind andererseits verschiedene leitende Körper vorhanden und schneidet man mehrere von ihnen durch dieselbe Ebene, so wird die topographische Figur eine gewisse Anzahl von Hochebenen (Plateaus) in verschiedenen Höhen aufweisen, wovon jede einem der Conductoren entspricht, und es werden diese Plateaus durch mehr oder weniger tiefe Senkungen von größerer oder geringerer Regelmäßigkeit getrennt sein. Es besteht eine sehr große Ähnlichkeit zwischen den topographischen Niveaucurven und den elektrischen Niveauflächen, und es ist diesem Umstande hauptsächlich zuzuschreiben, dass die Bezeichnung „Niveauflächen“ gewählt wurde. Wenn man sich diesen Vergleich immer vor Augen hält, wird man einen klaren Begriff der elektrischen Erscheinungen erhalten.

148. Wenn man durch einen Punkt im Raume eine Linie zeichnet, welche successiv normal auf allen Niveauflächen steht, welche sie trifft, das heißt eine Orthogonalcurve construiert, so wird die Richtung der elektrischen Kraft in jedem Punkte dieser Curve tangential zu derselben sein.

Eine solche Curve wird offenbar continuierlich verlaufen, solange sie keine der wirkenden Massen trifft. Die Differentialgleichungen derartiger Curven sind in dem Ausdrucke

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$$

enthalten; denn die Richtungscosinus der Tangente an die Orthogonalcurve sind $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, unter ds das Bogenelement

verstanden. Da diese Tangente mit der Normale zur Niveaufläche V = constans, welche durch den betrachteten Punkt geht, zusammenfällt und die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bildet, durch die Formeln:

$$\frac{\partial V}{\partial x} : N, \quad \frac{\partial V}{\partial y} : N, \quad \frac{\partial V}{\partial z} : N,$$

wobei

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$$

ist, ausgedrückt werden, so folgt, dass

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$$

sein muss.

Hat man z. B. ein System von kugelförmigen concentrischen Niveauflächen, wie es einer in dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte befindlichen elektrischen Masse entspricht, ist also:

$$x^2 + y^2 + z^2 = V,$$

so sind die Differentialgleichungen der Orthogonalcurve

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

nach deren Integration sich ergibt:

$$y = ax, \quad z = bx.$$

Diese Gleichungen gehören Geraden an, die durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Kugelflächen hindurchgehen.

Derartige Orthogonalcurven hat Faraday Kraftlinien genannt; nach diesem Physiker würden die Kraftlinien die Art und Weise repräsentieren, wie sich die elektrische Kraft von einem Punkte auf einen anderen überträgt; Faraday hat auch ohneweiters angenommen, dass die elektrische Wirkung sich in krummen Linien äußern kann. Man sieht, dass man — ohne den Grundsatz der directen Wirkung zweier Punkte aufeinander in der Richtung der Verbindungsgeraden aufzugeben — sich eine sehr klare Deutung der Ideen und Versuche Faraday's geben kann.

Die Kraftlinien sind analog den Linien des größten Gefälls in der Topographie.

Weil die Kraftlinien von Stellen höheren Potentiales zu solchen niederen Potentiales laufen, können sie niemals in sich zurücklaufen, sondern haben einen Anfang und ein Ende; sie gehen von positiv geladenen Flächen aus und enden im allgemeinen in negativ elektrisierten.

149. Stellen wir uns nun vor, es bewege sich eine unendlich kleine Menge positiver Elektricität m von einem Punkte A nach einem anderen Punkte B (Fig. 85) längs irgendeiner Bahn APB. Im Punkte P ist diese Masse m der elektrischen Kraft $f = - m \frac{dV}{dn}$ unterworfen, die normal zur Niveaufläche V, welche durch den Punkt P gelegt werden kann, gerichtet ist.

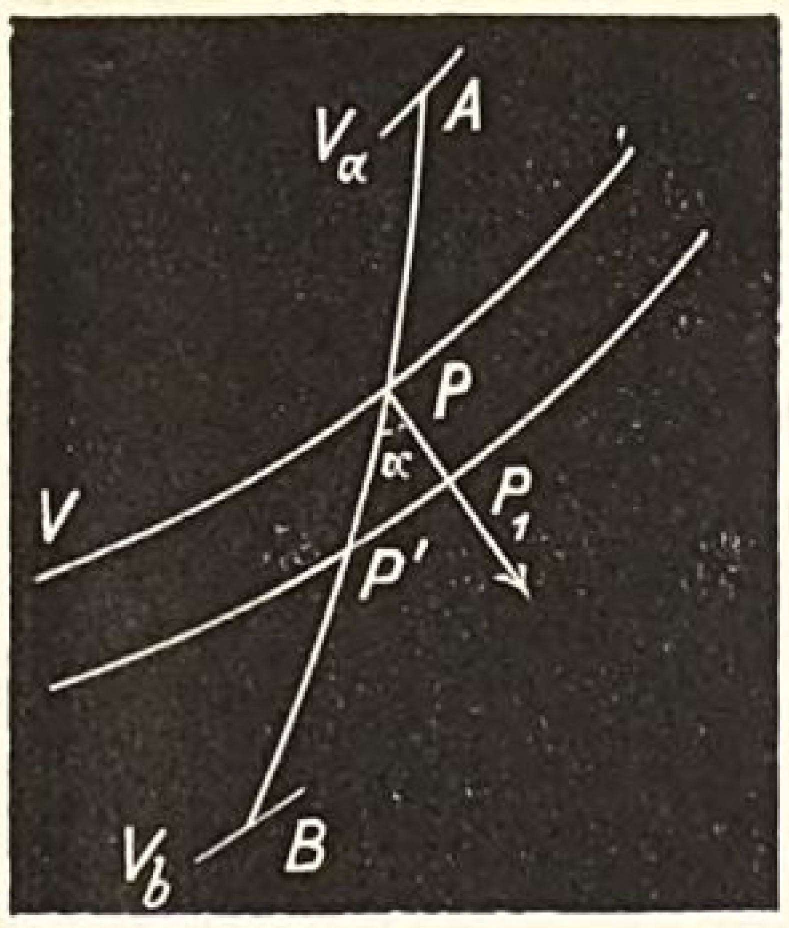


Fig. 85.

Bewegt sich die Elektricitätsmenge vom Punkte P nach dem Punkte P′, welcher auf einer der früher genannten unendlich benachbarten Niveaufläche gelegen ist, so ist die Arbeit der Kraft — wenn mit α der Winkel bezeichnet wird, den das Element der Trajectorie PP′ mit der Normale zur Niveaufläche in P bildet —

$$f.\mathrm{PP'}.\cos\alpha = f.\mathrm{PP}_1 = f\,dn.$$

Die Gesammtarbeit der elektrischen Kraft während der Bewegung der Elektricitätsmenge m von A nach B ist

$$\mathrm{T} = \int f dn = - m \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{d\mathrm{V}}{dn} dn = - m\,(\mathrm{V}_b - \mathrm{V}_a) = m\,(\mathrm{V}_a - \mathrm{V}_b).$$

Diese Arbeit hängt also einzig und allein von den Werten V_a und V_b des Potentials in den beiden Endpunkten A und B ab.

Die Arbeit der elektrischen Kräfte wird also, wie jene der auf einen Körper wirkenden Schwerkraft, dargestellt durch ein Product zweier Factoren, von denen der eine m dem Ge-

wichte des Körpers entspricht, während der andere $V_a - V_b$ der Fallhöhe gleichkommt.

Eine sich selbst überlassene positiv elektrische Masse hat das Bestreben, längs einer Kraftlinie sich zu bewegen und zwar gegen Stellen, in welchen das Potential geringer ist; die negative Elektricität hat umgekehrt die Tendenz, gegen Stellen höheren Potentiales fortzurücken.

Die Potentialdifferenz $V_a - V_b$ kann immer als die Ursache der Bewegung von Elektricitätsmengen angesehen werden; man bezeichnet sie daher öfters mit dem Namen der „elektromotorischen Kraft." Bewegt sich ein elektrisches Massentheilchen auf einer Niveaufläche, so ist die Arbeit der elektrischen Kräfte Null, da dann $V_a = V_b$ ist; es ist dies übrigens selbstverständlich, weil in diesem Falle die elektrische Kraft immer normal zur Verschiebung des Punktes gerichtet ist.

Wenn im Speciellen die Elektricitätsmenge m sich bis ins Unendliche fortbewegt, so ist die elektrische Arbeit $m V_a$; die Arbeit für eine Menge gleich der Einheit wird einfach V_a.

Das Potential in einem Punkte ist somit die Arbeit, welche eine Elektricitätsmenge gleich der Einheit([1]) hervorrufen würde, wenn sich dieselbe von diesem Punkte bis ins Unendliche oder bis zu einem anderen Punkte bewegen würde, in welchem das Potential Null ist, oder auch die Arbeit, welche man aufwenden müsste, um eine Elektricitätsmenge Eins vom Unendlichen in den betrachteten Punkt zu führen. Von dieser Eigenschaft macht man zuweilen Gebrauch, wenn es sich um die Definition des Potentials handelt.

Da man in der Theorie der elektrischen Phänomene es zumeist nur mit elektrischen Niveau-Differenzen und nicht mit den absoluten Werten der entsprechenden Potentiale zu thun hat, so ist man übereingekommen, alle Potentiale auf jenes zu beziehen, welches auf der Erde oder einem gemeinschaftlichen

([1]) Man setzt hiebei voraus, dass die Verschiebung der betrachteten elektrischen Masse in keiner merklichen Weise die Potentialwerte in den verschiedenen Punkten modificiert.

Körper herrscht, auf dem man ein Potential gleich Null voraussetzt.

Es ist daher der numerische Wert des Potentials in irgendeinem Punkte die Anzahl Arbeitseinheiten, welche der Verschiebung einer positiven Elektricitätseinheit von diesem Punkte bis zum Erdboden auf einem beliebigen Wege entspricht. Das Zeichen des Potentials ist jenes der Arbeit der bei dieser Verrückung wirkenden elektrischen Kräfte. Mit anderen Worten: das Potential in einem Punkte ist gegeben durch die Arbeit, welche man aufwenden muss, um in diesen Punkt eine Elektricitätsmenge gleich der Einheit von der Oberfläche der Erde oder einem beliebigen, mit der Erde in Verbindung stehenden Körper zu bringen.

150. Begriff des elektrischen Feldes. Die Wirkung eines elektrischen Systems äußert sich in einem bestimmten Raume, dem man den Namen des „elektrischen Feldes“ gegeben hat.

Im allgemeinen ist ein elektrisches Feld unbegrenzt; es kann aber auch begrenzt sein, z. B. dann, wenn die wirkenden Massen innerhalb eines vollkommen geschlossenen Leiters sich befinden. Ein elektrisierter Körper, der sich im elektrischen Felde befindet, wird von einer Kraft angegriffen, welche sowohl von seiner Größe als auch seiner Ladung abhängt und selbstverständlich auch eine Function der Lage des betreffenden Punktes ist. Der in das elektrische Feld gebrachte Körper übt seinerseits eine Wirkung auf die anderen in dem Felde befindlichen elektrischen Körper aus.

Wir haben früher gehört, dass im Gleichgewichtszustande die elektrische Kraft in jedem leitenden Körper Null ist; daher umfasst das elektrische Feld alle jene Räume nicht, welche von leitenden Körpern umschlossen werden; es kommen nur die zwischen den Leitern liegenden Räume, welche von isolierenden oder dielektrischen Medien ausgefüllt sind, in Betracht.

Besonders wichtig ist der Fall, wenn die Kraftlinien untereinander parallel sind; dann sind die Niveauflächen parallele Ebenen; die Kraft ist der Größe und Richtung nach constant;

ein solches elektrisches Feld wird ein homogenes oder gleichförmiges genannt.

151. Begriff des Kraftflusses. ([1]) Sei A (Fig. 86) eine Gleichgewichtsfläche und dA ein Element dieser Fläche im Punkte P. Zeichnen wir an der Grenzcurve dieses Elementes die entsprechenden Kraftlinien, welche alle aufeinander folgenden Niveauflächen unter rechten Winkeln schneiden, so wird in dieser Weise ein orthogonaler, von den Kraftlinien begrenzter Canal begrenzt, der den Namen einer Kraftröhre (auch nach Faraday Spondyloid) führt.

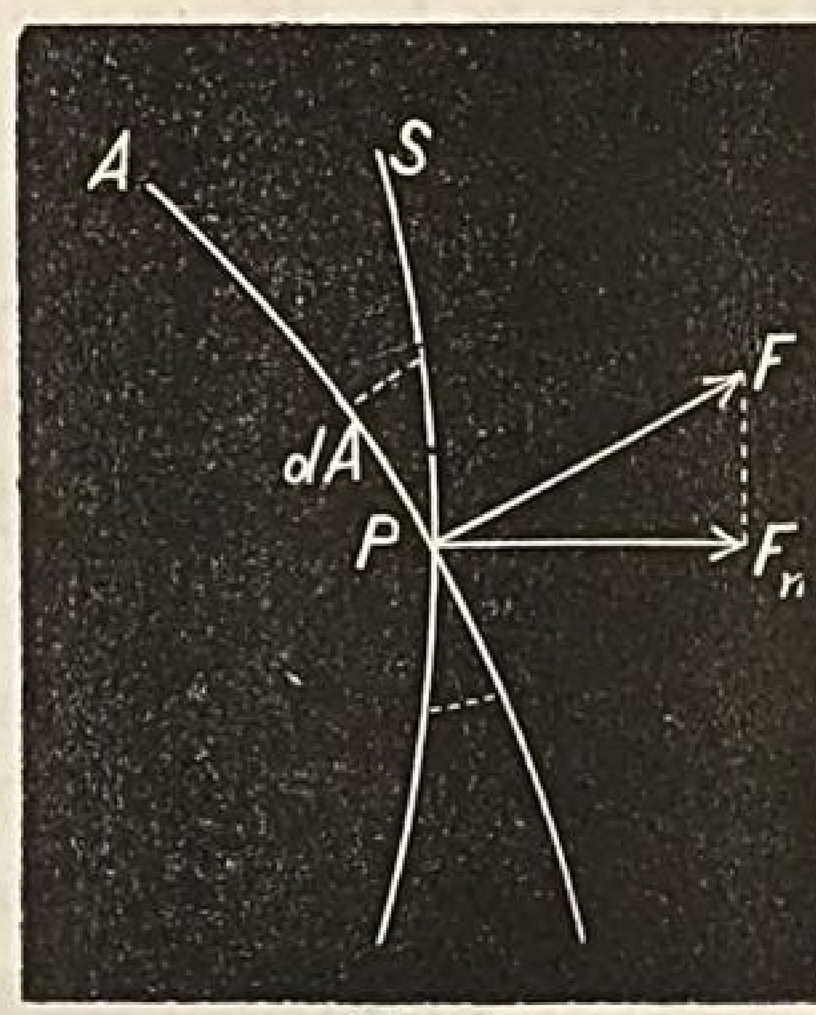


Fig. 86.

Die Kraftröhre, welche durch die Grenzcurve des Elementes dA begrenzt wird, schneidet aus einer beliebigen Fläche S, welche durch den Punkt P hindurchgeht, ein Flächenelement dS heraus.

Die in P wirkende elektrische Kraft F ist zu dA normal; sei F_n die Componente dieser Kraft, welche die Richtung der Normalen zur Fläche S hat; der Winkel zwischen den beiden Kräften ist gleich jenem zwischen den beiden Flächenelementen und man hat daher:

$$\frac{F_n}{F} = \frac{dA}{dS}$$

und hieraus folgt:

$$F.dA = F_n.dS.$$

Stellt man sich vor, eine im permanenten Zustande befindliche Flüssigkeit fließe normal zum Elemente dA mit einer Geschwindigkeit F, so stellt das Product $F.dA$ das Flüssigkeitsvolumen dar, welches in der Zeiteinheit das Element dA durchsetzt oder die Flüssigkeitsströmung, welche diesem Elemente entspricht. Für diese Strömung gilt auch noch der Ausdruck $F_n dS$, welcher erhalten wird, wenn man einen beliebigen Querschnitt des oben betrachteten Canals mit der

([1]) E. Mascart et J. Joubert, leçons sur l'electricité et le magnétisme. Paris 1882, pg. 18.

Geschwindigkeits-Componente in der zu diesem Querschnitte gezeichneten Normalen multipliciert.

In analoger Weise werden wir Kraftmenge oder Kraftfluss, der einem Flächenelemente entspricht, das Product $F_n.dS$ aus der Fläche des Elementes und der Normalcomponente der Kraft in diesem Punkte bezeichnen.

Die Kraftströmung per Oberflächeneinheit ist numerisch gleich der normalen Componente der Kraft.

Der Begriff der Kraftlinien wurde, wie wir oben sahen, von Faraday aufgestellt; was wir mit dem Ausdrucke Kraftmenge oder Kraftfluss bezeichnen, nennt er Zahl der Kraftlinien. Eine andere Bezeichnungsweise zu wählen schien nützlich, erstens des einfacheren Sprachgebrauches

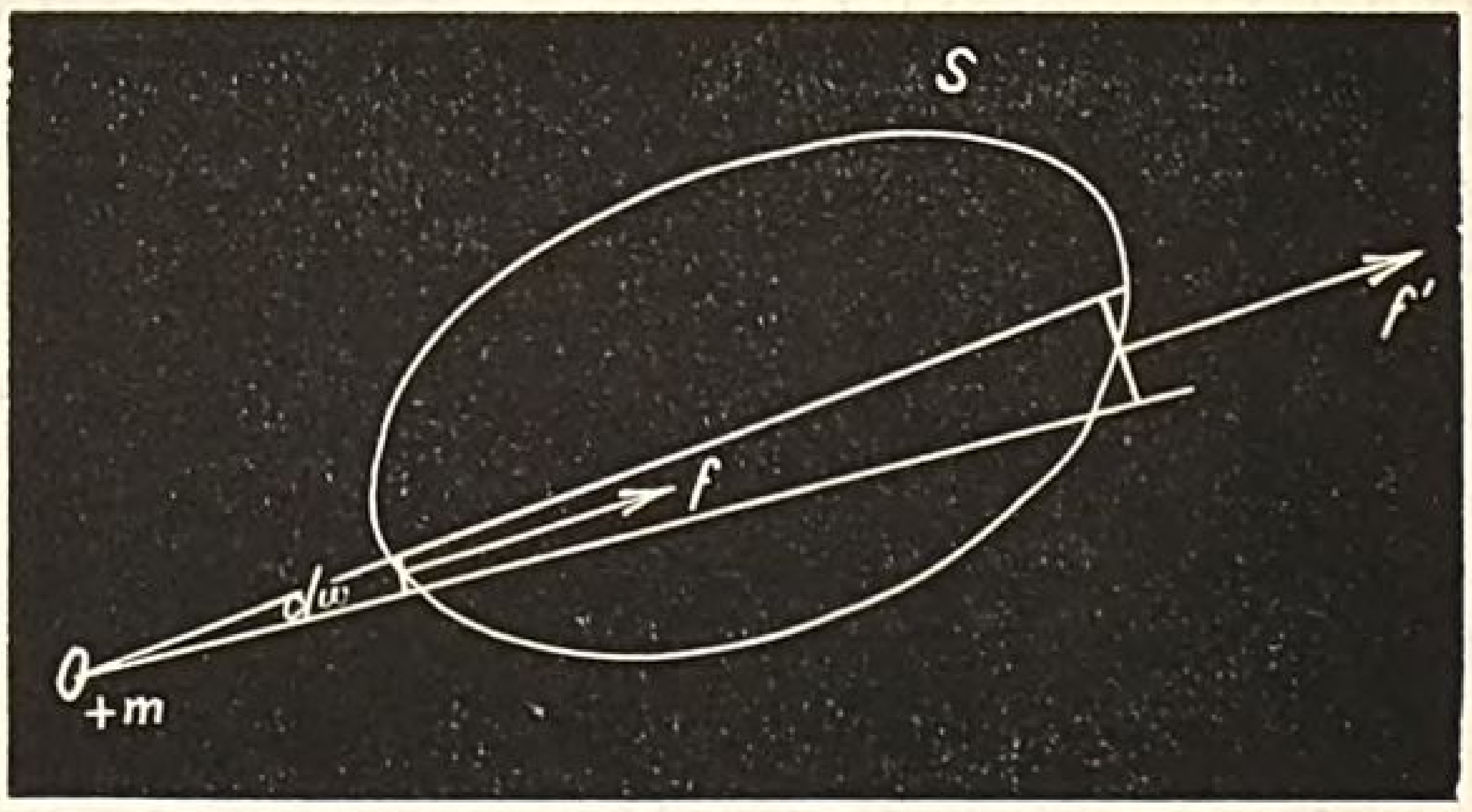


Fig. 87.

halber und dann, weil das Wort „Strömung oder Fluss" besser dem Charakter der Continuität entspricht, welche die zu bestimmende Größe darbietet.

152. Theorem von Green. Betrachten wir eine vollkommen geschlossene convexe Oberfläche S (Fig. 87.) Es sei $+m$ eine Elektricitätsmenge, die sich in O befindet, also außerhalb dieser Oberfläche. Ein unendlich schmaler Kegel mit seiner Spitze in O schneidet auf dieser Oberfläche zwei Elemente dS und dS' heraus.

Bezeichnet man mit f und f' die Werte der elektrischen Kraft in dS und dS', dA und dA' die entsprechenden Normalschnitte des Kegels, r und r' ihre Entfernungen vom Punkte O. Man hat dann:

$$fr^2 = f'r'^2 = m,$$

$$\frac{dA}{r^2} = \frac{dA'}{r'^2} = d\omega.$$

Multipliciert man diese Gleichungen Glied für Glied, so erhält man:

$$f.dA = f'dA' = m.d\omega;$$

berücksichtigt man das Theorem des Kraftflusses, so hat man auch:

$$f.dA = f_n.dS,\ f'.dA' = f'_n.dS'$$

und demzufolge:

$$f_n.dS = f'_n.dS' = m.d\omega.$$

Kommt man überein, jene Normalcomponenten als positiv zu betrachten, welche von der Oberfläche auswärts gerichtet sind, negativ aber jene, welche gegen das Innere des Raumes, der von der Oberfläche eingeschlossen wird, gerichtet sind, so haben f_n und f'_n das entgegengesetzte Zeichen und man erhält:

$$f_n dS + f'_n dS' = 0.$$

Wenn die Oberfläche, die wir continuierlich sein lassen, concave Theile besitzt und wenn der betrachtete Kegel $d\omega$ sie in mehr als zwei Punkten schneidet, so wird er sie eine gerade Anzahl male treffen; das Product $f_n.dS$ wird für jedes der ausgeschnittenen Elemente denselben numerischen Wert haben: man muss aber diese Producte abwechselnd mit entgegengesetztem Vorzeichen nehmen und es wird die algebraische Summe wieder Null sein. Man hat daher für irgendeine geschlossene Oberfläche, welche außerhalb der wirksamen Masse m liegt, die Gleichung:

$$\int f_n.dS = 0,$$

d. h. der gesammte Kraftfluss, welcher von der Oberfläche ausgeht, ist Null.

Wenn die wirkende Masse m im Innern der geschlossenen Oberfläche S (Fig. 88) liegt, so liefern die Elemente dS und dS', welche durch einen Kegel mit der Öffnung $d\omega$, der von

der Masse m ausgeht, aus der Oberfläche herausgeschnitten werden, die Beziehung:

$$f_n dS = f'_n dS' = m d\omega.$$

In diesem Falle haben aber die normalen Componenten f_n und f' dasselbe Zeichen und man hat daher für die ganze Oberfläche:

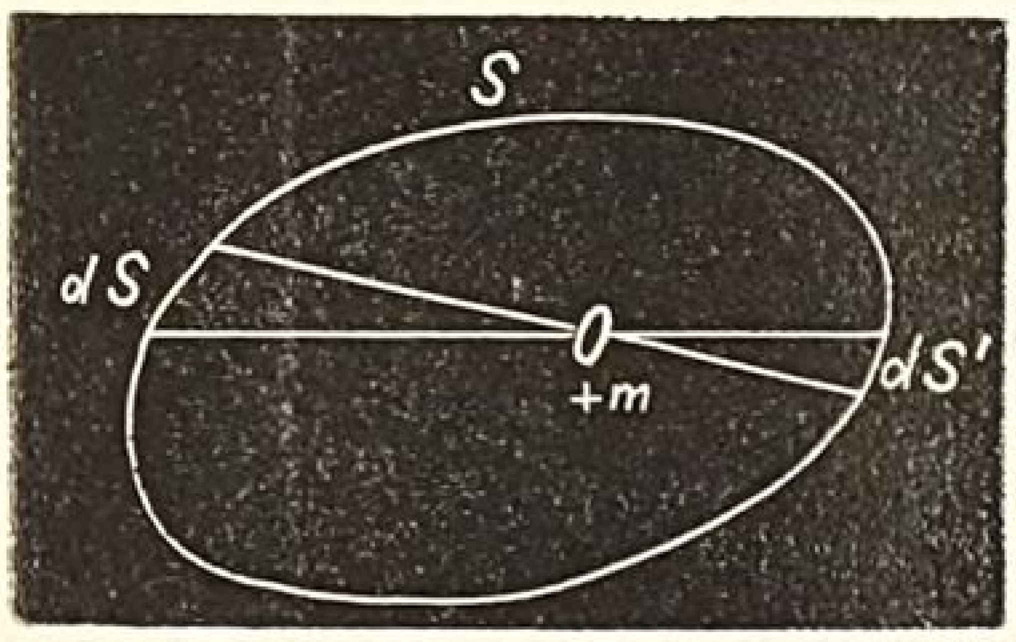


Fig. 88.

$$\int f_n dS = m \int d\omega = 4\pi m.$$

Der Kraftfluss, welcher von einer Oberfläche S ausgeht, die eine wirksame Masse m umschließt, ist daher gleich $4\pi m$. Man kann mit andern Worten sagen, dass der gesammte Kraftfluss, welcher von einer Masse m nach allen Richtungen ausgeht, gleich $4\pi m$ ist.

Es ist klar, dass, wenn der betrachtete Kegel mehr als einmal die Oberfläche trifft, dies eine ungerade Anzahl male an Stellen stattfinden wird, für welche die Werte von $f_n dS$ abwechselnd mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden müssen; das schließliche Resultat wird dasselbe sein.

Nehmen wir nun an, dass die Massen $m, m', m'' \ldots$ innerhalb der Oberfläche S, die Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ sich außerhalb derselben befinden.

In jedem Punkte der Oberfläche ist die normale Componente F_n der Resultierenden F gleich der algebraischen Summe der normalen Componenten der Kräfte, welche von allen wirksamen Massen, sowohl den inneren als auch den äußeren ausgehen. Bezeichnet man mit $\sum_e f_n$ die Summe der normalen Componenten, welche von den außerhalb der Oberfläche liegenden Massen herrühren und mit $\sum_i f_n$ die Summe der Componenten, welche sich auf die inneren Massen beziehen, so ist der gesammte von der Oberfläche S ausgehende Kraftfluss

$$\int F_n dS = \int \sum_e f_n dS + \int \sum_i f_n dS.$$

Da der Kraftfluss für jede äußere Masse Null ist, so folgt daraus:

$$\int \sum_e f_n . dS = 0.$$

Für jede innerhalb der Oberfläche liegende Masse hat man andererseits:

$$\int f_n dS = 4\pi . m$$

und demzufolge:

$$\int \sum_i f_n . dS = 4\pi \sum m = 4\pi M,$$

wobei M die algebraische Summe aller inneren Massen bezeichnet.

Es bleibt somit übrig:

$$\int F_n dS = 4\pi M.$$

Für jede geschlossene Oberfläche, die in irgendeiner Weise in einem elektrischen Felde sich befindet, ist der gesammte Kraftfluss, welcher von der Oberfläche ausgeht, d. h. der Überschuss der austretenden Kraftströmungen über die eintretenden gleich der von der Oberfläche eingeschlossenen Elektricitätsmenge multipliciert mit 4π.

Bezeichnet man mit i den Winkel der Kraftrichtung in einem Punkte der Oberfläche mit der Normale, so gilt die Gleichung:

$$F_n = F . \cos i.$$

Nennt man a die Normale zur Niveaufläche, welche durch den betrachteten Punkt geht, und n die Normale zur Oberfläche S (nach außen gerechnet), so hat man außerdem:

$$F = -\frac{dV}{da} \text{ und } F_n = -\frac{\partial V}{\partial n},$$

so dass man das vorhergehende Theorem analytisch durch die eine oder andere der nachstehenden Gleichungen ausdrücken kann;

$$-\int \frac{dV}{da} \cos i . dS = 4\pi M,$$

$$-\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 4\pi M.$$

Diese Ausdrücke wurden schon von Green angegeben.

Gauss (1) hat diesen Lehrsatz in der allgemeinen Form

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\Omega . M$$

ausgesprochen. Es ist $\Omega = 4\pi$ für alle die Theile von M, die innerhalb der Fläche S liegen; für die Theile von M, welche außerhalb S liegen, ist $\Omega = 0$; für jene Theile von M, welche auf S liegen, bedeutet Ω den körperlichen Winkel, welchen sämmtliche Tangenten, die durch den betrachteten Punkt an die Fläche gezogen werden können, bilden.

Wir wollen auf Grund dieses wichtigen Theorems im folgenden Artikel eine andere Ableitung der Laplace'schen und Poisson'schen Gleichungen geben.

153. Ableitung der Gleichungen von Laplace und Poisson. Seien X, Y, Z die Kraftcomponenten in einem Punkte P, dessen Coordinaten x, y, z sind und betrachten wir das Volumelement $dxdydz$.

Wenn das Medium wirkende Massen enthält, die in continuierlicher Weise vertheilt sind und wenn dM die gesammte im Volumenelemente enthaltene Masse ist, so hat man — unter ρ die Dichte verstanden

$$dM = \rho dxdydz.$$

Die Kraftströmung, welche durch die Oberfläche $dydz$ stattfindet, ist

$$X dydz;$$

(1) Theoria attractionis corporum sphaeroid. ellipt. Art. 6. Crelle's Journal 1811; auch in „allgemeine Lehrsätze über die im verkehrten Verhältnis des Quadrates u. s. w." (Resultate des magnet. Vereines 1839.)

jene Kraftströmung, welche aus der entgegengesetzten Fläche tritt, ist

$$\left(X + \frac{\partial X}{\partial x} dx\right) dydz.$$

Der Überschuss der Kraftströmung ist daher

$$\frac{\partial X}{\partial x} dxdydz = - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dxdydz.$$

Wiederholt man dieselbe Betrachtungsweise für die anderen Coordinaten, so erkennt man, dass der gesammte Kräftefluss, welcher aus dem Volumenelemente austritt, durch den Ausdruck

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dxdydz$$

dargestellt ist.

Mit Rücksicht auf das vorhergehende Theorem ist dieser Überschuss dem Producte aus 4π und der ganzen Elektricitätsmenge, welche in dem Volumen enthalten ist, gleich und daraus erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - 4\pi\rho$$

oder kürzer:

$$\Delta V = - 4\pi\rho.$$

Enthält das Volumelement keine Elektricität, dann ist $\Delta V = 0$.

Zusatz. Nehmen wir im Speciellen an, dass man zur Z-Axe die Normale zur Niveaufläche wähle, so dass die Axen der X und Y in der Tangentialebene liegen.

Der Kraftfluss parallel zur Oberfläche ist Null und man hat deshalb:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Wenn im betrachteten Punkte sich keine Elektricität vorfindet, so folgt aus dem Theoreme:

$$\Delta V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Daraus folgt das nachstehende Theorem:

Es ist die zweite Derivierte des Potentiales in jeder Richtung, die tangential zu einer Niveaufläche ist, Null. Sie ist auch Null bezüglich der Normale, wenn in dem betrachteten Punkte keine Elektricität sich befindet.

154. Elektrische Capacität. Der Begriff der elektrischen Capacität der Conductoren wurde von Volta [1] in ganz bestimmten Worten in die Wissenschaft eingeführt. Er erinnert an ein Experiment, durch welches Franklin nachgewiesen hat, dass, wenn man die Oberfläche eines Conductors vergrößert, ohne seine Masse zu verändern, man gleichzeitig seine elektrische Capacität vergrößert; wenn z. B. ein Metallgefäß eine Kette in sich birgt, so ist die Capacität dieses Gefäßes viel größer, wenn man die Kette hebt, als wenn man sie in dem Gefäße beisammen liegen lässt.

Volta bemerkt ebenso, dass von zwei gleichflächigen Conductoren jener eine größere Capacität hat, dem eine größere Länge zukommt, und er gibt auch ein Mittel an, um die Capacitäten zweier Conductoren zu vergleichen: er bestimmt nämlich die Zahl der Umdrehungen einer Elektrisiermaschine, welche nothwendig waren, um auf diesen Conductoren das Maximum der Ladung zu erzeugen, d. h. um sie auf einen solchen Zustand zu bringen, dass das auf die Maschine gesetzte Elektroskop das Maximum seiner Deviation angibt. Volta fand so, dass die Capacität eines Cylinders von bestimmter Oberfläche oder bestimmten Volumen sich schnell vergrößert, wenn die Länge zunimmt.

Thomson [2] hat gezeigt, welchen großen Vortheil man vom experimentellen Gesichtspunkte aus dem Begriffe der elektrischen Capacität ziehen kann. Man kann zuerst bemerken, dass auf einem Conductor, welcher unter bestimmten Bedingungen steht, das Potential proportional der Elektricitätsmenge ist, welche auf dem Conductor angehäuft wurde. Denn die Übereinanderlagerung zweier Gleichgewichtszustände

(1) Journal de physique de l'abbé Rozier (avril 1779).

(2) Reprint of papers.

gibt wieder einen neuen Gleichgewichtszustand; die elektrischen Schichten, welche jedem der Zustände entsprechen, würden einzeln ein constantes Potential auf dem Conductor hervorrufen und wenn sie superponiert werden, wird das neue Potential gleich der Summe der beiden vorigen Potentiale sein und wird auch einen constanten Wert besitzen. Wenn die beiden superponierten Zustände identisch sind, wird das aus ihrer Übereinanderlagerung resultierende Potential doppelt so groß sein, und die elektrische Ladung ebenfalls die doppelte. Wir nehmen hier an, dass zwei gleiche Elektricitätsmengen, die auf einem Conductor im Gleichgewichte sich befinden, in derselben Weise auf demselben vertheilt sind und dasselbe Potential hervorrufen oder, mit anderen Worten, dass auf einem Conductor nur eine Elektricitätsvertheilung möglich ist. Diese übrigens einleuchtende Voraussetzung wird weiter unten bewiesen werden.

Bezeichnet man somit mit V das Potential eines Conductors, der mit der Elektricitätsmenge M geladen ist, so kann man schreiben:

$$V = \frac{M}{C},$$

wenn C die elektrische Capacität des Conductors ist, d. h. jene Elektricitätsmenge, welche nothwendig wäre, um auf diesem Conductor ein Potential gleich der Einheit zu erzeugen. Man hat wohl zu bemerken, dass die elektrische Capacität eines Körpers nicht eine bestimmte Constante, wie etwa die calorische Capacität ist. Während letztere nur von der materiellen Beschaffenheit und dem Gewichte des Körpers abhängt, hängt die elektrische Capacität weder von der Natur noch von dem Gewichte des Körpers sondern einzig und allein von seiner Gestalt und der Gestalt und Lage der ihm benachbarten Conductoren ab.

155. Capacität einer Kugel. Wir haben gesehen, dass für eine leitende Kugel, welche jeder äußeren Wirkung entzogen wird, die Formel

$$V = \frac{M}{R}$$

gilt; die elektrische Capacität einer Kugel ist dann dargestellt durch dieselbe Zahl, welche den Radius der Kugel angibt.

Die elektrische Capacität ist somit eine lineare Größe.

156. Berechnung der Capacität eines Ellipsoides, einer elliptischen und kreisförmigen Platte. Es wurde früher gezeigt, dass die Dichte in einem Punkte x, y, z der Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoides durch die Formel

$$\mu = \frac{M}{4\pi abc} p = \frac{M}{4\pi abc} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

ausgedrückt wird, in welcher p das Perpendikel bezeichnet, welches man vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die in dem gedachten Punkte gezeichnete Tangentialebene construieren kann; M bedeutet die gesammte Elektricitätsmenge, welche über dem Ellipsoide verbreitet ist. Da das Potential im Innern constant ist, genügt es, dessen Wert im Centrum zu rechnen. Bezeichnet man die Entfernung des Oberflächenelementes dS vom Centrum mit r, so ist daher:

$$V = \int \frac{\mu dS}{r} = \frac{M}{4\pi abc} \int \frac{p dS}{r}.$$

Die Capacität des Ellipsoides C ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi abc} \int \frac{p dS}{r}$$

gegeben. Man erkennt, dass für ein dreiaxiges Ellipsoid das vorstehende Integral ein elliptisches ist; leicht kann die Integration ausgeführt werden, wenn es sich um ein Rotationsellipsoid handelt. Entsteht das Rotationsellipsoid durch Rotation um die große Axe a, so ergibt sich, wenn e die Excentricität und C_1 die Capacität des Ellipsoides bezeichnet, die Formel

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{2ae} \log \frac{1+e}{1-e}.$$

Entsteht jedoch das Ellipsoid durch Rotation um die kleine Axe b, so wird dann die Capacität ausgedrückt durch

$$\frac{1}{C_2} = \frac{arc.\sin e}{ae}.$$

Beide Formeln gehen in die nachfolgende:

$$C_1 = C_2 = a$$

über, wenn das Ellipsoid eine Kugel wird, wenn also die Excentricität des Ellipsoides Null ist.

Die Dichte der Elektricität auf einer elliptischen Platte wurde früher gefunden; sie wird angegeben durch die Gleichung

$$\mu = \frac{M}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Die elektrische Capacität einer elliptischen Platte findet man nach der Formel:

$$C = \frac{a}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}}$$

wenn ε die numerische Excentricität der Ellipse bedeutet. Wenn ε klein ist, so kann man das im Nenner vorkommende vollständige elliptische Integral erster Art in eine Reihe ausdrücken und dem entsprechend setzen:

$$C = \frac{2}{\pi} \sqrt{ab} \left(1 + \frac{\varepsilon^4}{64} + \frac{\varepsilon^6}{64} + \cdots\right)$$

oder in erster Annäherung:

$$C = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

wenn F die Fläche der Ellipse vorstellt.

Für eine kreisförmige Platte erhält man als elektrische Dichte in einer Entfernung r vom Centrum

$$\mu = \frac{M}{4\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Die Capacität der kreisförmigen Scheibe ergibt sich durch leichte Berechnung des Potentiales im Mittelpunkte der Scheibe, wobei die beiden Belegungen der Scheibe in Rücksicht genommen werden müssen, zu

$$C = \frac{2a}{\pi} = \frac{a}{1{\cdot}571}.$$

Es ist somit die Capacität einer unendlich dünnen, kreisförmigen Scheibe kleiner als jene einer Kugel vom gleichen Radius, und zwar in dem Verhältnisse von 1:1·571. Cavendish fand für dieses Verhältnis 1:1·57 auf dem Wege des Experimentes (¹). Wir werden später seine Bestimmungsmethode kennen lernen.

Die Formel für die Dichte der Elektricität auf einer kreisförmigen Scheibe

$$\mu = \frac{M}{4\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}$$

wurde zuerst von Green in seiner Abhandlung: „On the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the Electric Fluid“ (Transactions of the Cambridge Philos. Soc. 1832) angegeben.

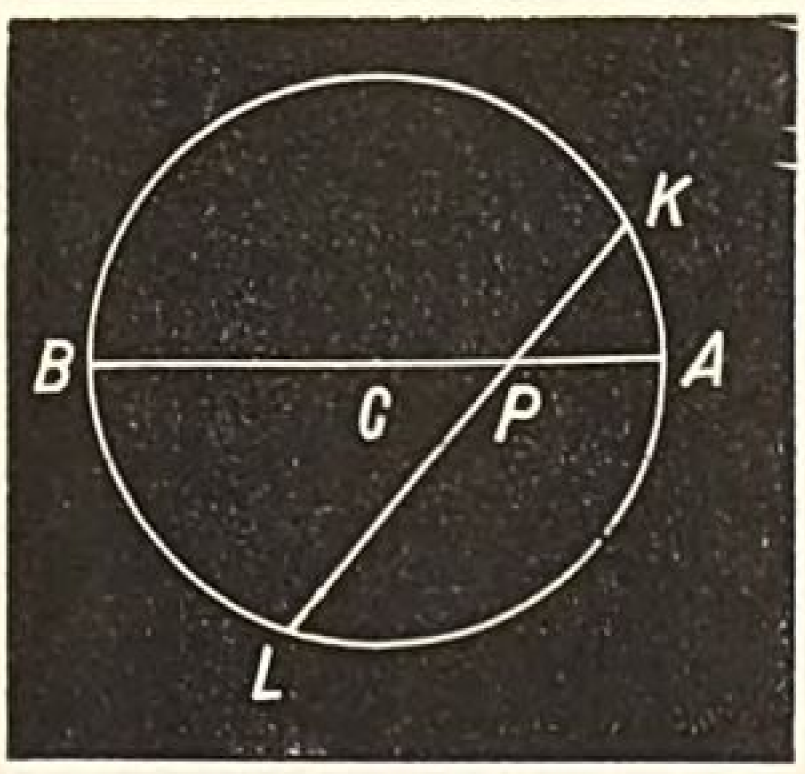


Fig. 89.

Thomson (²) hat dieser Formel eine Gestalt ertheilt, welche ihm bei der Lösung von weiteren Problemen vom Nutzen war.

Ist C das Centrum (Fig. 89) der Scheibe, ferner CA = CB = a, CP = r, so ist

$$BP.PA = KP.PL = a^2 - r^2,$$

wenn KL irgendeine Sehne bedeutet, die durch den Punkt P geht, in welchem die elektrische Dichte bestimmt werden soll. Man hat nun

$$\mu = \frac{M}{4\pi a \sqrt{KP.PL}}$$ oder, da

(¹) The Electrical Researches of Henry Cavendish, edited by Clerk Maxwell 1879.

(²) Thomson, Reprint of papers etc. pg. 180.

das constante Potential auf der Scheibe durch

$$V = \frac{M\pi}{2a}$$

dargestellt wird,

$$\mu = \frac{V}{2\pi^2 \sqrt{KP.PL}}.$$

157. Für einen irgendwie gestalteten Conductor, der ebenfalls isoliert und jeder Wirkung entzogen ist, sind die elektrische Ladung und das Potential durch die nachstehenden Formeln dargestellt, in welchen μ die elektrische Dichte auf einem Oberflächenelemente $d\sigma$ bezeichnet, und r die Entfernung dieses Elementes von irgendeinem Punkte, der in dem Conductor gelegen ist, bedeutet; es ist

$$M = \int \mu . d\sigma,$$

$$V = \int \frac{\mu . d\sigma}{r}.$$

Der mathematische Ausdruck der elektrischen Capacität ist daher:

$$C = \frac{M}{V} = \frac{\int \mu . d\sigma}{\int \frac{\mu . d\sigma}{r}}.$$

Die Bestimmung dieser Größe mittelst des Calcüls bietet im allgemeinen sehr große Schwierigkeiten.

Man sieht leicht ein, dass die Capacitäten zweier ähnlichen Conductoren den homologen Dimensionen proportional sind. In der That ist das Potential, welches die elektrische Belegung eines Oberflächenelementes in einem inneren Punkt P des Conductors hervorruft, $\frac{\mu . d\sigma}{r}$; verdoppelt man nun die Dimensionen des Conductors, ohne die auf ihm angehäufte Elektricitätsmenge zu ändern, so wird die Elektricitätsmenge $\mu' d\sigma'$ des neuen Oberflächenelementes, welches dem ursprünglichen homolog ist, nicht geändert, die Distanz dieses Elementes vom

Punkte P′, der dem Punkte P homolog ist, wird jedoch verdoppelt werden und das Potential wird die Hälfte des früheren werden.

158. Die Vergleichung von Potentialen und elektrischen Capacitäten ist ein Problem, welches in den Untersuchungen über Elektricität stets vorkommt und wir werden später die experimentellen Methoden beschreiben, welche die Lösung des Problems enthalten. Das allgemeine diesen Bestimmungen zugrunde liegende Princip ist sehr einfach.

Betrachten wir zwei Conductoren A und A′, deren elektrische Capacitäten C und C′ sind und welche mit derartigen Elektricitätsmengen M und M′ geladen sind, dass das Potential V auf beiden dasselbe ist.

Wenn man diese Körper durch einen leitenden Draht in Verbindung setzt, der hinlänglich lang ist, so dass die gegenseitige Wirkung der beiden Conductoren aufeinander unmerklich ist, und so dünn ist, dass man seine elektrische Capacität vernachlässigen kann, so werden die vorausgesetzten Körper A und A′ dasselbe Potential behalten und das System wird im Gleichgewichte sein. Man wird dann haben:

$$V = \frac{M}{C} = \frac{M'}{C'} = \frac{M + M'}{C + C'},$$

welche Gleichung ausdrückt, dass die Capacität (C + C′) des Systems der miteinander verbundenen Leiter gleich der Summe der Capacitäten eines jeden von ihnen ist.

Wenn die beiden Mengen M und M′ einzeln auf den Conductoren die verschiedenen Potentiale V und V′ hervorbringen, hat man

$$V = \frac{M}{C}, \quad V' = \frac{M'}{C'}.$$

Stellt man eine lange Verbindung zwischen den beiden Conductoren her, so bringt man sie auf dasselbe Potential V_1, welches durch die Gleichung

$$V_1 = \frac{M + M'}{C + C'} = \frac{VC + V'C'}{C + C'}$$

bestimmt ist; daraus erhält man das Verhältnis der Capacitäten

$$\frac{C}{C'} = \frac{V' - V_1}{V_1 - V}$$

mittelst der Potentiale.

Die neuen Ladungen m und m' der Conductoren werden den Gleichungen

$$V_1 = \frac{m}{C} = \frac{m'}{C'}$$

genügen, aus welchen sich ergibt:

$$m = \frac{C}{C + C'}(M + M'),$$

$$m' = \frac{C'}{C + C'}(M + M').$$

159. Die Gleichung

$$V_1(C + C') = VC + V'C'$$

zeigt an, dass zwischen den Potentialen und den elektrischen Capacitäten zweier Conductoren, welche durch einen langen Draht verbunden sind, dieselbe Beziehung besteht, wie zwischen den Temperaturen und den calorischen Capacitäten zweier auf verschiedenen Temperaturen sich befindenden Körper, die gemischt werden. Es ist in der That im letzteren Falle das Product der calorischen Capacität der Mischung (d. h. seines Wasserwertes) in die Mischungstemperatur gleich der Summe der Producte der calorischen Capacität jedes Körpers und seiner Anfangstemperatur.

Diese Producte stellen die Wärmemengen dar, welche diese verschiedenen Körper abgeben müssen, wenn man sie auf die Temperatur Null bringt.

Der alleinige Unterschied, welcher zwischen den beiden Erscheinungsarten besteht, ist der, dass die elektrische Capacität eines Conductors von seiner Form abhängt und für Körper mit ähnlichen Formen proportional den linearen Dimensionen ist, währenddem die calorische Capacität eines Körpers einfach seinem Gewichte proportional ist.

Wenn man ebenso irgendeine Anzahl von Conductoren, deren elektrische Capacitäten C, C', C"... und deren Potentiale V, V', V"... sind, durch eine lange Verbindung in Communication setzt, so wird die elektrische Ladung des ganzen Systemes der algebraischen Summe der Ladungen aller dieser Conductoren gleich sein; die elektrische Capacität C_1 des Systemes und das resultierende Potential V_1 werden durch die Beziehungen

$$C_1 = C + C' + C'' + \dots$$

$$V_1 C_1 = VC + V'C' + V''C'' + \dots$$

dargestellt. Man sieht aus diesen Formeln, dass die Bestimmung der elektrischen Capacitäten jederzeit auf eine Vergleichung der Potentiale zurückgeführt werden kann.

160. Elektrische Influenz. Wenn verschiedene Conductoren sich im elektrischen Gleichgewichte befinden, hat das Potential auf einem jeden von ihnen einen constanten Wert, der sich aber von Conductor zu Conductor ändert.

Im Speciellen: wenn der eine der Körper A allein mit Elektricität z. B. positiver geladen ist und wenn ein Conductor B, der sich im neutralen Zustande befindet, in seiner Nachbarschaft ist, so wird das Potential des Körpers A in den verschiedenen Punkten dieses Conductors nicht constant sein; denn es herrscht in jedem Punkte desselben eine elektrische Kraft, welche das neutrale Fluidum zerlegt; das entgegengesetzt bezeichnete Fluidum wird angezogen, das gleichnamige abgestoßen, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Der Körper B ist dann mit zwei Schichten geladen, die eine, aus negativer Elektricität bestehend, ist dem influencierenden Körper A benachbart, die andere positiv elektrische Schichte ist von A entfernter; das Potential in diesem Conductor hat den constanten Wert V_2 angenommen. Gleichzeitig wurde im allgemeinen die Elektricität des influencierenden Körpers A in einer anderen Weise vertheilt und das Potential dieses Körpers ist von seinem ursprünglichen Werte V auf einen anderen V_1 gesunken. Das ist das gewöhnliche Phänomen der elektrischen Influenz. In einer gewissen Anzahl einfacher

Fälle kann man die entsprechende Rechnung in einer vollständigen Weise durchführen.

161. Nehmen wir z. B. an, der influencierende Körper A (Fig. 90) sei eine mit einer positiven Elektricitätsmenge M_1 geladene Kugel und der influencierte Körper B sei eine concentrische Kugelschale, welche von der Kugel A durch ein isolierendes Medium getrennt ist. Wenn der Conductor isoliert ist, ladet er sich mit einer Elektricitätsmenge $-M_2$, die sich an seiner inneren Oberfläche ansammelt und einer gleich großen aber entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsmenge $+M_2$, die sich auf seiner äußeren Oberfläche anhäuft; wir haben schon früher gesehen, dass die beiden Elektricitätsmengen M_1 und M_2 einander gleich sind (89).

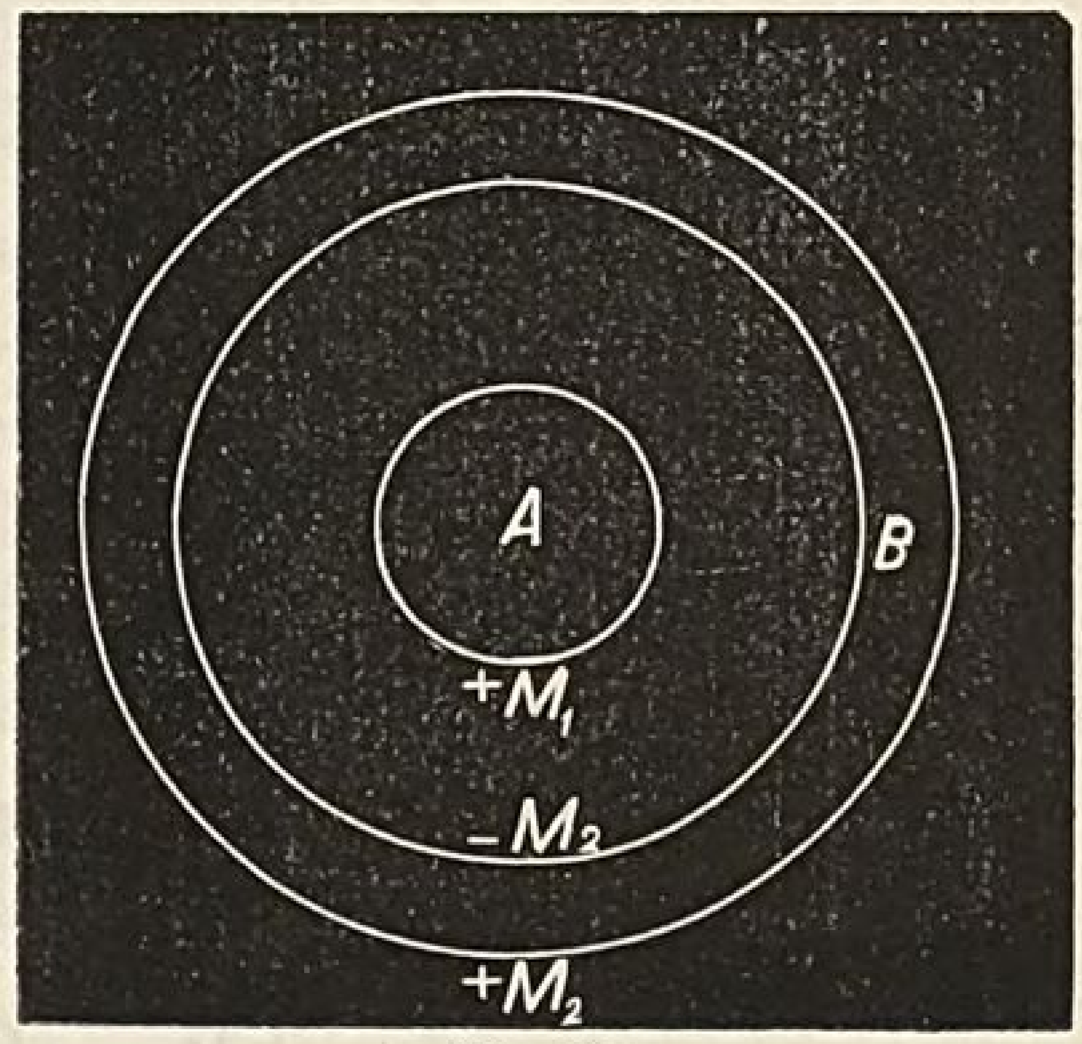


Fig. 90.

Seien nun R_1 der Radius der Kugel A, R_2 und R_2' die Radien der inneren und äußeren Oberfläche des Conductors B, V_1 das Potential auf A, V_2 jenes auf B. Man hat für das gemeinschaftliche Centrum:

$$V_1 = \frac{M_1}{R_1} - \frac{M_2}{R_2} + \frac{M_2}{R_2'} = M_1\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}\right] = \frac{M_1}{R_1}\left[1 - \frac{R_2' - R_2}{R_2'} \cdot \frac{R_1}{R_2}\right].$$

Für einen Punkt des Conductors B sind die Potentiale der Elektricitätsschichten $+M_1$ und $-M_2$ gleich und entgegengesetzt bezeichnet, so dass einfach übrig bleibt

$$V_2 = \frac{M_2}{R_2'} = \frac{M_1}{R_2'}.$$

Wird die Kugel A jeder Influenz entzogen, so wird ihre elektrische Capacität R_1 sein; in dem hier ins Auge gefassten Falle ist aber letztere Größe ausgedrückt durch

$$\frac{R_1}{1 - \frac{R_2' - R_2}{R_2'} \cdot \frac{R_1}{R_2}};$$

sie ist also dann merklich vermehrt zufolge der Anwesenheit des Conductors B. Das Verhältnis der neuen elektrischen Capacität zu jener der alleinstehenden Kugel ist

$$\frac{1}{1-\frac{R_2'-R_2}{R_2'}\cdot\frac{R_1}{R_2}}=\frac{R_2}{R_2-R_1\frac{R_2'-R_2}{R_2'}}.$$

Wird der Conductor B in Verbindung mit dem Erdboden gesetzt, so verschwindet die Elektricitätsschichte $+M_2$ und das Potential des Conductors wird Null; das Potential der inneren Kugel ist dann:

$$V_1=\frac{M_1}{R_1}-\frac{M_1}{R_2}=\frac{M_1}{R_1}\frac{R_2-R_1}{R_2},$$

und das Verhältnis der neuen Capacität der Kugel A zu jener, welche sie haben würde, wäre sie allein vorhanden, ist:

$$\frac{R_1\frac{R_2}{R_2-R_1}}{R_1}=\frac{R_2}{R_2-R_1}.$$

Die Capacität der inneren Kugel ist dann bedeutend vergrößert; sie ist beinahe umgekehrt proportional der Entfernung der beiden Conductoren oder der Dicke der isolierenden Schichte. Denn es wird die Capacität der Kugel A, wenn man B zur Erde ableitet, bestimmt durch:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}=\frac{e}{R_1 R_2},$$

wenn man mit e die Dicke des zwischen A und B befindlichen Dielektrikums bezeichnet. Ist die letztere klein im Verhältnisse zum Kugelradius, so kann man die Differenz zwischen R_2 und R_1 vernachlässigen und für die Capacität der Kugel A die Formel

$$\frac{1}{C}=\frac{e}{R_1^2}$$

verwenden; daraus folgt:

$$C=\frac{R_1^2}{e}=\frac{S}{4\pi e},$$

wenn S die Oberfläche der Kugel bedeutet. Die Elektricitätsmenge, welche nöthig ist, um die Kugel A auf das Potential V zu bringen, ist nun

$$M = \frac{SV}{4\pi e}.$$

162. Allgemeine Theoreme über geschlossene Conductoren. Ein Theil der Resultate, welche wir in dem Falle der Einhüllung einer influencierenden Kugel durch eine concentrische Kugelschale gefunden haben, ist auch dann noch giltig, wenn die leitenden Hüllen irgendeine Form haben.

Da wir später zeigen werden, dass es im allgemeinen auf jedem Conductor nur einen Gleichgewichtszustand gibt, so wird es in jedem speciellen Falle genügen, eine Lösung zu finden, um überzeugt zu sein, dass sie die richtige ist.

Betrachten wir zunächst einen Conductor A von beliebiger Gestalt; er sei geladen mit einer Elektricitätsmenge $+ M_1$ und vollständig eingeschlossen von einem anderen Conductor B, der in Verbindung mit der Erde gesetzt ist. Wenn Gleichgewicht herrscht, wird dieser Conductor auf seiner inneren Oberfläche eine gewisse Lage entgegengesetzter Elektricität $- M_2$ besitzen; man soll zeigen, dass $M_2 = M_1$ ist. Das Potential in der ganzen Ausdehnung des Conductors A ist constant; dieses Potential V_1 ist die Differenz der Potentiale der beiden Schichten $+ M_1$ und $- M_2$; jedes der Potentiale der beiden Schichten, separat betrachtet, ist im allgemeinen nicht constant, d. h. die Elektricitätsschichte $+ M_1$ wird nicht für sich selbst im Gleichgewichte sein und die Elektricitätsschichte $- M_2$ würde, wenn sie ihre Vertheilung auf einem Conductor von derselben Oberfläche beibehält, auch nicht mehr im Gleichgewichte sein. In allen Punkten des Leiters B ist das Potential ebenfalls constant und der Null gleich und dies ist der Fall, wie auch immer dieser Leiter gestaltet ist; es muss daher das Potential der beiden Massen $+ M_1$ und $- M_2$, strenge genommen, in allen äußeren Punkten Null sein. Für eine große Distanz ist dieses Potential, wie leicht zu ersehen ist:

$$\frac{M_1}{D} - \frac{M_2}{D},$$

und da es Null ist, müssen die beiden Elektricitätsmengen M_1 und M_2 gleich sein. Die beiden Elektricitätsschichten $+M_1$ und $-M_2$ üben dann in jedem äußeren Punkte gleiche und entgegengesetzte Wirkungen aus, woraus folgt, dass ihre Niveauflächen identisch sind.

Man kann ebenso zeigen, dass, wenn im Innern des leitenden Körpers B irgendwelche Elektricitätsmengen in willkürlicher Weise auf gut- oder schlechtleitenden Körpern vertheilt sich vorfinden, dieses letzterwiesene Theorem seine Giltigkeit behält.

Die in diesem Artikel gegebenen Sätze werden später in aller Strenge erwiesen werden.

Wenn somit ein elektrisierter Körper oder ein System von elektrisierten Körpern vollständig von einem Conductor umgeben ist, der sich in leitender Verbindung mit der Erde befindet, so erhält die innere Oberfläche dieses Leiters eine Elektricitätsschichte, welche entgegengesetzt gleich der algebraischen Summe aller Elektricitätsmassen ist, welche der Leiter umschließt, und die Gesammtwirkung auf einen beliebigen äußeren Punkt ist Null.

Wenn der Conductor B nicht vollständig geschlossen ist, wird er wie eine Art Schirm auf Punkte wirken, die hinter ihm gelegen sind; das Potential wird noch Null sein oder sich wenigstens in einer gewissen Gegend sehr langsam verändern, so dass dort die elektrische Wirkung sehr schwach sein wird. Dies ist der Sinn, den man der experimentell erwiesenen Thatsache, dass elektrische Wirkungen sich jenseits eines Leiters, der mit der Erde in Verbindung gesetzt ist, nicht äußern, unterstellen muss.

Heben wir nun die Verbindung des Conductors B mit dem Erdboden auf; dieser Leiter sei immer als geschlossen vorausgesetzt; er wird auf seiner Außenfläche eine Elektricitätsmenge erhalten können, als ob er voll wäre oder als ob er keinen elektrisierten Körper umschließen würde. In der That bringen wir auf diesen Körper eine reguläre Elektricitätsschichte M; das Potential V dieser Schichte in irgendeinem Punkte des Leiters

B oder des Raumes, welchen er umschließt, ist constant. Das neue Potential des Körpers A ist übergegangen in $V_1 + V$; es ist ebenfalls constant und demzufolge herrscht Gleichgewicht.

Wenn man im Speciellen $M = + M_2$ hat, wird die gesammte freie Elektricitätsmenge des Conductors B Null sein und das Problem wird dem Falle entsprechen, wo der Conductor B anfänglich im neutralen Zustande sich befindet und isoliert ist und man in das Innere einen elektrisierten Körper A einführt. Wenn also ein Körper A oder ein System von elektrisierten Körpern, die wie immer vertheilt sind, vollständig von einem geschlossenen Leiter, der sich anfänglich im neutralen Zustande befindet, umgeben werden, so wird der Leiter auf seiner inneren Oberfläche eine Elektricitätsschichte gleich der algebraischen Summe der eingeschlossenen Elektricitätsmengen, auf seiner äußeren Oberfläche eine ebenso große Elektricitätsschichte erhalten; die Vertheilung der Elektricität auf dieser äußeren Schichte ist regelmäßig, jene auf der inneren Seite hängt aber von der Anordnung der influencierenden elektrischen Massen ab.

163. Man erhält daraus noch folgendes wichtige Theorem:

Man kann einen elektrisierten Körper oder ein System von elektrisierten Körpern durch eine elektrische Schichte ersetzen, welche regelmäßig auf einer Niveaufläche vertheilt ist, welch' letztere alle die elektrisierten Körper umschließt; die Elektricitätsmenge dieser Schichte ist gleich der algebraischen Summe der Elektricitätsmengen, welche alle betrachteten Körper besitzen.

Sei B eine Niveaufläche, welche die vorausgesetzten Körper umschließt. Betrachten wir einen unendlich dünnen Conductor, der die Gestalt dieser Oberfläche habe und breiten wir auf diesem Conductor eine regelmäßige Elektricitätsschichte aus, deren gesammte Menge $- M$ entgegengesetzt gleich der algebraischen Summe $+ M$ wäre, welche die ins Auge gefassten Körper besitzen; es wird dann Gleichgewicht sein. In der That, das innere Potential V_B der Elektricitätsmenge $- M$ ist constant, da die Vertheilung der Elektricität in dieser Schichte regulär ist; da das Potential ursprünglich auf jedem der Con-

ductoren, der zu dem vorausgesetzten Systeme gehört, constant ist, ist es auch dann noch constant; es besteht daher im ganzen Innern Gleichgewicht.

Die Elektricitätsschichte —M ist auch im Gleichgewichte, denn in jedem Punkte P dieser Schichte ist die Wirkung der inneren Körper normal (senkrecht) zur Oberfläche, da B eine Niveaufläche ist und die Wirkung der Elektricitätsschichte ist selbst auch normal, da die Elektricität in dieser Schichte regelmäßig vertheilt ist; es kann daher kein Wechsel der Vertheilung stattfinden und es herrscht Gleichgewicht.

Diese Schichte —M ist keine andere als jene, welche auf einem Conductor hervorgebracht würde, der in Verbindung mit der Erde steht und auf seiner Innenseite durch die Oberfläche B begrenzt ist; die Wirkung der beiden Elektricitätsmengen +M und —M auf irgendeinen außerhalb der Oberfläche B gelegenen Punkt ist daher Null, d. h. diese beiden Mengen haben in jedem Punkte gleiche aber entgegengesetzt bezeichnete Wirkungen. Daraus folgt, dass eine Elektricitätsmenge M, welche regelmäßig auf der Niveaufläche B vertheilt ist, außerhalb dieser Oberfläche in jedem Punkte eine Wirkung hervorruft, welche jener gleichkommt, die von allen den betrachteten Körpern herrührt.

164. Elektrische Condensation. Wir können nun das Phänomen der Condensation genauer erörtern.

Eine Elektricitätsquelle, von welcher Beschaffenheit sie auch immer sei, ist ein Apparat, mittelst dessen man auf zwei Conductoren eine gewisse Potentialdifferenz herbeiführen kann. Wenn der eine dieser Conductoren in Verbindung mit der Erde gesetzt ist, kann die Elektricitätsquelle auf dem anderen Conductor ein bestimmtes Potential herstellen. Wenn die Elektricität, welche die Maschine liefert, nach Verhältnis ihrer Erzeugung aufgewendet wird, ist der Absatz continuierlich; wenn aber diese Elektricität keinen anderen Ausweg als auf einen isolierten Conductor findet, so wird die Erzeugung der Elektricität überhaupt aufhören, wenn das Potential einen gewissen Wert erreicht haben wird oder es wird wenigstens, da die Verluste auf keine Weise vollständig zu vermeiden sind, die Elektricitätserzeugung sich einzig und allein auf diejenige

Elektricitätsmenge reducieren, welche genügt, um das Potential zu erhalten, um also die durch die Luft und die Stützen erzeugten Verluste zu ersetzen.

Andererseits wird, wenn die Elektricität, welche die Maschine erzeugt, in irgendeiner Weise continuierlich abgegeben wird, z. B. durch eine Verbindung des Conductors mit der Erde, die während der Zeiteinheit gelieferte Elektricitätsmenge oder der Absatz von den Dimensionen und der Constructionsart des Apparates abhängen. Eine Elektricitätsquelle kann daher durch zwei Elemente, das Potentialmaximum und das Absatzmaximum bestimmt werden.

165. Betrachten wir nun einen isolierten Conductor A, der mit der Elektricitätsquelle in Verbindung steht: die Grenzladung dieses Conductors wird erreicht sein, wenn er das Potentialmaximum V der Elektricitätsquelle erlangt hat. Wenn die Verbindung durch einen hinlänglich langen und dünnen Draht hergestellt ist, so dass die Vertheilung der Elektricität auf dem Conductor eine regelmäßige ist, so wird die Ladung M, welche er annehmen wird, ausgedrückt sein durch:

$$M = C.V,$$

wo C die Capacität des Conductors bezeichnet.

Bringt man in die Nähe dieses Conductors A einen zweiten Conductor B, so wird durch die eingetretene Influenzwirkung das Potential auf dem ersten Conductor vermindert oder die elektrische Capacität des letzteren vergrößert; sie wird dann C_1 werden. Das Gleichgewicht besteht nicht mehr und der Conductor A empfängt neuerdings von der Elektricitätsquelle Elektricität, bis seine Ladung:

$$M_1 = C_1.V$$

wird; der Apparat ist dann ein wirklicher Condensator, dessen Collector A ist.

Die beiden letzten Gleichungen geben:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{C_1}{C}.$$

Man ersieht daraus, dass die condensierende Kraft eines Condensators, d. h. das Verhältnis der Ladungen,

welche der Collector annimmt, wenn der Condensator vorhanden ist oder nicht, gleich dem Verhältnisse der elektrischen Capacitäten des Collectors in den beiden Fällen ist.

In dem Falle einer Kugel, welche von einer isolierten concentrischen Kugelschale umgeben ist, einem Falle, den wir oben (161) betrachtet haben, erhält man somit für die condensierende Kraft den Ausdruck:

$$\frac{R_2}{R_2 - R_1 \frac{R_2' - R_2}{R_2'}}.$$

Wenn der Condensator, anstatt isoliert zu sein, mit dem Erdboden in Verbindung gesetzt wird, werden die Phänomene der Influenz bedeutender werden und die condensierende Kraft sich in gleicher Weise vergrößern.

Für dasselbe Beispiel einer Kugel, welche von einem sphärischen Conductor eingeschlossen ist, wird die condensierende Kraft dann:

$$\frac{R_2}{R_2' - R_1}.$$

166. Man kann noch bemerken, dass, wenn der Collector A, anstatt in beständiger Verbindung mit der Elektricitätsquelle zu sein, vollständig geladen, hierauf isoliert und dann allein der influencierenden Wirkung des Condensators ausgesetzt wird, das Potential des Collectors, welches ursprünglich dem der Elektricitätsquelle V gleich war, bis auf einen anderen Wert V_1 vermindert wird, ohne dass seine Ladung M geändert werden wird. Das neue Potential genügt dann den Gleichungen:

$$M = CV = C_1 V_1,$$

woraus sich $\frac{C_1}{C} = \frac{V}{V_1}$ ergibt.

Die condensierende Kraft ist daher auch dem Verhältnisse der Potentiale gleich, welche eine und dieselbe elektrische Ladung dem Collector ertheilt, wenn er der gesammten Influenz entzogen wird und wenn er in Gegenwart des Condensators sich befindet. Diese drei Ausdrücke:

$$\mathfrak{F}=\frac{M_1}{M}=\frac{C_1}{C}=\frac{V}{V_1}$$

der condensierenden Kraft können als Grundsätze dienen, welche man bei den verschiedenen experimentellen Methoden im Auge zu behalten hat.

167. Formel von Green. Die allgemeinen Theoreme, welche wir nach kurzer Betrachtung aufgestellt haben, können in einer viel vollständigeren Weise mittelst einer Transformationsformel, welche von Georg Green(¹) gegeben wurde, abgeleitet werden.

Seien U und V zwei stetige und endliche Functionen von x, y, z. Setzen wir, wie im Vorhergehenden:

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

und betrachten das Integral:

$$\iiint U\Delta V\,dx\,dy\,dz,$$

welches sich über das ganze von einer convexen geschlossenen Oberfläche S (Fig. 91) eingehüllte Volumen erstreckt. Dieses Integral ist aus drei Gliedern von der Form:

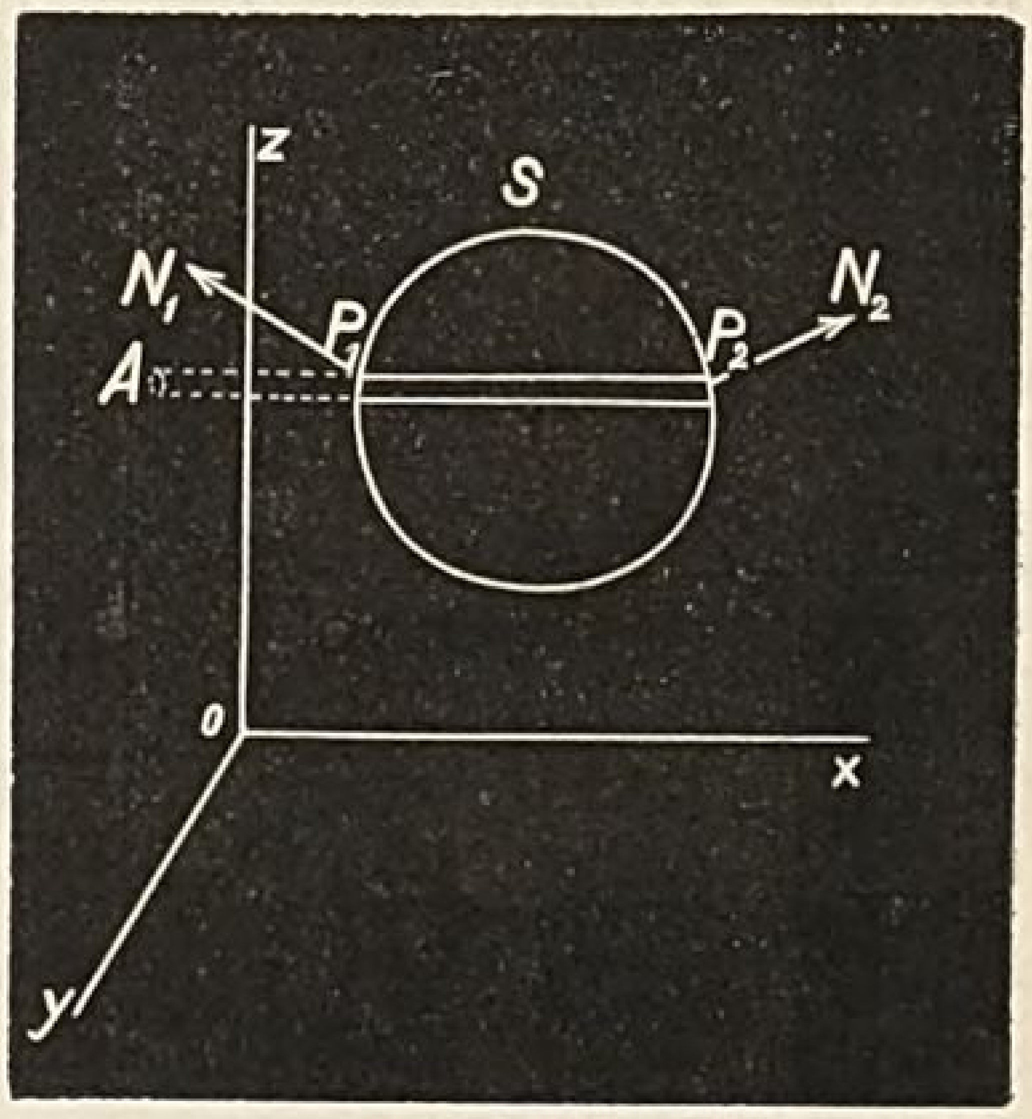


Fig. 91.

$$\iiint U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz=\iint dy\,dz\int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx$$

zusammengesetzt.

Im Integrale $\int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx$ bleiben die Coordinaten y und z constant und die Integrationsgrenzen sind die Abscissen x_1 und x_2 der beiden Punkte P_1 und P_2, in welchen eine zur X-Axe pa-

(¹) „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism" (§. 3), auch Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik; Bd. 29, 44 und 47.

rallele Gerade die Oberfläche S trifft. Man erhält daher durch theilweise Integration:

$$\int_{x_1}^{x_2} U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = -\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx$$

und demzufolge:

$$\int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \int\int\left[-\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2}\right] dz\, dy$$
$$- \int\int\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Das Product $dxdydz$ stellt ein Volumenelement dv vor und das Product $dydz$ ein Element der Oberfläche $d\omega$ genommen in der Ebene der YZ; man kann daher die vorstehende Gleichung unter der einfacheren Form schreiben:

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = \int\left[-\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2}\right] d\omega - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv.$$

Das Element $d\omega$ ist die Projection auf die Ebene YOZ der beiden Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der Oberfläche S, welche in den Punkten P_1 und P_2 gelegen sind. Wenn man $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Cosinusse der Winkel nennt, welche die Normalen P_1N_1, P_2N_2 zur Oberfläche in den Punkten P_1 und P_2 mit den Coordinatenaxen machen, wobei die Normale in jedem Punkte von der das Volumen begrenzenden Oberfläche nach außen gezogen ist, so hat man:

$$d\omega = -\alpha_1\, d\sigma_1 = +\alpha_2\, d\sigma_2$$

und deshalb:

$$\int\left[-\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2}\right] d\omega$$
$$= \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} \alpha_1 d\sigma_1 + \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} \alpha_2 d\sigma_2.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist das Integral

$$\int U \frac{\partial V}{\partial x} \alpha d\sigma$$

ausgedehnt über die ganze Oberfläche S; man hat daher:

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = \int U\alpha \frac{\partial V}{\partial x} d\sigma - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv.$$

Die beiden anderen Theile des vorausgesetzten Integrales geben analoge Gleichungen und indem man sie gliedweise addiert, erhält man:

$$\int U \Delta V dv = \int U \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\sigma$$
$$- \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv.$$

Sei ds ein Element PP′ der zur Oberfläche S gezeichneten Normale, welche durch den Punkt P nach außen gezogen ist; die Cosinus α, β, γ der Winkel, welche die Normale mit den Axen macht, sind in folgender Weise ausgedrückt:

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \beta = \frac{dy}{ds}, \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Man erhält daraus:

$$\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{dV}{ds},$$

woraus sich schließlich ergibt:

$$\int U \Delta V dv = \int U \frac{dV}{ds} d\sigma - \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv;$$

in dieser Formel erstreckt sich das Doppelintegral auf die Oberfläche S und die beiden dreifachen Integrale auf das von dieser Oberfläche eingeschlossene Volumen. Dies ist die Formel von Green.

Der Einfachheit halber haben wir vorausgesetzt, dass das Volumen durch eine convexe Oberfläche begrenzt sei; es ist aber leicht zu zeigen, dass dieselbe Formel angewendet werden kann, wenn die Oberfläche irgendwie gestaltet ist, nur muss dieselbe geschlossen sein.

168. Wir setzen im Nachfolgenden voraus, dass V das Potential elektrischer Massen bezeichne, oder ganz allgemein das Potential irgend eines Agens, dessen Wirkung nach dem Newtonschen Gesetze erfolgt.

Wenn man in der Formel von Green die Buchstaben U und V vertauscht und die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert, erhält man:

$$\int U\Delta V dv - \int V\Delta U dv = \int U \frac{dV}{ds} d\sigma - \int V \frac{dU}{ds} d\sigma.$$

Stellen wir uns nun vor, V sei ein Potential, U der reciproke Abstand $\frac{1}{r}$ von einem festen Punkt C im Raume, so erhält man:

1. wenn dieser Punkt C außerhalb des Raumes v liegt:

$$\int \frac{\Delta V}{r} dv = \int \frac{1}{r} \frac{dV}{ds} d\sigma - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\sigma \ldots . (A)$$

da, wie man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann,

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

ist.

2. Bedeutet r den Abstand von einem innerhalb des Integrationsraumes gelegenen Punkt C, so wird für diesen Punkt $\frac{1}{r}$ unendlich groß. Legt man aber um den Punkt C eine Kugel σ_1, so kann die Gleichung A auf den Raum in Anwendung gebracht werden, welcher durch die Flächen σ und σ_1 begrenzt wird und man hat, wenn man unter $d\nu$ das Element der Kugelnormale versteht, die in demselben Sinne wie früher gerechnet wird:

$$\int \frac{\Delta V}{r} dv = \int \frac{1}{r} \frac{dV}{ds} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{dV}{d\nu} d\sigma_1$$

$$- \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\sigma + \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\nu} d\sigma_1.$$

Nun lassen wir den Radius der Kugel immer kleiner und kleiner werden; es ist der Grenzwert von

$$\int \frac{1}{r} \frac{dV}{d\nu} d\sigma_1$$

der Null gleich, weil $d\sigma_1$ den Factor r^2 und deshalb $\frac{d\sigma_1}{r}$ den Factor r hat; das zweite auf die Kugel bezügliche Integral hat den Grenzwert — $4\pi V_c$, worin V_c den Wert des Potentiales V im Punkte C bedeutet. Es ist nämlich

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\nu} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2};$$

ferner ist $d\sigma_1 = r^2 d\omega$, wenn man mit $d\omega$ den räumlichen Winkel bezeichnet; da V bei der Abnahme der Kugel sich dem Werte V_c nähert, so hat man

$$\lim \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\nu} d\sigma_1 = -4\pi V_c.$$

Wenn also der Punkt C innerhalb des Raumes v liegt, hat man:

$$\int \frac{\Delta V}{r} dv = \int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds} d\sigma - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\sigma - 4\pi V_c \ldots . (B)$$

Die Formeln (A) und (B) sind allgemein giltig, wo immer auch die elektrischen Massen sich befinden mögen.

Wir ziehen aus diesen Gleichungen einige Schlüsse:

1. Liegen alle Elektricitätsmengen innerhalb der Oberfläche σ, so geht das Raumintegral über in

$$\int \frac{\Delta V}{r} dv = -4\pi \int \frac{\rho dv}{r} = -4\pi V_c,$$

wobei V_c das Potential der Elektricitätsmengen in C bedeutet. Liegt C außerhalb des Integrationsraumes, so erhält man aus (A) die Formel:

$$-4\pi V_c = \int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds} d\sigma - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\sigma \ldots . (A').$$

Ist hingegen der Punkt C innerhalb des Raumes v gelegen, dann erhält man aus (B)

$$\int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds}d\sigma = \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\sigma \dots (B').$$

2. Liegen die Elektricitätsmengen, welche das Potential V liefern, in einem schalenförmigen Raume, der durch zwei Flächen Σ und Σ' begrenzt wird, von welchen die eine die andere umschließt, so hat man, wenn der Punkt C außerhalb der elektrischen Massen liegt, wenn wir ferner die zu den Flächen Σ und Σ' gezeichneten Normalen s und s' immer aus dem Raume herausgehend betrachten:

$$-4\pi V_c = \int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds} d\Sigma + \int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds'} d\Sigma' -$$

$$-\int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\Sigma - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds'} d\Sigma' \dots (A'').$$

Wenn der Punkt C innerhalb des schalenförmigen Raumes gelegen ist, so erhält man:

$$\int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds} d\Sigma + \int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds'} d\Sigma' =$$

$$= \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\Sigma + \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds'} d\Sigma' \dots (B'').$$

3. Liegen endlich alle elektrischen Massen außerhalb des Raumes v, so kann man diesen Fall auf den zweiten Fall zurückführen, indem man für Σ' eine Fläche wählt, am einfachsten eine Kugelfläche mit unendlich großem Radius, dann gilt für diese Oberfläche

$$\int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds'} d\Sigma' = 0 \text{ und } \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds'} d\Sigma' = 0$$

und wir haben, wenn der Punkt C innerhalb des Raumes v liegt

$$-4\pi V_c = \int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds} d\Sigma - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\Sigma \dots (A''')$$

und wenn der Punkt C außerhalb dieses Raumes liegt,

$$\int \frac{1}{r} \frac{dV}{ds} d\,\Sigma = \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\Sigma \ldots . \text{ (B''')}$$

Der Fall, dass die Massen zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb des Raumes liegen, lässt sich durch Combination der obenstehenden Gleichungen erledigen.

Wir werden im Nachfolgenden zu wiederholtenmalen von diesen eben gewonnenen Resultaten Gebrauch machen. In den folgenden Artikeln wollen wir aus dem Green'schen Theoreme einige wichtige Sätze der Potentialtheorie deducieren.

169. Setzt man in der Green'schen Formel $U = 1$, so reduciert sie sich auf:

$$\int \Delta V . dv = \int \frac{dV}{ds} d\sigma ;$$

ersetzt man ΔV durch seinen Wert $- 4\pi\rho$, so erhält man:

$$-4\pi \int \rho dv = \int \frac{dV}{ds} d\sigma .$$

Das Integral $\int \rho dv$ ist nichts anderes als die Summe M der wirksamen Massen, welche in dem betrachteten Volumen gelegen sind; man hat daher die Beziehung:

$$\int \frac{dV}{ds} d\sigma = - 4\pi . M.$$

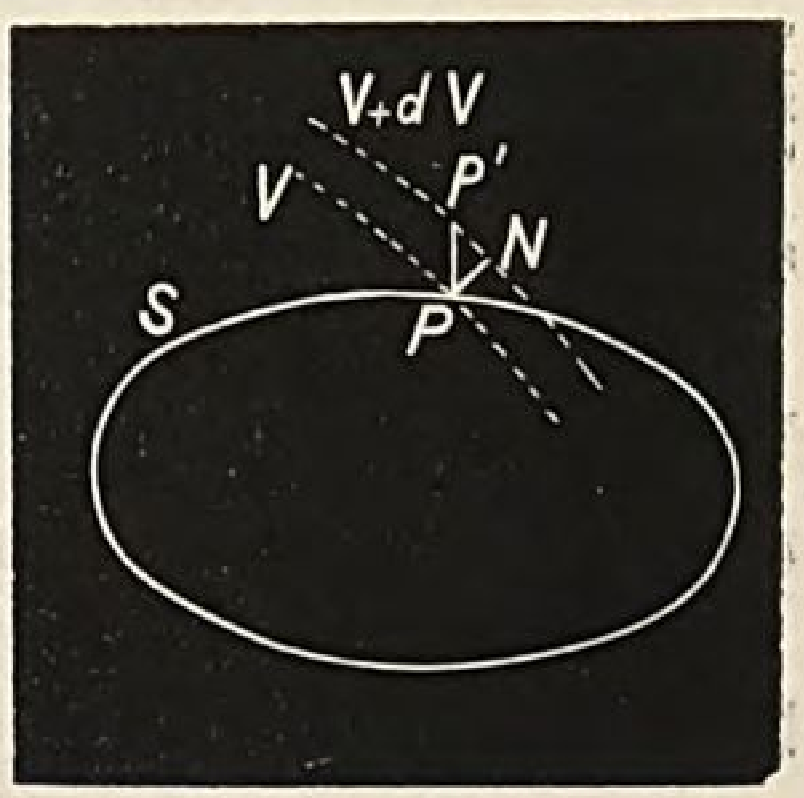


Fig. 92.

Man kann dieser Gleichung auch in folgender Weise Ausdruck verleihen:

Wir haben mit ds ein Element der zur Oberfläche S nach außen gezogenen Normale bezeichnet; betrachten wir die beiden Niveauflächen V und $V + dV$, welche durch die Punkte P und P' (Fig. 92) gehen; nennen wir dn ein Element PN der zur Oberfläche V gezogenen Normale, welches zwischen den beiden Niveauflächen gelegen ist und i den Winkel

NPP′ der beiden Normalen. In dem rechtwinkligen Dreiecke PNP′ hat man:

$$dn = ds.\cos i,$$

woraus man erhält:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn}.\cos i = - F.\cos i,$$

wenn F die Kraft bezeichnet, die im Punkte P herrscht und deren Richtung mit jener der zur Niveaufläche gezeichneten Normalen zusammenfällt; Fcosi ist die Projection dieser Kraft auf die Oberflächennormale PP′. Das vorige Integral nimmt also die Form an:

$$\int F.\cos i.d\sigma = 4\pi M,$$

woraus man das folgende Theorem erschließt:

Die Summe der normalen Componenten der Kräfte, welche in den verschiedenen Elementen einer geschlossenen Oberfläche wirken, ist gleich der wirkenden Masse, welche von dieser Oberfläche eingeschlossen wird, multipliciert mit dem constanten Factor 4π.

Wir haben bereits früher aus den Betrachtungen, die wir über den Kräftefluss angestellt haben, dieses Theorem auf anderem Wege abgeleitet.

Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass umgekehrt aus dem letzten Theoreme die allgemeine Formel von Green auf leichtem Wege erschlossen werden kann. (¹)

Aus dem in diesem §. aufgestellten Theoreme werden im Nachfolgenden einige wichtige Eigenschaften der Potentialfunction deduciert werden.

170. Theorem. Außerhalb der wirkenden Massen kann das Potential weder einen Maximalwert noch einen Minimalwert haben.

Würde nämlich außerhalb der wirkenden Massen ein Maximum oder Minimum des Potentiales stattfinden, so könnte man um

(¹) Dieser Weg wurde z. B. von Mascart und Joubert in ihren „Leçons sur l'électricité et le magnétisme." Tome I., pg. 26. betreten.

den betreffenden Punkt und zwar unendlich nahe demselben eine geschlossene Oberfläche beschreiben; es müsste in jedem Punkte dieser Oberfläche das Potential einen kleineren oder größeren Wert als in jenem Punkte haben; es müsste dann die Normalkraft $-\frac{dV}{ds}$ für die Oberfläche überall negativ oder positiv sein, somit das Integral

$$\int \frac{dV}{ds} d\sigma$$

einen endlichen Wert haben, der von Null verschieden ist; dies ist aber nicht möglich, weil die betrachtete, um den Punkt beschriebene Oberfläche keine wirksame Masse einschließt und deshalb nach dem obigen Theoreme

$$\int \frac{dV}{ds} d\sigma = 0$$

sein muss.

Umgekehrt überall dort, wo das Potential ein Maximum oder Minimum hat, befindet sich Elektricität (allgemein ein wirksames Agens). Denn geht man von einem Maximalpunkte A aus, so nimmt das Potential in allen Richtungen ab, die benachbarten Niveauflächen sind nothwendigerweise geschlossen und der Kraftfluss, welcher etwa eine sehr kleine Kugelfläche S, die den Punkt A einschließt, durchsetzt, hat einen endlichen Wert Q. Es ist daher im Innern dieser Oberfläche eine positive Elektricitätsmenge $\frac{Q}{4\pi}$. Ebenso ist eine Minimalstelle des Potentiales ein Kraftabsorptionscentrum oder es befindet sich dort eine entsprechende negative Elektricitätsmenge.

Wir werden an einer späteren Stelle ausführlicher über die Emission und Absorption der Kräfte durch elektrische Massen sprechen.

171. Theorem. Die Differenz der Kräfte, welche in zwei correspondierenden Elementen zweier Niveauflächen wirksam sind, ist gleich der wirkenden Masse, die in dem orthogonalen Canale zwischen den beiden Elementen enthalten ist multipliciert mit dem constanten Factor 4π.

Seien S_1 und S_2 (Fig. 93) zwei Niveauflächen; nehmen wir auf der ersten ein Element $d\sigma_1$ und zeichnen in jedem Punkte des Umfanges dieses Elementes eine Curve, welche orthogonal auf alle Niveauflächen ist, die zwischen S_1 und S_2 sich befinden, so wird der so gebildete Canal, welcher den Namen einer Kraftröhre führt, auf der Oberfläche S_2 ein dem $d\sigma_1$ entsprechendes (correspondierendes) Element $d\sigma_2$ herausschneiden.

Wenden wir das vorhergehende Theorem auf das Volumen an, welches von dem Canale und den beiden denselben begrenzenden Elementen gebildet wird; es muss das Integral auf die gesammte Oberfläche des Canals ausgedehnt werden. In jedem Punkte der Seitenoberfläche ist die Kraft tangential zur orthogonalen Curve gerichtet, ihre Normalcomponente ist daher Null; das Integral reduciert sich daher nur auf jene Glieder, welche sich auf die beiden Grundflächen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ beziehen.

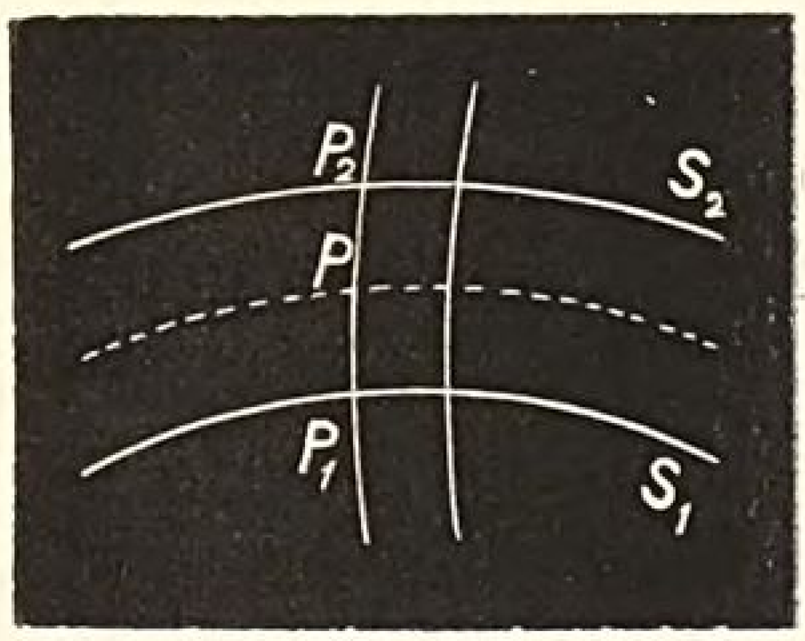


Fig. 93.

Wenn man die Normalen im Sinne P_1P_2 zieht, wird die im §. 169 aufgestellte Relation

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 = -4\pi m,$$

wobei m die in dem orthogonalen Canale eingeschlossene wirksame Masse ist.

Wenn zwischen den beiden Niveauflächen keine irgendwie wirksame Masse vorhanden ist, hat man:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 \text{ (Theorem von Chasles)}$$

und es sind demzufolge die in den correspondierenden Elementen wirkenden Kräfte einander gleich.

Bezeichnet man $-\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 = F_1$ und $-\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 = F_2$, so stellen F_1 und F_2 die in den Punkten P_1 und P_2 (vorige Figur) wirkenden Kräfte vor. Man erhält daher

$$F_1 d\sigma_1 = F_2 d\sigma_2$$

und man kann sagen:

Der Kraftfluss ist beim Ein- und Austritte aus dem Canal derselbe.

Es ist daher der Kraftfluß in irgend einem Querschnitte eines orthogonalen Canales derselbe. Dieser Kraftfluss erhält sich daher, ebenso wie es mit der Strömung einer Flüssigkeit der Fall sein wird, die in Bewegung sich befindet und deren Geschwindigkeit in jedem Punkte gleich und parallel der Kraft sein wird. Die obige Formel sagt auch aus, dass die Kraft in jedem Punkte der Kraftröhre dem Querschnitte der Röhre in dem betreffenden Punkte umgekehrt proportional ist.

172. Theorem. Die Kraft, welche in einem Punkte herrscht, der einer elektrischen Schichte unendlich naheliegt, ist gleich der elektrischen Dichte auf der Oberfläche multipliciert mit 4π.

In irgendeinem elektrisierten Systeme, das sich im Gleichgewichte befindet, ist die Oberfläche S eines Conductors eine Niveaufläche und auf dieser Oberfläche ist eine elektrische Schichte ausgebreitet. Nehmen wir ein Element $d\sigma$ dieser Oberfläche und betrachten wir zwei unendlich benachbarte Oberflächen, nämlich eine äußere Niveaufläche S_2 in der Nachbarschaft des Elementes $d\sigma$ und eine innere Fläche S_1; durch jeden Punkt des Umfanges des Elementes $d\sigma$ ziehen wir nach außen eine zu den zwischen S und S_2 gezogenen Niveauflächen orthogonale Linie und verlängern diese Linie willkürlich in den Innenraum, bis wir die Oberfläche S_1 erreichen; wir bilden auf diese Weise einen Canal, der aus den Oberflächen S_2 und S_1 die Elemente $d\sigma_2$ und $d\sigma_1$ herausschneidet. Wenden wir das Theorem im §. 169 auf diesen Canal an; das Integral ist hiebei auszudehnen auf die den Canal einhüllende Oberfläche.

Für die ganze, innerhalb des Conductors gelegene Partie sind die Elemente des Integrals Null, da V constant ist. Die Normale, welche man in einem Punkte der äußeren Partie zur seitlichen Begrenzung des Canales zeichnen kann, ist tangentiell zur Niveaufläche gerichtet, welche durch diesen

Punkt geht; rückt man auf dieser Normalen vor, so hat man $\frac{dV}{ds} = 0$, und die Elemente des Integrales, welche sich auf diesen Oberflächentheil des Canales beziehen, sind wieder Null. Das Integral reduciert sich daher auf das Glied $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2$, herrührend von der äußeren Basis $d\sigma_2$. Andererseits ist die in dem Canale enthaltene Elektricitätsmenge $\mu d\sigma$, wobei μ die elektrische Dichte auf dem Elemente $d\sigma$ ist.

Die früher (171) aufgestellte Gleichung wird daher:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = -4\pi\mu d\sigma$$

oder

$$-\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 \frac{d\sigma_2}{d\sigma} = 4\pi\mu$$

Setzt man voraus, dass die Oberfläche S_2 sich immer mehr und mehr der Oberfläche S nähert, so hat das Verhältnis $\frac{d\sigma_2}{d\sigma}$ die Einheit zur Grenze, der Ausdruck $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2$ stellt die Derivierte des Potentiales in einem Punkte der Oberfläche S dar und die vorhergehende Gleichung reduciert sich auf

$$-\left(\frac{dV}{dn}\right) = 4\pi\mu = F.$$

Wir haben schon früher direct dieses von Coulomb herrührende Theorem erwiesen (58).

173. Elektrostatischer Druck. Die Elektricität nimmt auf der Oberfläche des Conductors eine sehr dünne Schichte ein, deren Dicke man auf dem Wege des Experimentes nicht bestimmen zu können scheint, die aber nothwendigerweise endlich ist. Es ist wahrscheinlich, dass diese Schichte von der Oberfläche des Conductors selbst begrenzt wird und dass sie einen Theil des umgebenden dielektrischen Mediums einnimmt.

Sei AB (Fig. 94) die Dicke dieser Schichte. Die Kraft ist in A auf der inneren Oberfläche S_1 Null und von B auf der äußeren Oberfläche S_2 ausgehend hat sie den Wert $F = 4\pi\mu$. Im Zwischenraume variiert die Kraft daher von 0 bis F nach

einem unbekannten Gesetze. Sei ρ die Dichte der Schichte in einem Punkte M und V das Potential. Die Kraft in diesem Punkte ist normal zu einer zwischen S_1 und S_2 liegenden Niveaufläche und hat den Wert $-\frac{dV}{dn}$. Bezeichnen wir mit *e* die Dicke AB. Was man Oberflächendichte nennt, stellt die Elektricitätsmenge dar, die sich in der Schichte *e* auf der Oberflächeneinheit befindet, man hat daher:

$$\mu = \int_0^e \rho dn.$$

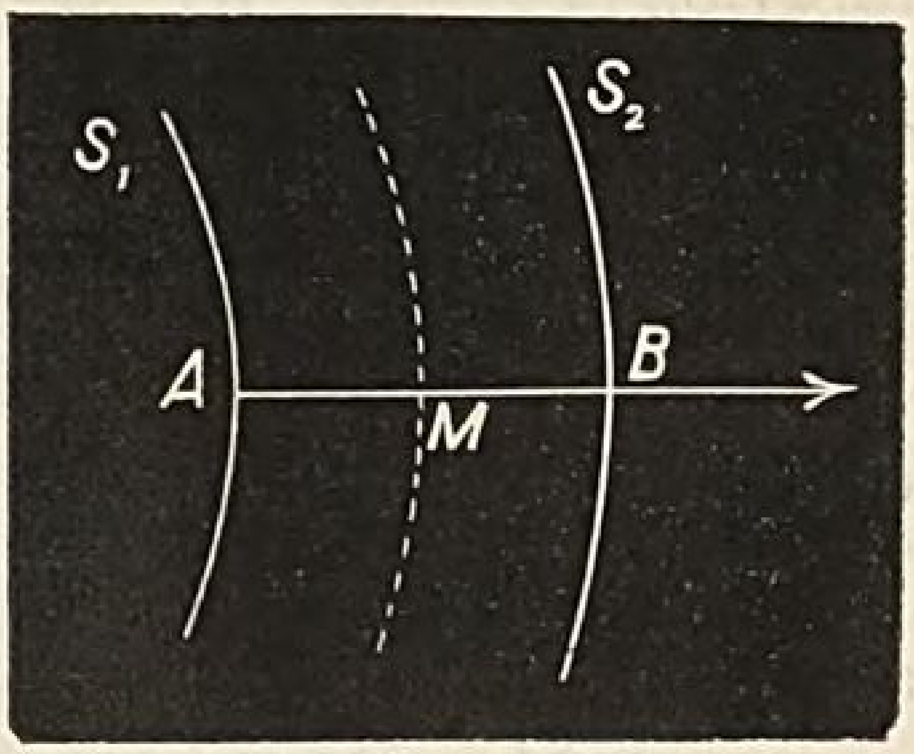


Fig. 94.

Nehmen wir drei aufeinander rechtwinklige Axen, von denen eine die Richtung der zur Niveaufläche in M construierten Normalen, d. h. der Normalen zu den Oberflächen S_1 und S_2 habe, während die beiden andern (X- und Y-) Axen in der Tangentialebene zu dieser Niveaufläche liegen.

Die zweiten Derivierten $\frac{d^2V}{dx^2}$ und $\frac{d^2V}{dy^2}$ sind Null, die Dichte wird ausgedrückt durch

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{d^2V}{dn^2}.$$

Die gesammte Kraft, welche auf die elektrische Schichte μdS eines Oberflächenelementes wirkt, ist daher, wenn man mit p die Kraft auf die Oberflächeneinheit bezeichnet:

$$pdS = \int_0^e \rho dS dn \left(-\frac{dV}{dn}\right) = \frac{dS}{4\pi}\int_0^e \frac{d^2V}{dn^2}\frac{dV}{dn}dn = \frac{dS}{8\pi}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)^2\right]_A^B.$$

Da $\frac{dV}{dn}$ im Punkte A Null ist, so bleibt einfach:

$$p = \frac{1}{8\pi}F^2$$

oder, da $F = 4\pi\mu$ ist,

$$p = \frac{1}{8\pi}.16\pi^2\mu^2 = 2\pi\mu^2.$$

Es ist bemerkenswert, dass dieser Ausdruck strenge ohne eine andere Hypothese als die einer äußerst kleinen Dicke e erhalten werden kann, wie auch immer das Gesetz der Vertheilung längs der Normale lauten möge. ([1])

Es wird also die auf jeder Oberflächeneinheit ausgebreitete Elektricitätsmenge nach außen mit einer Kraft gleich $2\pi\mu^2$, also einer Kraft, die proportional dem Quadrate der Dichte ist, getrieben. Dieser elektrostatische Druck oder die elektrische Spannung wird durch den Widerstand des Dielektrikums im Gleichgewichte gehalten.

Sind die Leiter in der Luft, so hat diese Kraft die Wirkung, den atmosphärischen Druck an ihrer Oberfläche zu vermindern. Wäre der Luftdruck ursprünglich P per Einheit der Oberfläche auf dem im neutralen Zustande befindlichen Körper, so wird er nach der Elektrisierung des Conductors in jedem Punkte der Oberfläche desselben werden:

$$P - p = P - 2\pi\mu^2.$$

Eine isolierte Seifenblase wird also durch Elektrisierung ihr Volumen vergrößern und ihr ursprüngliches Volumen annehmen, wenn man sie in den neutralen Zustand versetzt. Van Marum hat z. B. beobachtet, dass ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon leichter wird und seine Steigkraft sich vergrößert, wenn man ihn elektrisiert.

Wenn die Dichte auf einem Conductor gleichförmig ist, so ist es auch mit dem elektrostatischen Drucke der Fall und da dieser in jedem Punkte normal ist, so erhält man eine Resultante Null.

Variiert die Dichte von Punkt zu Punkt, so kommt die Wirkung der elektrostatischen Drücke im allgemeinen jener einer einzigen Kraft und eines Drehzwillings gleich. Das in dieser Weise erhaltene Resultat ist offenbar identisch mit jenem, welches die directe Betrachtung der Wirkungen äußerer Massen auf die verschiedenen Elektricitätsmengen des Conductors, die man mit der ponderablen Materie fest verbunden annehmen würde, liefern würde.

([1]) Die hier gegebene elegante Ableitung der Formel für den elektrostatischen Druck findet sich in Mascart und Joubert, leçons etc. pg. 33.

174. Theorem. Die correspondierenden Elemente zweier Schichten, welche einander gegenüber gestellt sind, enthalten gleiche aber entgegengesetzt bezeichnete Elektricitätsmengen.

Betrachten wir zwei Conductoren A und B (Fig. 95), die elektrisiert und einander gegenübergestellt sind, derart, dass zwei Theile S_1 und S_2 ihrer Oberflächen in einem und demselben orthogonalen Canale enthalten seien, welch' letzterer zwischen den beiden auf S_1 und S_2 ausgebreiteten Elektricitätsschichten keine andere elektrische Masse enthält. Bezeichnen wir die Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$, welche einem unendlich kleinen orthogonalen Canale angehören, correspondierende Elemente der beiden Schichten; stellen wir uns ferner vor, es werde dieser Canal in irgendeiner Weise in das Innere der beiden Körper verlängert und an seinen beiden Enden geschlossen und wenden wir auf das so gebildete Volumen die im §. 169 angegebene Beziehung an, so werden alle Elemente des Integrales Null; da andererseits die Elektricitätsmenge, welche in dem Canale enthalten ist, $\mu_1 d\sigma_1 + \mu_2 d\sigma_2$ ist, wo μ_1 und μ_2 die elektrischen Dichten auf $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ bezeichnen, so reduciert sich dann die Gleichung auf

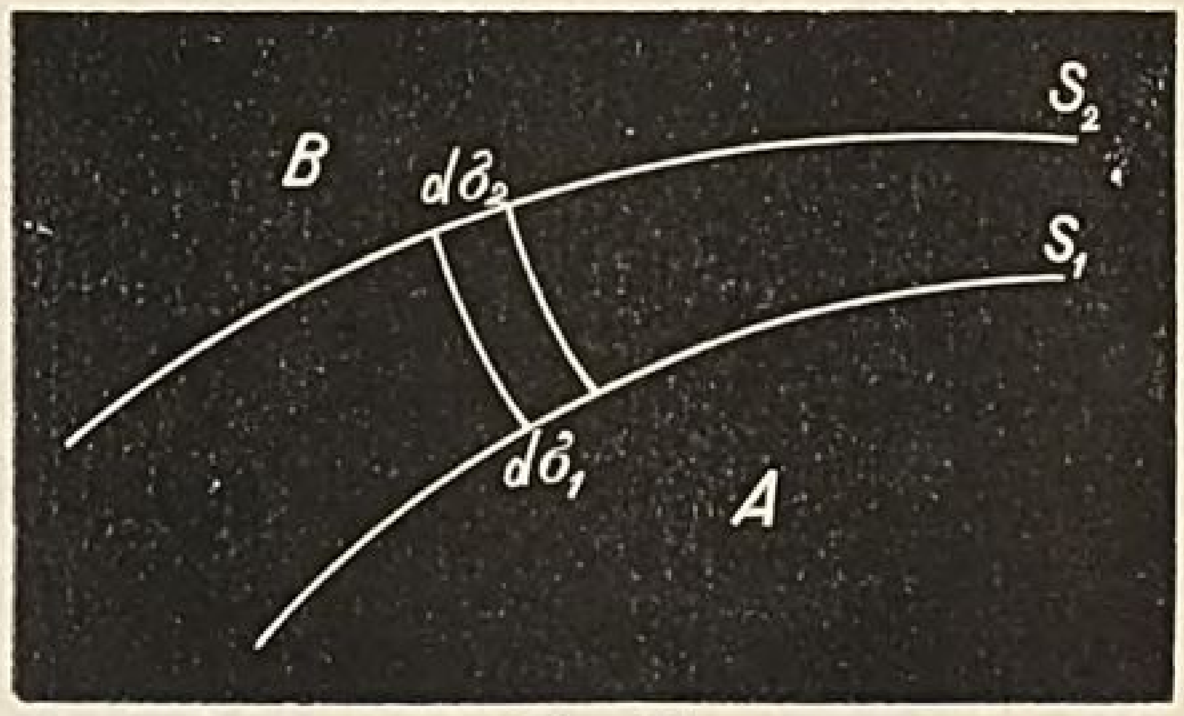


Fig. 95.

$$\mu_1 d\sigma_1 + \mu_2 d\sigma_2 = o.$$

175. Nehmen wir an, die beiden Flächen S_1 und S_2 seien einander sehr nahe, und nennen e die Entfernung der correspondierenden Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$. Diese beiden Elemente sind nahezu gleich und man hat näherungsweise $\mu_2 = -\mu_1$. Die Dichte ist außerdem gegeben durch die Relation:

$$\mu_1 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dn}\right);$$

wenn man aber von der Oberfläche S_1 zur Oberfläche S_2 fortschreitet, ist die Derivierte des Potentiales wenig von $\frac{V_2 - V_1}{e}$

verschieden; man hat dann die Näherungsformel:

$$\mu_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Die elektrische Dichte ändert sich daher in jedem Punkte im verkehrten Verhältnisse der Entfernung der beiden Oberflächen.

176. Emission und Absorption der Kräfte durch elektrische Massen. Der Kraftfluss, welcher sich in einer orthogonalen Röhre fortpflanzt, bleibt constant, solange diese Röhre keine wirkende Masse trifft; die Richtung der Fortpflanzung ist jene, in welcher sich das Potential verkleinert.

Trifft die Röhre eine Elektricitätsmenge m, so erhält der Kraftfluss an der Durchgangsstelle eine Zunahme $4\pi m$, die sich solange erhält, als die Röhre keinen neuen Massen begegnet. Befindet sich die Masse, welche getroffen wurde, auf der Oberfläche eines Leiters, so ist diese Masse von der Art, dass sie den Kraftfluss in der Röhre auf Null reduciert; man kann daher sagen: wenn man zwei correspondierende Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ mit den Dichten μ_1 und μ_2 ins Auge fasst, so sendet die positive Elektricität des Elementes $d\sigma_1$ einen Kraftfluss $4\pi\mu_1 d\sigma_1$ aus, welcher am anderen Ende der Röhre in der gleichen negativen Elektricitätsmenge, die sich im Elemente $d\sigma_2$ vorfindet, absorbiert wird.

Nach dem Ideengange von Faraday würde es keine unendlichen Kraftröhren geben; eine Kraftröhre, die einem elektrisierten Körper entspringt, würde immer irgendwohin auf einen anderen Körper treffen, so dass auf dem correspondierenden Elemente des letzteren eine gleiche Elektricitätsmenge vom entgegengesetzten Zeichen induciert wird (1). Nach dem könnte nirgends eine absolute und unabhängige, sei es positive oder negative Elektricitätsmenge existieren, welche am anderen Ende der Röhre nicht ihre complementäre Quantität hätte.

(1) Deshalb sollten eigentlich die erwähnten, die Kraftröhre seitlich begrenzenden Linien „Inductionslinien“ genannt werden. (Man sehe Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus; autorisierte deutsche Übersetzung von Dr. B. Weinstein, 1 Bd., pg. 97.)

Keine Kraftlinie kann zwischen zwei Punkten, die dieselbe Elektricität besitzen, bestehen. Es kann in gleicher Weise zwischen zwei Punkten von gleichem Potentiale keine Kraftlinie vorkommen. Endlich kann auf einem Conductor einem Punkte, der keine Elektricität besitzt, keine Kraftlinie entsprechen.

177. Theorem. Wenn in einem elektrisierten Systeme, das im Gleichgewichte ist, ein leitender Körper verschiedene Elektricitätsmengen einschließt, so ist die algebraische Summe der Elektricitätsmengen, welche im Innern und auf der inneren Oberfläche des Körpers liegen, Null.

Seien m, m', m''... die Elektricitätsmengen, welche innerhalb des einhüllenden leitenden Körpers A (Fig. 96) gelegen sind; auf der inneren Oberfläche des Körpers ist eine Schichte M_1 ausgebreitet und auf der äußeren Oberfläche eine Schichte M_2; auswärts können sich andere elektrische Massen befinden. Stellen wir uns eine Oberfläche S vor, die geschlossen ist und in dem Körper A selbst liegt, d. h. zwischen seiner inneren und äußeren Oberfläche ist und wenden wir auf das durch diese Fläche eingehüllte Volumen das Theorem des Paragraph 169 an. Das Potential des ganzen Systemes hat einen Wert, der im Körper A constant ist, die Derivierte $\frac{dV}{ds}$ ist in jedem Punkte der Fläche S gleich Null; man hat daher $M=0$ und demzufolge:

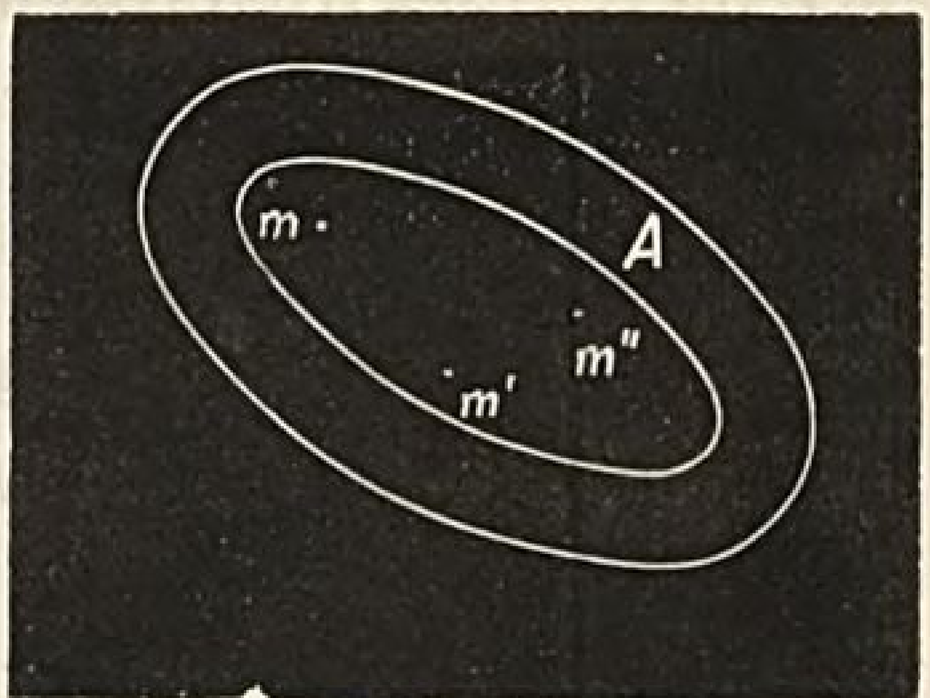


Fig. 96.

$$M_1+m+m'+m''+\ldots=0$$

Die Elektricitätsmengen m, m'... können schlecht leitenden Körpern angehören oder auch Elektricitätsschichten zugehören, die auf der Oberfläche von leitenden Körpern ausgebreitet sind, welche untereinander und von der inneren Oberfläche des Körpers A isoliert sind.

Wenn keine anderen elektrischen Massen vorhanden sind als jene, welche von dem Körper A eingeschlossen sind und

wenn dieser Körper ursprünglich im neutralen Zustande war, so wird er durch Influenz elektrisiert werden und die algebraische Summe der freien auf diesem Körper entwickelten Elektricitätsmengen wird Null sein; man hat dann:

$$M_2 = - M_1 = m + m' + m'' + \ldots$$

Die durch Influenz auf einem einhüllenden Leiter entwickelte Elektricitätsmenge ist gleich der influencierenden Elektricitätsmenge. Die äußere Elektricitätsschichte M_2 ist für sich selbst im Gleichgewichte; die Vertheilung der inneren Schichte $-M_1$ hängt aber von der Vertheilung der influencierenden Massen ab. Dies ist das Theorem von Faraday (90).

Die auf der inneren Oberfläche der Hülle durch Influenz erzeugte Elektricitätsschichte, welche nach dem eben Erörterten der algebraischen Summe der in der Höhlung befindlichen Massen gleich und entgegengesetzt ist, absorbiert den Kraftfluss, welcher den inneren Massen entströmt. Das System aus dieser Schichte und der von ihr eingeschlossenen Massen gibt in jedem Außenpunkte ein Potential Null und eine Kraft Null.

Eine auf die Außenseite der Hülle gebrachte Elektricitätsmenge nimmt eine von den inneren Massen unabhängige Vertheilung an; sie wird in der ganzen Ausdehnung der Hülle und den Höhlungen, welche diese umgibt, ein constantes Potential hervorrufen, welches sich zu dem schon bestehenden hinzufügt.

Eine solche Elektricitätsmenge übt daher keinen Einfluss auf das Gleichgewicht der inneren Massen aus.

178. Theorem. Wenn eine geschlossene Oberfläche keine wirksame Masse einschließt und wenn auf dieser Oberfläche das Potential constant ist, so ist das Potential im ganzen von der Fläche begrenzten Raume constant.

Nehmen wir in der Green'schen Formel an, die beiden Functionen U und V seien gleich und stellen ein und dasselbe Potential dar; man wird dann haben

$$\int V\Delta V\,dv = \int V\frac{dV}{ds}d\sigma - \int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv;$$

ersetzt man ΔV durch seinen Wert $-4\pi\rho$ und bemerkt, dass

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = F^2$$

ist, so erhält man:

$$\int F^2 dv = \int V\frac{dV}{ds}d\sigma + 4\pi\int \rho V dv.$$

Da die vorausgesetzte Oberfläche keine wirkende Masse einschließt, hat man $\rho = o$ in dem ganzen Volumen und demzufolge:

$$\int \rho V dv = o.$$

Andererseits hat das Potential auf der ganzen Oberfläche einen constanten Wert V_1 und man hat mit Rücksicht auf das in §. 169 angegebene Theorem

$$\int V\frac{dV}{ds}d\sigma = V_1\int\frac{dV}{ds}d\sigma = -V_1.4\pi M = o.$$

Daraus erhält man:

$$\int F^2 dv = o.$$

Dieses Integral kann nur dann Null sein, wenn die elektrische Kraft in allen Punkten Null ist, woraus folgt, dass das Potential im ganzen eingeschlossenen Raume constant ist.

Dieses Theorem kann übrigens ohne jede Rechnung erschlossen werden. Würde sich nämlich das Potential im Innern der Oberfläche ändern, so müsste es nothwendigerweise in einem Punkte innerhalb der umhüllenden Fläche einen Maximalwert oder Minimalwert erreichen und das ist unmöglich, weil in diesem Punkte keine Elektricität sich befindet. — Ist die betrachtete Oberfläche die Außenfläche eines Conductors, so sieht man, dass das Potential nicht bloß in der Masse des Conductors constant ist, was schon früher aus den allgemeinen

Gleichgewichtsbedingungen der Elektricität auf Leitern gefolgert wurde, sondern auch in den Höhlungen, welche der Conductor einschließen kann.

179. Theorem. Wenn eine Kugelfläche keine wirkende Masse umschließt, so ist das Potential im Centrum der Kugel gleich dem Mittelwerte des Potentiales in den verschiedenen Oberflächenpunkten.

Sei R der Kugelradius, m eine der wirkenden Massen, die sich in A in einer Entfernung d vom Centrum befindet und r die Entfernung des Oberflächenelementes $d\mathrm{S}$ vom Punkte A, so ist der Mittelwert des von der Masse m herrührenden Potentiales auf der Oberfläche:

$$\mathrm{V}_m = \frac{1}{4\pi \mathrm{R}^2}\int \frac{m.d\mathrm{S}}{r}.$$

Die Summe $\int \frac{m d\mathrm{S}}{r}$ ist der Wert des Potentiales in A, welches von einer homogenen Schichte mit der Dichte m herrührt, welche die Kugel bedecken würde; sie ist gleich $\frac{4\pi \mathrm{R}^2 m}{d}$.

Der Mittelwert des Potentiales auf der Kugel ist daher:

$$\mathrm{V}_m = \frac{m}{d}$$

d. h. gleich dem Potentialwerte im Mittelpunkte.

Diese Betrachtungsweise läßt sich auf eine beliebige Anzahl Massen ausdehnen.

180. Der vorstehende, von Gauss aufgestellte Satz folgt aus den Consequenzen, die wir aus dem Theorem von Green gezogen haben, in folgender Weise:

Wir erhielten für den Fall, als alle elektrischen Massen außerhalb eines Raumes v, der von der Oberfläche Σ umschlossen wird, sich befinden, die Formel:

$$-4\pi \mathrm{V}_c = \int \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{V}}{ds}\, d\Sigma - \int \mathrm{V}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) d\Sigma,$$

wo V_c das Potential der wirksamen Massen in einem Punkte C, der innerhalb des Raumes v liegt, bedeutet, die übrigen Größen aber die bekannte Bedeutung haben. Wir nehmen nun als Fläche Σ eine Kugel mit dem Radius R, in deren Mittelpunkte der Punkt C liegt; bezeichnen wir das Potential in diesem Punkte V_0, so hat man:

$$-4\pi V_0 = \frac{1}{R}\int \frac{dV}{ds}\, d\Sigma - \int V \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) d\Sigma.$$

Da nun $ds = -dR$, somit $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}$ ist, da ferner alle elektrischen Massen außerhalb der Kugel liegen, somit nach (169) $\int \frac{dV}{ds}\, d\Sigma = o$ ist, so hat man:

$$4\pi V_0 = \frac{1}{R^2}\int V d\Sigma$$

oder

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int V d\Sigma = V_0$$

und dies ist der von Gauss gegebene obige Satz.

Würden hingegen die Elektricitätsmengen innerhalb der Kugel liegen und wäre ihre Menge Q, so würde aus der früher (pg. 310) abgeleiteten Gleichung

$$\int \frac{1}{r}\frac{dV}{ds}\, d\sigma = \int V \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

folgen:

$$\int \frac{1}{R}\frac{dV}{ds}\, d\sigma = \int V \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma.$$

Da nun diesfalls $ds = dR$, somit $\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds} = -\frac{1}{R^2}$ ist, da ferner $\int \frac{dV}{ds}\, d\sigma = -4\pi Q$ wird, so hat man:

$$-\frac{4\pi Q}{R} = -\frac{1}{R^2}\int V d\sigma, \text{ oder}$$

$$\int V d\sigma = 4\pi Q R.$$

Aus dem vorhergehenden Theoreme folgern wir nachstehenden Lehrsatz:

181. Wenn eine Oberfläche S, auf welcher das Potential constant ist, einen Theil des Dielektrikums umfasst, so ist das Potential nicht allein im Innenraume, sondern auch im ganzen äußeren Raume außerhalb der wirkenden Massen constant.

Wir nehmen an, dass in dem Theile des Dielektrikums, der von der Fläche S begrenzt ist, das Potential den constanten Wert V habe; wäre der Potentialwert außerhalb dieser Fläche von V verschieden, so würde es immer möglich sein, eine Kugel zu zeichnen, die ihr Centrum innerhalb S hat und außen nur solche Punkte trifft, in welchen das Potential einen stets größeren oder kleineren Wert als V hätte: dann aber wäre gewiss der Mittelwert des Potentiales auf der Kugel verschieden von dem Werte des Potentiales im Centrum, was im Widerspruche mit dem eben abgeleiteten Gauss'schen Satze ist. Das Potential außerhalb der Fläche S kann daher von V nicht verschieden sein.

182. Wenn eine geschlossene Oberfläche S alle wirkenden Massen einhüllt und wenn auf dieser Oberfläche das Potential einen constanten Wert V hat, so hat es in jedem auswärtigen Punkte einen zwischen V und o liegenden Wert.

Nehmen wir V positiv an. Da das Potential in der Unendlichkeit Null ist, so kann es in einem außerhalb der Oberfläche liegenden Punkte P keinen größeren Wert als V haben: denn dann würde es irgendwo ein Potentialmaximum geben und demzufolge (nach §. 170) auch elektrische Massen, was der Voraussetzung widerspricht. Ebenso kann das Potential in P nicht kleiner als Null sein, denn dann würde es ein Minimum haben. Das Potential außen liegt daher zwischen V und o. Es kann auch nicht gleich V sein, soferne V selbst nicht Null ist. Es kann nämlich nicht gleich V sein, denn sonst würde es ein Maximum in Bezug auf die benachbarten Punkte sein oder würde Antheil nehmen an einer Region constanten Potentials, welche sich bis zur Oberfläche S erstrecken würde; aber in

diesem letzteren Falle wäre nach dem vorhergehenden Theoreme das Potential constant im ganzen Dielektrikum und könnte nur den Wert Null haben, den es in der Unendlichkeit besitzt.

Zusatz. Eine leitende Fläche S, welche alle wirkenden Massen einschließt, kann nur eine Art Elektricität besitzen.

Denn sei V das Potential der Oberfläche, welches wir positiv voraussetzen werden. Wäre in einem Punkte A dieser Fläche negative Elektricität, so würden die Kraftlinien in diesen Punkt auftreffen und es müsste irgendwo ein äußerer Punkt P sein, in welchem das Potential einen größeren Wert als V hätte, was nach dem voranstehenden Theoreme unmöglich ist.

183. Ein System, welches aus fixen elektrischen Massen und aus elektrischen Ladungen, die auf leitenden Körpern sich befinden, besteht, lässt nur einen einzigen Gleichgewichtszustand zu.

Betrachten wir zuerst ein System, welches nur aus leitenden Körpern $A_1, A_2, A_3 \ldots$ gebildet ist, die isoliert sind und nehmen wir ferner an, dass ein jeder von ihnen gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität umfasst, so wird behauptet, dass der alleinige Gleichgewichtszustand der neutrale ist.

Nehmen wir, um dieses zu beweisen, an, es bilde sich ein anderer Gleichgewichtszustand und wenden die Formel, welche wir früher abgeleitet haben:

$$\int V \Delta V dv = \int V \frac{dV}{ds} d\sigma - \int F^2 dv$$

auf den Raum an, welcher zwischen den Oberflächen der verschiedenen Conductoren und der Oberfläche einer Kugel mit sehr großem Radius, welche die Conductoren umschließt, liegt.

Das erste Glied dieser Gleichung ist Null, da keine Elektricitätsmenge in dem betrachteten Raume sich befindet; die elektrische Dichte ist überall Null, der Factor ΔV ist ebenfalls in allen Punkten Null.

Das Integral $\int V \frac{dV}{ds} d\sigma$ setzt sich aus zwei Theilen zusammen, der eine von ihnen bezieht sich auf die Oberfläche der ver-

schiedenen Conductoren, der andere auf die Oberfläche der Kugel. Auf jedem der Conductoren ist das Potential constant und die Derivierte $\frac{dV}{ds}$ ist gleich $-4\pi\mu$; man hat daher für diesen ersten Theil

$$\int V \frac{dV}{ds} d\sigma = -4\pi V \int \mu ds = -4\pi VM,$$

wobei M die gesammte elektrische Masse bedeutet, welche auf dem betrachteten Conductor verbreitet ist. Nun aber ist diese Elektricitätsmenge Null und die Glieder des Integrales, welche sich auf die verschiedenen Conductoren beziehen, sind sämmtlich Null.

Für jenen Theil, welcher sich auf die Kugeloberfläche bezieht, kann man bemerken, dass das Potential umsomehr sich vermindert, je größer der Kugelradius wird, und dass es gegen Null convergiert; strenger: auf einer hinlänglich erweiterten Kugeloberfläche, deren Centrum in der Nähe der elektrisierten Körper ist, ist das Potential umgekehrt proportional der Entfernung oder dem Radius, die elektrische Kraft $\frac{dV}{ds}$ ist daher umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius, so dass das ganze Integral sich im umgekehrten Verhältnisse des Radius ändert und gegen Null convergiert.

Das zweite Glied der zweiten Seite der Gleichung muss daher auch Null sein; deshalb wird man nothwendigerweise

$$F = 0$$

haben. Man sieht, dass die elektrische Kraft in allen Punkten des betrachteten Volumens Null ist. Diese Kraft ist nun in der Nachbarschaft eines Conductors gleich $4\pi\mu$, die elektrische Dichte ist daher Null in allen Punkten der Oberflächen der verschiedenen Conductoren und demzufolge befinden sich alle diese Conductoren in neutralem Zustande.

Man kann auch durch folgende einfache Schlussweise ([1]) zu dem eben erwiesenen Resultate gelangen. Nennen wir die Conductoren, deren elektrische Ladungen alle einzeln Null sind, A_1,

([1]) Man sehe Mascart u. Joubert, l. c. p. 47.

$A_2, A_3 \ldots$; bezeichnen wir ferner $V_1, V_2, V_3 \ldots$ die Potentiale dieser verschiedenen Leiter und nehmen an, dass unter diesen V_1 das größte sei. Es kann in dem Dielektrikum kein Punkt vorkommen, in welchem das Potential größer als V_1 wäre, weil es außerhalb der wirkenden Massen kein Maximum des Potentiales gibt. Das Potential fällt in jeder Richtung, wenn man vom Conductor A_1 ausgeht, alle Kraftlinien entströmen diesem Conductor und keine kehrt zurück. Da die Summe der Kraftflüsse Null sein muss, da nach der Voraussetzung die gesammte Ladung von A_1 Null ist, so sieht man, dass alle elementaren Kraftströmungen Null sind. Die Dichte ist daher auf der ganzen Oberfläche Null und demzufolge ist der Conductor nicht elektrisch.

Da der Conductor A_1 im neutralen Zustande sich befindet und keine Wirkung auf die benachbarten Leiter ausübt, so kann man ihn entfernen und dieselbe Betrachtung auf den folgenden Leiter A_2 anwenden; man wird so succesive zeigen, dass alle Conductoren im neutralen Zustande sind.

Betrachten wir nun irgend ein System, welches aus fixen Elektricitätsmengen $m, m', m'' \ldots$, die nicht leitenden Körpern angehören und aus Ladungen $M_1, M_2, M_3 \ldots$ gebildet wird, welch' letztere auf den Conductoren $A_1, A_2, A_3 \ldots$ ausgebreitet sind; wir wollen zeigen, dass es nur einen einzigen Gleichgewichtszustand gibt.

Nehmen wir an, es gebe deren zwei; nennen wir μ_1 $\mu_2 \ldots$ die Dichten der auf den leitenden Körpern ausgebreiteten Elektricitätsmengen im ersten Zustande, $\mu_1', \mu_2' \ldots$ die Dichten im zweiten Gleichgewichtszustande. Wechselt man die Zeichen aller elektrischen Massen im zweiten Zustande, so wird man einen neuen Gleichgewichtszustand haben: $-m, -m', -m'' \ldots$ $-\mu_1', -\mu_2' \ldots$ Fügt man diesen Gleichgewichtszustand dem ersten bei, so wird man einen neuen Gleichgewichtszustand erhalten, in welchem die fixen Massen m und $-m$, m' und $-m'$, u. s. w. sich neutralisieren und die Dichte der verschiedenen Schichten $\mu_1 - \mu_1'$, $\mu_2 - \mu_2'$ u. s. w. wird; die algebraische Summe der Elektricitätsmengen, welche jede Schichte bilden, ist Null. Man ist in der Weise auf den ersten Fall zurückgekommen, welchen wir früher studiert haben; dieser neue

Gleichgewichtszustand ist der neutrale Zustand und man hat:

$$\mu_1' = \mu_1, \; \mu_2' = \mu_2 \ldots$$

Das vorausgesetzte System kann daher nur einen einzigen Gleichgewichtszustand darbieten.

184. Zusatz. Wenn ein Conductor Hohlräume besitzt, welche keine wirksame Masse einschließen, so befindet sich die gesammte Elektricität auf der Oberfläche des Körpers, als ob derselbe voll wäre.

Sei in der That M die freie Elektricitätsmenge, welche der Conductor besitzt. Wenn man diesen Conductor voll voraussetzt, wird die Elektricitätsmenge M auf der Oberfläche vertheilt sein und das Potential wird in allen Punkten des Körpers constant sein. Machen wir nun in diesem Conductor irgendwelche Höhlungen, ohne die oberflächliche Elektricitätsschichte zu ändern, so wird das Potential nicht geändert, es wird daher noch Gleichgewicht sein und die inneren Oberflächen (die Oberflächen der Höhlungen) werden nicht elektrisiert sein. Da es für eine gegebene Elektricitätsmenge nur einen Gleichgewichtszustand gibt, so ist das Theorem erwiesen.

Ein strengerer Beweis dieses Theoremes ist folgender(1): Auf der Oberfläche eines Hohlraumes besitzt das Potential den constanten Wert V_1. Würde in einem Punkte P des Hohlraumes das Potential a besitzen, welches von V_1 verschieden wäre und würde man von P nach irgendeinem Punkte der Wand der Höhlung eine Verbindungslinie zeichnen, so würde sich das Potential auf derselben von a bis V_1 ändern und man würde einen Punkt M auf dieser Verbindungslinie finden, in welchem das Potential den zwischen a und V_1 gelegenen Wert b besäße. Der geometrische Ort aller dieser Punkte M würde eine geschlossene Fläche bilden; nach dem in §. 178 aufgestellten Theoreme würde innerhalb dieser Oberfläche das Potential den constanten Wert b haben müssen, was unserer Annahme widerspricht. Das Potential hat daher in dem ganzen Hohlraum den constanten Wert V_1, wie in dem Leiter selbst, und es kann deshalb nach einem früheren Theoreme keine freie Elektricität auf der Oberfläche des Hohlraumes vorhanden sein.

(1) Briot, Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie, pg. 238.

185. Theorem. Wenn verschiedene Elektricitätsmengen vollständig von einer Niveaufläche eingeschlossen sind, kann man, ohne das Gleichgewicht zu stören, sie durch eine Elektricitätsschichte ersetzen, deren Elektricitätsmenge gleich ihrer algebraischen Summe ist, und die auf der Niveaufläche derart vertheilt ist, dass die Dichte in jedem Punkte umgekehrt proportional der Distanz zweier unendlich benachbarten Niveauflächen ist.

Seien m, m', m''... (Fig. 97) irgendwelche Elektricitätsmengen, welche leitenden Körpern angehören oder nicht, S_1 sei eine die Elektricitätsmengen einschließende Niveaufläche, auf der das Potential V_1 ist. Nehmen wir an, man mache alle diese Elektricitätsmengen fest und stellen wir uns einen Conductor vor, der mit dem Erdboden communiciert und innen von der Oberfläche S_1 begrenzt ist. Es wird auf dieser Oberfläche durch Influenzwirkung, nach dem im §. 177 aufgestellten Theoreme, eine Elektricitätsschichte $-M_1$ hervorgerufen, derart, dass man

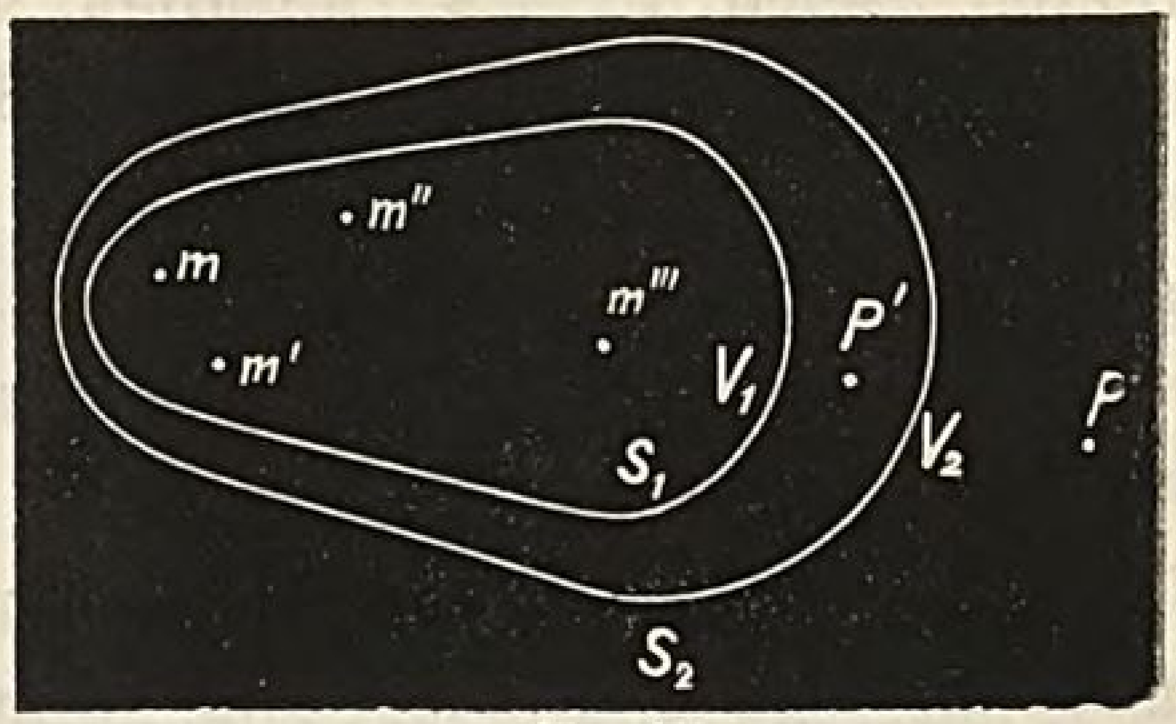


Fig. 97.

$$-M_1 + m + m' + m'' + \ldots = 0$$

hat; das Potential ist in allen Punkten, welche außerhalb der Oberfläche S_1 liegen, Null. Das Potential der Elektricitätsschichte S_1 ist daher für alle äußeren Punkte P gleich und vom entgegengesetzten Zeichen, wie das Potential des Elektricitätsmengen-Systems $m + m' + m''$...; eine Elektricitätsschichte M_1 in derselben Weise auf der Oberfläche S_1 vertheilt, wird dann die vorausgesetzten Massen ersetzen können. Diese Schichte wird überdies im Gleichgewichte sein, wenn die Oberfläche S_1 leitend ist, denn das Potential V_1 auf dieser Oberfläche ist constant und nach dem Theoreme (178) ist es ebenfalls im ganzen Inneren constant, da die Oberfläche keine wirkende Masse mehr einschließt.

Betrachten wir nun eine zweite Niveaufläche S_2, welche keine neue elektrische Masse umschließt. Eine Elektricitätsschichte $M_2 = M_1$ auf dieser Oberfläche in einer schicklichen Weise vertheilt, wird wieder in allen äußeren Punkten ein Potential erzeugen, welches dem der vorausgesetzten Elektricitätsmengen gleich ist und das Potential im Innern wird dann gleich V_2 sein.

Um das Gesetz der Vertheilung zu bestimmen, genügt es nun zu bemerken, dass die beiden Schichten $+M_1$ und $-M_2$ auf den Außenraum ein Potential Null und auf den innerhalb der Oberfläche S_1 gelegenen Raum ein constantes Potential gleich $V_1 - V_2$ ausüben. Gleichgewicht wird daher bestehen, wenn diese beiden Schichten ausgebreitet werden, die erste auf einem Conductor, der von der Oberfläche S_1 begrenzt ist, die zweite auf einem Conductor, der mit der Erde in Verbindung ist und einen Hohlraum, der von der Oberfläche S_2 begrenzt ist, besitzt.

Zwei correspondierende Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ dieser Oberflächen werden gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Elektricitätsmengen nach dem Theoreme im §. 174 besitzen, und wenn man die beiden Oberflächen unendlich nahe annimmt, so wird die Dichte μ_1 auf der inneren Oberfläche in einem Punkte, in welchem die Entfernung der Oberflächen gleich e ist, gegeben sein durch die Gleichung

$$\mu_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Bemerken wir noch, dass in einem Punkte P', welcher zwischen den Oberflächen S_1 und S_2 liegt, das Potential sich nicht geändert hat. Man kann daher, ohne den elektrischen Zustand der Punkte, welche zwischen den zwei Niveauflächen S_1 und S_2 liegen, zu ändern, alle innerhalb der Oberfläche S_1 gelegenen Elektricitätsmengen durch die Elektricitätsschichte $+M_1$ und die außer der Oberfläche S_2 gelegenen Elektricitätsmengen durch die Elektricitätsschichte $-M_2$, welche der ersten gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen ist, ersetzen.

Dies zusammenfassend können wir nun sagen:

Betrachtet man eine Niveaufläche in irgendeinem elektrischen Systeme, so kann man:

1. für alle äußeren Punkte die inneren Massen durch eine gleiche und gleichbezeichnete Masse ersetzen, die sich auf der erwähnten Niveaufläche im Gleichgewichte befindet;

2. für die inneren Punkte die auswärtigen Massen durch dieselbe Masse aber mit geändertem Zeichen, d. h. durch eine Masse, welche den inneren Massen gleich und entgegengesetzt ist, ersetzen, wobei diese Schichte wieder im Gleichgewichte ist.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Masse im ursprünglichen Zustande einerseits, die auf einer sie vollständig umschließenden Niveaufläche vertheilte ebenso große Masse andererseits einen gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt haben; dieser schöne Satz wurde von Liouville gegeben; Thomson wies weiter nach, dass diese beiden Massen gemeinschaftliche Hauptträgheitsaxen besitzen (¹).

186. Auch aus dem Green'schen Theoreme lässt sich der Satz von der sogenannten „äquivalenten Massentransposition" leicht folgern. Dies soll im Nachfolgenden gezeigt werden.

Sei V das Potential von ganz willkürlichen Elektricitätsmengen, S eine Gleichgewichtsfläche, welche alle Massen umfasst. Während für einen Punkt der Niveaufläche das Potential constant ist, hat man für jeden außerhalb derselben liegenden Punkt C nach den Folgerungen aus der Green'schen Gleichung (pg. 309, Formel A')

$$-4\pi V_c = \int \frac{1}{r}\frac{dV}{dN}\,d\sigma - \int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN}\,d\sigma,$$

wenn $d\sigma$ ein Oberflächenelement der Niveaufläche ist und N die Normale zu derselben bedeutet.

(¹) W. Thomson, reprint of papers on electrostatics and magnetism; pg. 109—111.

Es ist nun

$$-\int V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dN} d\sigma = V \int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dN} d\sigma = -V \int \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma,$$

wenn θ den Winkel bedeutet, den die von der Niveaufläche auswärts gezogene Normale mit r bildet (Fig. 98).

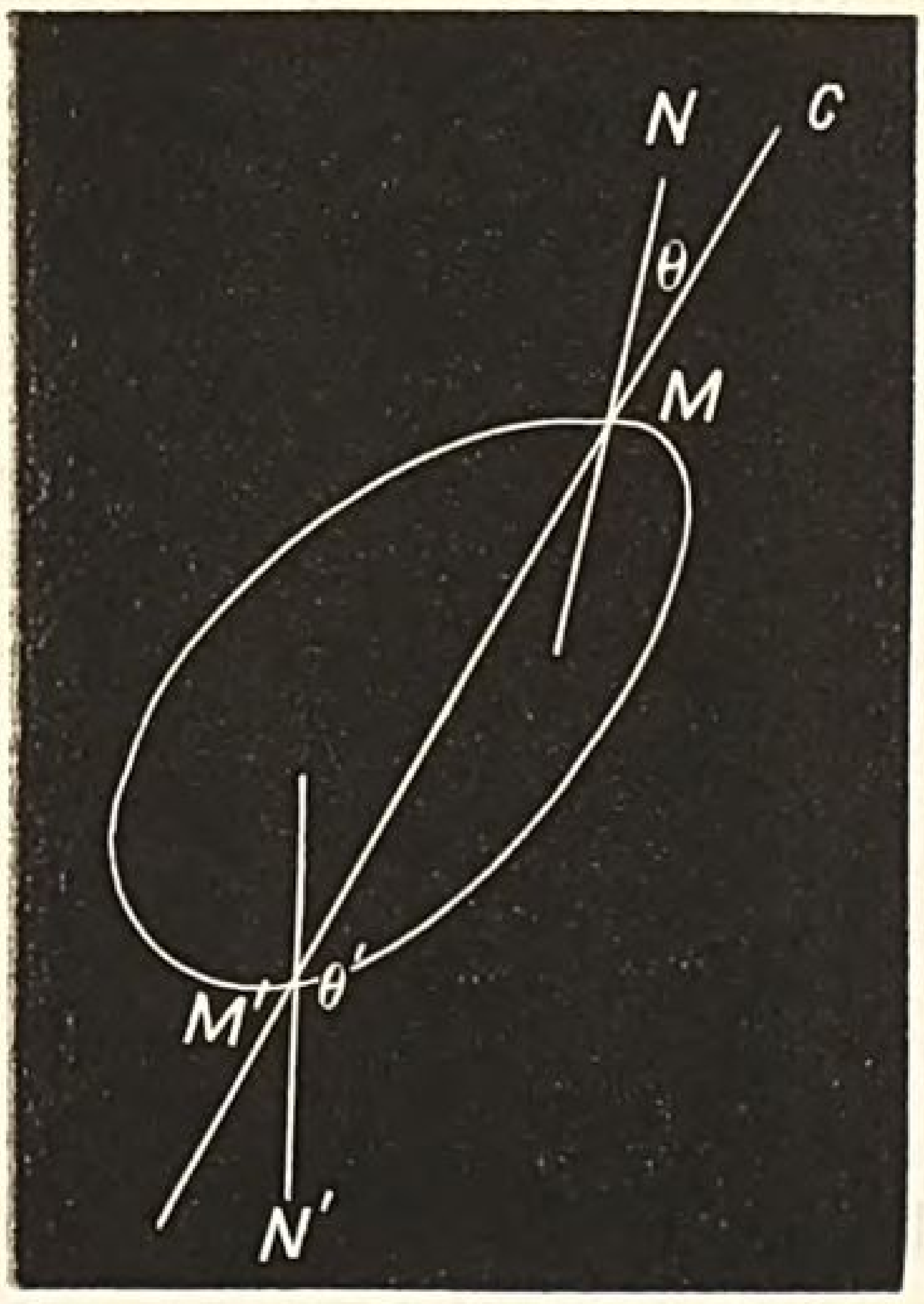


Fig. 98.

Es lässt sich leicht zeigen, dass immer

$$\int \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma = o$$

ist, sobald der Punkt C außerhalb der Niveaufläche liegt. Zeichnen wir nämlich durch C einen Kegel mit der unendlich kleinen Öffnung ω, so schneidet derselbe aus der Niveaufläche zwei Elemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ heraus; nennen wir CM $= r$, CM' $= r'$ und zeichnen wir die Normalen MN und M'N' an den Stellen M und M', so ist $\measuredangle$ CMN $= \theta$ und $\measuredangle$ CM'N' $= \theta'$.

Wir haben dann:

$$\cos\theta . d\sigma = r^2\omega, \quad -\cos\theta' . d\sigma' = r'^2\omega$$

oder auch

$$\frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma = +\omega, \quad \frac{\cos\theta'}{r'^2} . d\sigma' = -\omega.$$

Es sind somit die zwei Elemente der Integrale für denselben Kegel gleich und entgegengesetzt bezeichnet und heben sich auf; es gilt dieses für je zwei zusammengehörige Elemente und das obige Integral ist daher Null.

Unsere obige Formel wird jetzt:

$$V_c = \int \frac{-\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dN} d\sigma}{r}.$$

Das Potential der innerhalb der Niveaufläche befindlichen Massen in einem äußeren Punkte ist daher dasselbe, als ob auf dieser Oberfläche eine Ladung mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dN}$ sich befände; die Größe der Elektricitätsmenge auf dieser Fläche ist somit Q bestimmt durch:

$$Q = \int -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dN}d\sigma;$$

da aber nach dem Theoreme (169, p. 311)

$$\int \frac{dV}{dN}d\sigma = -4\pi Q_1$$ ist, wobei Q_1

die von der Niveaufläche eingeschlossenen Elektricitätsmengen bedeuten, so heißt dies: die Ladung der Fläche ist gleich der innerhalb derselben befindlichen Elektricitätsmenge, welche das Potential V hervorbringt.

Wenn also die Elektricitätsmenge $Q = Q_1$ über die Oberfläche derart verbreitet wird, dass die Dichte in jedem Punkte dieser Oberfläche durch den Ausdruck

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dN}$$

bestimmt wird, so übt diese Oberfläche auf einen äußeren Punkt dieselbe Wirkung aus, wie die ursprünglich innerhalb der Oberfläche vorhandenen Massen.

Der hier angegebene Weg kann — wie wir später an Beispielen sehen werden — dazu dienen, um Oberflächen zu finden, auf denen die Elektricitätsvertheilung bestimmt werden kann; wir wollen diese Methode die Methode der Gleichgewichtsflächen oder die Methode von Green nennen. (¹) — Umgekehrt kann man die Masse, welche auf einer Niveaufläche gelagert ist, in jene Punkte innerhalb dieser Fläche versetzen, bezüglich welcher die erstere Fläche eben die Niveaufläche ist. So kann man die gleichförmig vertheilte Masse auf einer Kugelfläche in deren Mittelpunkt ver-

(¹) Man sehe bezüglich der äquivalenten Massentransposition unter anderem: Grinwis, wiskundige theorie der wrijvings electriceit (Utrecht 1869) oder Kötteritzsch, Lehrbuch der Elektrostatik (pg. 73).

setzen, und die Wirkung für Punkte auf und außerhalb der Kugelfläche ist dieselbe.

187. Allgemeine Bemerkungen über Elektrisierung durch Influenz. Sei A ein mit der Erde in Verbindung stehender Leiter, welcher der Wirkung einer in einem außerhalb befindlichen Punkte O gelegenen Elektricitätsmenge q unterworfen ist. Es bildet sich auf dem Körper eine Schichte von der Art, dass das Potential dieser Schichte und der Masse q im Innern des Körpers A Null ist. Nahe dem Punkte O bestimmt der Theil $\frac{q}{r}$ des Potentials das Vorzeichen desselben, weil es den anderen von der Schichte herrührenden Theil übertrifft. Es ist nun leicht zu erweisen, dass das Potential auch in dem ganzen anderen Raume dasselbe Vorzeichen behalten muss. Hätte nämlich das Potential in einem Punkte P das entgegengesetzte Vorzeichen von dem in der Nähe des Punktes O, so könnte man um den Punkt P eine geschlossene Fläche herstellen, welche keine elektrische Masse in sich einschließen würde, und auf welcher das Potential einen constanten Wert besäße, der zwischen Null und dem Werte in P läge, was nicht der Fall sein kann, da das Theorem (178) aussagt, dass, wenn eine geschlossene Fläche keine wirksame Masse einschließt und das Potential auf dieser Oberfläche constant ist, es auch in dem ganzen von der Oberfläche umschlossenen Volumen constant sein muss.

Ist die Elektricitätsmenge q positiv, dann hat das Potential im Körper A den Wert Null und außerhalb einen positiven Wert. Der Wert der Derivierten auf der Oberfläche nach außen genommen ist dann positiv, daher nach der Formel $\frac{dV}{dn} = -4\pi\rho$ die Dichte ρ negativ. Der Leiter A ist mit einer Elektricitätsmenge q' geladen, die das entgegengesetzte Vorzeichen von q hat.

Nehmen wir nun an, eine Kugel schließe den Punkt O und den Körper A gleichzeitig ein, so hat man nach dem früher (180) abgeleiteten Lehrsatze:

$$\int V d\sigma = 4\pi QR,$$

wo R den Radius der Kugel, Q die innerhalb der Kugel befindliche Elektricitätsmenge bedeutet; es wird dann sein:

$$\int V d\sigma = 4\pi R(q - q'),$$

wenn man die Elektricitätsmenge q' gleich mit ihrem Vorzeichen in die Rechnung einführt; das Potential ist positiv, deshalb muss $q > q'$ sein; es ist mithin die auf einem mit der Erde in Verbindung stehenden Leiter inducierte Elektricitätsmenge gleich oder kleiner als die inducierende Menge. Gleich ist sie dann, wenn der Leiter die inducierende Masse umschließt.

188. Auch aus den Eigenschaften der Kraftlinien folgt das wichtige Resultat, dass der mit der Erde in leitender Verbindung stehende Körper A eine negative Elektricitätsmenge erhält, wenn q das positive Vorzeichen besitzt. Denn wären auf der Oberfläche von A Regionen positiver Elektricität, so würden von denselben Kraftlinien ausgehen, welche gegen Stellen gerichtet wären, wo das Potential geringer ist, als auf A, d. h. negativ wäre; solche Stellen gibt es aber nicht. Alle Kraftlinien des elektrischen Feldes entströmen daher einzig und allein dem Punkte O, in welchem die Elektricitätsmenge q sich befindet; die einen von diesen Kraftlinien gehen zu dem mit der Erde in Verbindung stehenden Conductor A, die anderen setzen sich in die Unendlichkeit fort; daraus folgt auch schon, dass die negative Ladung des Körpers A nur ein Bruchtheil jener in O befindlichen ist; nur dann sind die beiden Elektricitätsmengen gleich, wenn der Leiter A die Elektricitätsmenge q umhüllt.

Ganz gleiche Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn man mehrere mit der Erde in Verbindung stehende Leiter hat, die durch einen isolierten geladenen Leiter auf dem Wege der Influenzwirkung Elektricität erhalten.

189. Ein Leiter A_1 befinde sich in der Nähe anderer isolierter Leiter A_2, $A_3 \ldots$; letztere seien anfangs im neutralen Zustande; ihre Gesammtladung bleibt daher Null. A_1 erhalte eine Elektricitätsmenge M und werde auf das Potential $V_1 > 0$ gebracht. Es ist in dem ganzen Dielektrikum das Potential

wieder positiv und kleiner als V_1; auf jedem anderen Leiter hat es einen constanten positiven Wert, positiv deshalb, weil alle Conductoren an ihrer Oberfläche einen Theil besitzen, der mit positiver Elektricität geladen ist, dem also Kraftlinien entströmen, welche sich nach Richtungen fortpflanzen, in denen das Potential positiv ist.

A_2 sei jener von den isolierten Conductoren, dessen Potential V_2 das größte ist; da ein Theil seiner Oberfläche negativ elektrisch ist, erhält er Kraftlinien. Jede dieser Kraftlinien kommt weder vom Boden, noch — nach der Voraussetzung — von den anderen Conductoren, deren Potential kleiner ist; alle kommen daher vom Leiter A_1 und demzufolge ist V_2 kleiner als V_1. Da überdies die von A_2 aufgenommenen Kraftlinien nicht die Gesammtheit jener bilden, die von A_1 ausgesendet werden, so ist jede der positiven und negativen Schichten, welche die Nullladung von A_2 bilden, kleiner als die gesammte Ladung von A_1.

Man setzt die Betrachtungen in derselben Weise für die anderen Leiter fort; kommt A_3 nach der Größenordnung des Potentials nach A_2, so erhält dieser Conductor Kraftlinien von A_1 und von A_2, welche letztere als indirect von A_1 herstammend betrachtet werden können. Es ist auf jedem der isolierten Conductoren die negative Ladung daher kleiner als die positive Ladung von A_1, wenn nicht einer von ihnen eine geschlossene Oberfläche bildet, die vollständig den Leiter A_1 einschließt.

190. Um in dem früher betrachteten Falle, in welchem ein mit der Erde in Verbindung stehender Leiter A der Influenzwirkung einer in O befindlichen Elektricitätsmenge q unterworfen war, das Verhältnis zwischen der inducierten und inducierenden Elektricitätsmenge zu bestimmen, betrachten wir den Raum, welcher einerseits von einer dem Leiter A unendlich nahe liegenden und ihn vollständig einschließenden Fläche S und von einer kleinen Kugelfläche begrenzt wird, die um den Punkt O als Mittelpunkt mit dem Radius r beschrieben ist, und andererseits nach außenhin von einer Kugelfläche umschlossen wird, die von einem willkürlichen Punkte P aus mit einem sehr großen Radius R beschrieben ist. Wenden wir auf diesen Raum die Gleichung

$$\int (\mathrm{U}\Delta\mathrm{V}-\mathrm{V}\Delta\mathrm{U})\, dv = \int\left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{ds} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{ds}\right)d\sigma$$

an; V bedeute das Potential der auf dem Körper A entwickelten Elektricitätsschichte und der Elektricitätsmenge q und U das Potential der Niveauschichte, welche sich auf der Oberfläche von A bilden würde, wenn der Körper isoliert und elektrisch wäre, ohne der Wirkung einer außerhalb liegenden elektrischen Masse unterworfen zu sein. Das Integral linkerseits ist Null, weil in dem betrachteten Raume keine elektrische Masse vorhanden ist. Das Oberflächenintegral ist auf drei Oberflächen auszudehnen, welche das betrachtete Volumen einschließen. Auf der großen Kugel haben die Potentiale sehr kleine Werte und können durch convergente Reihen ausgedrückt werden:

$$\mathrm{U} = \frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{b}{\mathrm{R}^2} + \frac{c}{\mathrm{R}^3} + \ldots$$

$$\mathrm{V} = \frac{a'}{\mathrm{R}} + \frac{b'}{\mathrm{R}^2} + \frac{c'}{\mathrm{R}^3} + \ldots.$$

Hieraus erhält man:

$$\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{R}} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{R}} = -\frac{ab' - ba'}{\mathrm{R}^4} + \ldots$$

Daraus ist zu ersehen, dass für ein unendlich großes R der auf die große Kugel bezugnehmende Theil des Oberflächenintegrales verschwindet. V verschwindet im Innern des Körpers A, U besitzt aber einen constanten Wert U_1; man erhält somit für das auf die Oberfläche S bezügliche Integral

$$-\mathrm{U}_1\int\frac{d\mathrm{V}}{ds}d\sigma = 4\pi q'\mathrm{U}_1,$$

wenn man die Normale von innen nach außen rechnet. Betrachten wir nun noch das auf die kleine Kugel, die den Punkt O umschließt, bezügliche Integral; es ist dasselbe

$$\int\left(\mathrm{U}\frac{d\left(\frac{q}{r}+\mathrm{V}'\right)}{ds} - \left(\frac{q}{r}+\mathrm{V}'\right)\frac{d\mathrm{U}}{ds}\right)d\sigma,$$

wo V′ das Potential der inducierten Schichte bedeutet.

Beim Übergange zur Grenze ergibt sich der Wert dieses Integrales $4\pi q U_0$, wo U_0 der Wert von U im Punkte O ist. Die oben aufgestellte Gleichung wird nun

$$0 = 4\pi(q' U_1 + q U_0)$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{q'}{q} = -\frac{U_0}{U_1}.$$

Die absolute Menge der Influenzelektricität auf einem mit der Erde verbundenen Leiter, die durch eine gewisse in einem Punkte außerhalb des Leiters befindliche Elektricitätsmenge hervorgerufen wird, verhält sich zur letzteren umgekehrt wie der Wert des Potentials irgendeiner über dem isolierten Leiter im Gleichgewichtszustande verbreiteten elektrischen Ladung für irgendeinen Punkt des Leiters zu dem Werte desselben Potentials für den Punkt, in welchem sich die influencierende Elektricitätsmenge befindet.

191. Folgerungen aus diesem Satze(1):

1. Wenn die influencierende Elektricität auf der Oberfläche des Leiters selbst liegt, ist die absolute Menge der Influenzelektricität gleich der absoluten Menge der influencierenden. Rückt die influencierende Elektricität in die Unendlichkeit, so ist die Menge der Influenzelektricität gleich Null.

2. Die auf dem mit der Erde leitend verbundenen Körper A entwickelte Influenzelektricität bleibt dieselbe, wenn sich die influencierende Elektricitätsmenge auf einer zu dem isolierten Körper A gehörenden Niveaufläche verrückt.

Beispiel. Eine leitende Kugel, deren Radius R ist, sei mit der Erde in leitender Verbindung. In der Entfernung d vom Mittelpunkte befinde sich eine influencierende Elektricitätsmenge q. Nehmen wir an, es sei über dem Leiter, der

(1) Th. Kötteritzsch, Lehrbuch der Elektrostatik (Leipzig 1872); p. 111.

isoliert gedacht wird, eine Elektricitätsmenge M verbreitet, so ist das Potential derselben auf der Kugeloberfläche nach einem bekannten Satze $\frac{M}{R}$, das Potential derselben Masse in der Entfernung d ist ausgedrückt durch $\frac{M}{d}$; die an der Stelle, wo sich q befindet, sich vorfindende Niveaufläche ist eine Kugel. Nach dem eben bewiesenen Satze ist absolut genommen:

$$\frac{Q}{q} = \frac{M}{d} : \frac{M}{R} = \frac{R}{d} \text{ oder}$$

$$Q = \frac{R}{d} q,$$

wenn Q die Menge der Influenzelektricität bedeutet.

Es ist somit die Menge der auf der Kugel erzeugten Influenzelektricität dem Radius der Kugel und der influencierenden Elektricität direct, der Entfernung des influencierenden Punktes von der Kugel umgekehrt proportional.

Hat man es nicht mit einer einzigen influencierenden Elektricitätsmenge, sondern mit Elektricität zu thun, welche gewisse Räume oder Flächen außerhalb der influencierten Kugel stetig ausfüllt, so hat man absolut genommen die auf der Kugel erzeugte Influenzelektricität Q gegeben durch die Formel:

$$Q = R \int \frac{dq}{\rho},$$

wenn ρ die Entfernung des betrachteten influencierenden Elementes dq vom Kugelmittelpunkte vorstellt.

Ist V_0 das Potential der influencierenden Elektricität im Mittelpunkte der Kugel, so ist:

$$V_0 = \int \frac{dq}{\rho}$$

und daher absolut genommen

$$Q = RV_0.$$

In diesem Resultate bietet sich ein einfaches Mittel dar, das Potential von irgendeiner an Nichtleitern haftenden Elek-

tricitätsmenge für beliebige Punkte des Raumes zu bestimmen.(¹) Namentlich dann wird dieses Ergebnis wichtig sein, wenn es sich um die Bestimmung der Potentialfunction größerer elektrischer Massen in größerer Entfernung handelt, selbst wenn die elektrischen Massen auf leitenden Substanzen haften, weil man dann die Rückwirkung der auf der Kugel befindlichen Influenzelektricität auf die influencierende vernachlässigen kann. Dies kommt z. B. bei Untersuchungen über atmosphärische und Wolkenelektricität vor.

192. Wir wollen noch die Formel von Green bei der Demonstration des nachfolgenden, von Riemann(²) ausgesprochenen Theorems anwenden.

Theorem. Zwei Conductoren A und B befinden sich zusammen in einem isolierenden Medium und in ihrer Nachbarschaft würden sich irgendwelche mit dem Erdboden verbundene Leiter vorfinden. Wenn der Conductor A auf ein bestimmtes Potential V_1 gebracht ist, und B mit dem Erdboden in Verbindung ist, nimmt dieser letztgenannte Conductor eine gewisse elektrische Ladung M_b an. Umgekehrt wird, wenn B auf das Potential V_1 gebracht wurde und A mit der Erde in Verbindung steht, die benachbarten Conductoren aber in dem selben Zustande bleiben, der Conductor A eine Elektricitätsmenge $M_a = M_b$ annehmen.

Bezeichnen wir mit U das Potential in einem Punkte P, wenn der Conductor A auf dem Potential V_1 sich befindet, alle anderen Conductoren aber mit der Erde in Verbindung stehen, und mit V das Potential in demselben Punkte P, wenn der Conductor B das Potential V_1 besitzt, die anderen aber nicht isoliert sind.

Wenn man in der Formel von Green die Buchstaben U und V verwechselt und die beiden Gleichungen gliedweise subtrahiert, so erhält man:

(¹) Man sehe Th. Kötteritzsch, Lehrbuch der Elektrostatik, p. 113.

(²) Clausius, théorie mécanique de la chaleur, traduct. de M. Folie, T. II., p. 38.

$$\int U\Delta V dv - \int V\Delta U dv = \int U\frac{dV}{ds}d\sigma - \int V\frac{dU}{ds}d\sigma.$$

Die Functionen U und V haben die Bedeutung, welche wir ihnen früher gegeben haben; wenn man diese Gleichung auf den ganzen Raum ausdehnt, der zwischen den verschiedenen Conductoren und einer Kugel von sehr großem Radius gelegen ist, so hat man für alle Punkte dieses Raumes $\Delta U = 0$ und $\Delta V = 0$; das erste Glied der Gleichung ist Null und es bleibt:

$$\int U\frac{dV}{ds}d\sigma = \int V\frac{dU}{ds}d\sigma.$$

Die Theile dieses Integrales, welche der Oberfläche der Kugel entsprechen, convergieren gegen Null, wenn man den Radius der Kugel vergrößert; man kann daher diese Theile vernachlässigen und es bleiben nur jene Theile des Integrales zu betrachten, welche sich auf die Oberflächen der verschiedenen Conductoren beziehen.

Die Function U ist gleich Null auf allen Conductoren mit Ausnahme des Conductors A, auf welchen sie einen constanten Wert V_1 besitzt. Das Integral auf der ersten Seite reduciert sich daher auf ein Glied, welches sich auf A bezieht und wenn man mit $d\sigma_a$ das Oberflächenelement dieses Körpers bezeichnet, hat man einfach:

$$\int U\,\frac{dV}{ds}d\sigma = V_1\int\frac{dV}{ds}d\sigma_a.$$

Ebenso wird die Function V Null für alle Conductoren mit Ausnahme von B, auf welchem sie gleich V_1 ist und man hat daher auch:

$$\int V\,\frac{dU}{ds}d\sigma = V_1\int\frac{dU}{ds}\,d\sigma_b$$

woraus

$$\int\frac{dV}{ds}d\sigma_a = \int\frac{dU}{ds}\,d\sigma_b \text{ folgt.}$$

Bezeichnet man mit μ_a die elektrische Dichte in einem Punkte des Conductors A, der nicht isoliert ist und der unter

dem Einflusse des influencierenden Körpers B steht, so hat man für die Oberfläche des Körpers A:

$$\frac{dV}{ds} = -4\pi\mu_a$$

demzufolge:

$$\int \frac{dV}{ds}\, d\sigma_a = -4\pi \int \mu_a\, d\sigma_a = -4\pi M_a.$$

M_a bedeutet hier die Gesammtladung, welche der Conductor A unter diesen Bedingungen erhält. In derselben Weise hat man:

$$\int \frac{dU}{ds}\, d\sigma_b = -4\pi \int \mu_b\, d\sigma_b = -4\pi M_b$$

und daraus resultiert:

$$M_a = M_b.$$

193. Clausius (¹) hat vor kurzem einen Satz aufgestellt, der sich auf die wechselseitige Influenzwirkung beliebig vieler Leiter bezieht und den vorstehenden Satz als speciellen Fall umfasst. Derselbe lautet: Es sei irgendeine Anzahl leitender Körper $C_1, C_2, C_3 \ldots$ gegeben, die influencierend auf einander wirken. Dieselben sollen in zwei verschiedenen Weisen geladen werden. Bei der ersten Ladung seien die auf den einzelnen Leitern befindlichen Elektricitätsmengen:

$$M_1, M_2, M_3 \ldots$$

und die dadurch entstehenden Potentialniveaus der Körper

$$V_1, V_2, V_3 \ldots;$$

bei der zweiten Ladung seien die Elektricitätsmengen und Potentialniveaux

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \ldots$$
$$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3 \ldots$$

Dann gilt folgende Gleichung:

$$V_1\mathfrak{M}_1 + V_2\mathfrak{M}_2 + V_3\mathfrak{M}_3 + \ldots = \mathfrak{V}_1 M_1 + \mathfrak{V}_2 M_2 + \mathfrak{V}_3 M_3 + \ldots$$

(¹) Wiedemann, Annalen, Bd. I. pg. 493, auch Clausius, mechanische Wärmetheorie, II. Bd. Braunschweig, 1879.

oder kürzer geschrieben:

$$\sum \mathrm{V} . \mathfrak{M} = \sum \mathfrak{V} . \mathrm{M}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns um einen in der Nähe der Körper gelegenen Punkt eine unendlich große Kugelfläche geschlagen und wenden auf den zwischen den Körpern und der Kugelfläche befindlichen unendlichen Raum die Green'sche Gleichung:

$$\int \mathrm{V} \frac{d\mathfrak{V}}{ds} d\sigma + \int \mathrm{V} \Delta \mathfrak{V} dv = \int \mathfrak{V} \frac{d\mathrm{V}}{ds} d\sigma + \int \mathfrak{V} \Delta \mathrm{V} dv$$

an, indem wir unter den beiden darin vorkommenden Functionen, welche wir mit V und $\mathfrak{V}$ bezeichnen wollen, die der ersten und zweiten Ladung entsprechenden Potentialfunctionen verstehen, welche mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in dem betrachteten Raume überall endlich bleiben.

Es ist in dem betrachteten Raume keine Elektricität unserer Voraussetzung gemäß vorhanden und deshalb ist

$$\Delta \mathrm{V} = \Delta \mathfrak{V} = o.$$

Die vorige Gleichung reduciert sich auf:

$$\int \mathrm{V} \frac{d\mathfrak{V}}{ds} d\sigma = \int \mathfrak{V} \frac{d\mathrm{V}}{ds} d\sigma.$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Integrale erstrecken sich über die Oberflächen aller gegebenen Körper und über die unendlich große Kugelfläche. Wenn R der Radius der Kugel ist, so sind V und $\mathfrak{V}$ an der Oberfläche der Kugel unendlich kleine Größen von der Ordnung $\frac{1}{\mathrm{R}}$; $\mathrm{V} \frac{d\mathfrak{V}}{ds}$ und $\mathfrak{V} \frac{d\mathrm{V}}{ds}$ sind deshalb unendlich kleine Größen von der Ordnung $\frac{1}{\mathrm{R}^3}$; die auf die Kugelfläche bezüglichen Theile der Integrale sind daher unendlich klein und können somit vernachlässigt werden; man hat deshalb die Integrationen nur auf die Oberflächen der gegebenen Körper auszudehnen.

Auf der Oberfläche jedes Körpers ist die Potentialfunction constant und man kann deshalb schreiben:

$$V_1 \int \frac{d\mathfrak{V}}{ds} d\sigma_1 + V_2 \int \frac{d\mathfrak{V}}{ds} d\sigma_2 + V_3 \int \frac{d\mathfrak{V}}{ds} d\sigma_3 + \ldots =$$

$$= \mathfrak{V}_1 \int \frac{dV}{ds} d\sigma_1 + \mathfrak{V}_2 \int \frac{dV}{ds} d\sigma_2 + \mathfrak{V}_3 \int \frac{dV}{ds} d\sigma_3 + \ldots$$

In dieser Gleichung bedeuten $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ die Oberflächenelemente der Leiter C_1, C_2, $C_3 \ldots$ und die verschiedenen Integrale beziehen sich auf die Oberflächen der einzelnen Körper.

Nun ist an allen Oberflächen zu setzen:

$$\frac{dV}{ds} = -4\pi m \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{V}}{ds} = -4\pi\mu,$$

worin m und μ die Flächendichtigkeiten bei den einzelnen Ladungen bedeuten. Vorstehende Formel wird daher:

$$V_1 \int \mu\, d\sigma_1 + V_2 \int \mu\, d\sigma_2 + V_3 \int \mu\, d\sigma_3 + \ldots =$$

$$= \mathfrak{V}_1 \int m\, d\sigma_1 + \mathfrak{V}_2 \int m\, d\sigma_2 + \mathfrak{V}_3 \int m\, d\sigma_3 + \ldots$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Integrale bedeuten die auf den einzelnen Körpern befindlichen Elektricitätsmengen und wir erhalten schließlich:

$$V_1 \mathfrak{M}_1 + V_2 \mathfrak{M}_2 + V_3 \mathfrak{M}_3 + \ldots = \mathfrak{V}_1 M_1 + \mathfrak{V}_2 M_2 + \mathfrak{V}_3 M_3 + \ldots$$

und das ist die zu beweisende Gleichung.

Unter gewissen Umständen gestattet diese Gleichung eine Vereinfachung. Es können nämlich die Glieder, welche sich auf einen der gegebenen Körper C_i beziehen, nämlich die beiden Producte $V_i\, \mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{V}_i\, M_i$ Null werden und zwar in folgenden zwei Fällen:

1. Steht der Körper in leitender Verbindung mit der Erde, so ist für jede Ladung sein Potentialniveau Null und es ist dann

$$V_i = \mathfrak{V}_i = o,$$

daher auch $V_i\, \mathfrak{M}_i = \mathfrak{V}_i\, M_i = o$.

2. Ist der Körper isoliert und ursprünglich unelektrisch und erhält derselbe bei der Ladung von außen keine Elektricität, so wird durch Influenzwierung seine Oberfläche theils positiv, theils negativ elektrisch, aber so, dass die ganze auf der Oberfläche befindliche Elektricitätsmenge Null bleibt; dann ist

$$M_i = \mathfrak{M}_i = o,$$

und deshalb $V_i\ \mathfrak{M}_i = \mathfrak{V}_i\ M_i = o$.

Clausius hat daher folgende Regel aufgestellt:

Solche Körper, die bei beiden Ladungen mit der Erde in leitender Verbindung stehen, oder die isoliert und ursprünglich unelektrisch sind und bei den Ladungen keinerlei Elektricität empfangen, können bei der Aufstellung der Gleichung:

$$\sum V . \mathfrak{M} = \sum \mathfrak{V} . M$$

ganz unberücksichtigt bleiben.

194. Aus diesem allgemeinen Theorem folgt leicht der früher bewiesene Satz. Auch andere specielle Fälle können nun in bequemer Weise erledigt werden:

Nehmen wir z. B. zwei Leiter an, die isoliert und ursprünglich unelektrisch sind, und bringen bei der ersten Ladung die Elektricitätsmenge M auf den Körper C_1, durch deren Influenz in C_2 das Potentialniveau V_2 entstehe; bei der zweiten Ladung erhalte nur der Körper C_2 die Elektricitätsmenge M, durch deren Influenz in C_1 das Potentialniveau $\mathfrak{V}_1$ entstehe. Die für zwei Leiter giltige Gleichung

$$V_1 \mathfrak{M}_1 + V_2 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{V}_1 M_1 + \mathfrak{V}_2 M_2$$

geht in diesem Falle über in

$$V_2 M = \mathfrak{V}_1 M \text{ oder}$$
$$V_2 = \mathfrak{V}_1$$

da $M_2 = \mathfrak{M}_1 = o$ und $M_1 = \mathfrak{M}_2 = M$ ist.

Es sind also das Potentialniveau, welches bei der Ladung von C_1 mit einer gewissen Elektricitätsmenge durch Influenz in C_2 entsteht und dasjenige, welches bei der Ladung von C_2 mit derselben Elektricitätsmenge durch Influenz in C_1 entsteht, untereinander gleich.

So ist das Potential einer mit der Elektricitätseinheit geladenen leitenden Kugel auf einen um r von ihrem Mittelpunkte abstehenden äußeren Punkt $\frac{1}{r}$; geben wir somit einem außerhalb einer Kugel in der Distanz r von ihrem Mittelpunkte befindlichen Punkte die Elektricitätseinheit, so wird das Potential auf der Kugel, von der wir voraussetzen, dass sie weiter keine Ladung besitzen soll, ebenfalls $\frac{1}{r}$ sein.

Auch das folgende von Bertrand ausgesprochene Theorem ergibt sich aus der Grundgleichung. Es lautet: Wenn ein im neutralen Zustande isolierter oder nicht isolierter Leiter A der Wirkung einer Elektricitätsmenge m unterworfen ist, die sich nacheinander in zwei Punkten P und P′ des Dielektrikums befindet, so wird das Potential, welches der in A inducierten Ladung entspricht, das gleiche im Punkte P′ im ersten Falle wie im Punkte P im zweiten Falle sein.

Wir bemerken zunächst, dass man einen beliebigen Punkt des Dielektrikums immer als das Centrum einer unendlich kleinen leitenden Kugel betrachten kann, weil die Elektricitätsmenge, welche diese Kugel erhält, immer Null ist und immer in deren Centrum ein Potential gleich Null liefert.

Ist der Körper A in Verbindung mit dem Erdboden, so wird man die beiden folgenden Gleichgewichtszustände zu betrachten haben: 1. Kugel P (Potential U, Ladung m), Kugel P′ (Potential V, Ladung o), Körper A (Potential o, Ladung x); 2. Kugel P (Potential V′, Ladung o), Kugel P′ (Potential U′, Ladung m), Körper A (Potential o, Ladung x'.)

Wendet man das Theorem auf diese beiden Zustände an, so erhält man:

$$mV' = mV$$

oder

$$V = V'.$$

Wenn der Körper A isoliert ist, so ist sein Potential nicht gleich Null, seine gesammte Elektricitätsmenge ist aber in den beiden Zuständen gleich Null und das Schlussresultat ist dasselbe.

195. Das erwähnte Theorem von Clausius ist ein specieller

Fall eines allgemeineren Satzes([1]), der selbst wieder als eine Erweiterung einer bekannten Gleichung von Gauss betrachtet werden kann. Dieser allgemeinere Satz lautet in der ihm von Legebecke gegebenen Fassung: Über jeder der geschlossenen, C_1, C_2 . . ., im allgemeinen C genannten Oberflächen, ist eine Schichte von einem gewissen Agens ausgebreitet, das nach den gewöhnlichen Gesetzen anziehend oder abstoßend wirkt und zwar wird die Dichte des Agens in Punkten von C_1, $C_2 \ldots C$ dargestellt durch h_1, $h_2 \ldots h$ und das Potential aller dieser Schichten in denselben Punkten durch V_1, $V_2 \ldots V$. Zweitens werden die Schichten auf C_1, $C_2 \ldots C$ durch Schichten mit den Dichtigkeiten: $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2 \ldots \mathfrak{h}$ ersetzt, deren Potentiale $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}$ sind. Es gilt dann allgemein, wenn mit $d\sigma_1$, $d\sigma_2 \ldots d\sigma$ die Oberflächenelemente von C_1, C_2 . . C bezeichnet werden:

$$\sum \int V . \mathfrak{h} . d\sigma = \sum \int \mathfrak{V} . h . d\sigma$$

Sind die Körper Leiter, die auf zwei verschiedene Weisen mit Elektricität geladen sind und influencierend auf einander einwirken, dann drücken V und $\mathfrak{V}$ die Potentialniveaus der Leiter aus und sind constant; dann geht die obige Gleichung in jene von Clausius über. Die hier angegebene Relation, welche in ähnlicher Weise wie die von Clausius aufgestellte erwiesen werden kann, ist — wie oben bemerkt — eine Erweiterung der Beziehung

$$\Sigma m V' = \Sigma m' V,$$

die bereits von Gauss([2]) gegeben wurde und aussagt, dass bei zwei elektrischen Systemen die Summe der Producte der einzelnen Massen des ersten Systemes in die bezüglichen Potentialwerte des zweiten Systemes in jenen Punkten, welche die erwähnten Massen einnehmen, der analogen Summe, die sich

([1]) Man sehe: G. J. Legebecke, über einen allgemeinen Satz von H. R. Clausius in Bezug auf elektrische Influenz. Wiedemanns Annalen, Bd. X. Heft 1, 1880.

([2]) Gauss, allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte. §. 19.

auf die Massen des zweiten Systemes bezieht, gleich ist.

Dieser Satz ist einleuchtend, wenn man erwägt, dass $\Sigma m'V$ und $\Sigma mV'$ die Arbeit bezeichnet, welche man aufwenden muss, um respective das eine System dem anderen gegenüberzubringen, und zwar vom Unendlichen bis in jene Lage, welche sie schließlich einnehmen; die beiden Systeme Σm und $\Sigma m'$ sind hierbei starr vorausgesetzt: es ist klar, dass in beiden Fällen die geleistete Arbeit dieselbe ist.

196. Beziehungen zwischen den Ladungen und den Potentialen. (1)

Bezeichnen wir mit $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ die Conductoren, deren Ladungen $M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$ und deren Potentiale $V_1, V_2, V_3 \ldots V_n$ seien.

Nehmen wir zuerst an, alle Conductoren seien isoliert, im neutralen Zustande und auf dem Potentiale Null. Geben wir nun dem Leiter A_1 eine positive Ladung gleich eins, so wird sein Potential α_{11} und jene der anderen Leiter sind bezüglich $\alpha_{21}, \alpha_{31} \ldots \alpha_{\ 1}$. Diese Größen hängen von der Gestalt und relativen Lage der Leiter ab. Man kann nach Maxwell α_{11} den Potentialcoefficienten von A_1 auf sich selbst, α_{21} den Potentialcoefficienten von A_1 auf A_2 u. s. w. nennen. Ertheilt man nun A_1 die Ladung M_1, so werden nach dem Principe der Superposition elektrischer Systeme die Potentiale der Leiter ausgedrückt durch:

$$\alpha_{11}M_1,\ \alpha_{21}M_1,\ \alpha_{31}M_1 \ldots \alpha_{n1}M_1.$$

Nehmen wir nun an, man entlade A_1 und gebe A_2 die Elektricitätsmenge M_2, so werden die Potentiale

$$\alpha_{12}M_2,\ \alpha_{22}M_2,\ \alpha_{32}M_2 \ldots \alpha_{n2}M_2.$$

Und so kann man weiter gehen. Erhalten alle Conductoren gleichzeitig ihre bezüglichen Ladungen, so kann man, um das Potential jedes Leiters auszudrücken, eine Gleichung von der nachfolgenden Form aufstellen

(1) Man sehe Maxwell, a Treatise on Electricity and Magnetism. 1. Bd. pg. 88—94 (deutsche Übersetzung pg. 104.) und Mascart et Joubert, Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme (pg. 62—64).

$$V_p = \alpha_{p1} M_1 + \alpha_{p2} M_2 + \ldots + \alpha_{pn} M_n.$$

Man erhält so für das ganze System n ähnliche Gleichungen. Hieraus erkennt man, dass in einem elektrischen Systeme, welches im Gleichgewichte sich befindet, die Potentiale der verschiedenen Leiter linear als Functionen der Elektricitätsmengen ausgedrückt werden können.

Der Coefficient α_{pp} drückt das Potential des Leiters A_p aus, wenn er mit der Elektricitätseinheit geladen wird, während alle anderen Conductoren im neutralen Zustande sich befinden; α_{qp} bezeichnet das Potential, welches gleichzeitig einer der Conductoren A_q annimmt.

Aus dem erweiterten Theoreme von Clausius folgt leicht die Beziehung $\alpha_{pq} = \alpha_{qp}$.

Denn betrachten wir die beiden Zustände, in welchen jeder der Conductoren A_p und A_q mit der Elektricitätseinheit geladen ist, während alle anderen im neutralen Zustande sich befinden, so geht die früher (pg. 347) aufgestellte Gleichung:

$$\Sigma V . \mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{V} . M$$

unmittelbar über in

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp}.$$

Nach der im Paragraphen 189 gemachten Bemerkung müssen alle Coefficienten α positiv sein und ein Coefficient wie α_{qp} ist niemals größer als α_{pp} oder α_{qq}. Die in der Formel $\alpha_{pq} = \alpha_{qp}$ ausgesprochene reciproke Eigenschaft der elektrischen Wirkung eines Conductors auf einen anderen wurde von Helmholtz und W. Thomson ausgesprochen.

Setzen wir die Leiter A_p und A_q unendlich klein voraus, so erhalten wir die folgende reciproke Eigenschaft zweier Punkte: Das Potential in einem Punkte A_p, welches der Elektricitätseinheit entspricht, die im Punkte A_q sich bei Anwesenheit eines Leitersystems befindet, ist eine Function der Lagen von A_p und A_q, in welche die Coordinaten von A_p und A_q in derselben Weise eintreten, so dass der Wert der Function nicht geändert wird, wenn man A_p und A_q vertauscht; diese Function ist unter dem Namen der Greenschen Function bekannt.

197. Löst man die obigen Gleichungen bezüglich der Größen M auf, so erhält man:

$$M_p = \gamma_{p1} V_1 + \gamma_{p2} V_2 \ldots + \gamma_{pn} V_n.$$

Es ergeben sich n^2 Coefficienten. Der Coefficient γ_{pp} drückt die Elektricitätsmenge aus, welche man dem Conductor A_p geben muss, um ihn auf das Potential Eins zu bringen, während alle anderen das Potential Null haben. Man nennt diesen Coefficienten bekanntlich die Capacität des Leiters A_p. Er hängt von der Form und Lage aller Conductoren des Systems ab. Der Coefficient γ_{qp} drückt die Elektricitätsmenge aus, welche gleichzeitig durch Induction der in Verbindung mit der Erde stehende Leiter A_q aufnimmt; man nennt ihn den Inductionscoefficienten von A_q bezüglich A_p.

Hätte man zwei aufeinanderfolgende Zustände, in welchen jeder der Leiter A_p und A_q auf die Potentialeinheit gebracht wurde, während die anderen Leiter mit der Erde in Verbindung stehen, so erhält man aus dem Theorem von Clausius wieder:

$$\gamma_{pq} = \gamma_{qp}.$$

Aus den früher gemachten Bemerkungen, welche auf die Influenzwirkung eines geladenen Leiters auf andere, die mit der Erde in Verbindung stehen, Bezug hatten, folgt: 1. Die Coefficienten der Capacität wie γ_{pp} sind sämmtlich positiv; 2. die Inductions-Coefficienten sind alle negativ; 3. es ist absolut genommen die Summe aller jener Coefficienten, welche sich auf die von einem und demselben Leiter ausgeübte Inductionswirkung beziehen, niemals größer als die Capacität des inducierenden Leiters selbst, oder in Zeichen ausgedrückt, ist:

$$\gamma_{pp} > \gamma_{1p} + \gamma_{2p} + \gamma_{3p} + \cdots + \gamma_{np}.$$

Würde der Leiter A_q, welcher mit der Erde in Verbindung steht, vollständig den Leiter A_p einschließen, dann wäre

$$\gamma_{pp} = - \gamma_{qp};$$

die anderen Coefficienten $\gamma_{1p}, \gamma_{2p} \ldots \gamma_{np}$ wären Null, da auf diese Leiter $A_1, A_2 \ldots A_n$ keine Inductionswirkung ausgeübt wird.

Dass, wenn im elektrischen Felde nur ein Conductor vorhanden ist, sein Potentialcoefficient auf sich selbst gleich dem reciproken Werte seiner Capacität ist, ist selbstverständlich.

198. Es soll im Nachfolgenden gezeigt werden, welchen großen Vortheil die vorstehenden Betrachtungen bieten, wenn es sich um die näherungsweise Lösung eines complicierteren Problemes handelt; es kann z. B. die Gestalt der Conductoren so compliciert sein, dass eine strenge mathematische Behandlung nicht platzgreifen kann.

Nehmen wir z. B. an, zwei sehr kleine Leiter A_1 und A_2 befänden sich in der sehr großen mittleren Entfernung r voneinander. K_1 und K_2 seien ihre Capacitäten, wenn sie einzeln im elektrischen Felde sich befinden würden. Wir stellen uns die Frage, durch welche Gleichungen die Capacitäten dieser beiden Conductoren ausgedrückt werden, wenn sie gleichzeitig im elektrischen Felde in der Entfernung r voneinander sich befinden würden.

Es ist jedenfalls

$$\alpha_{11} = \frac{1}{K_1}, \quad \alpha_{12} = \frac{1}{r}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{K_2}.$$

Man erhält daher nach den früheren Formeln:

$$V_1 = \frac{M_1}{K_1} + \frac{M_2}{r}, \quad V_2 = \frac{M_1}{r} + \frac{M_2}{K_2}.$$

Rechnet man aus den beiden letzten Gleichungen M_1 und M_2, so ergeben sich für diese Größen die Werte

$$M_1 = rK_1 (V_1 r - V_2 K_2)(r^2 - K_1 K_2)^{-1}$$
$$M_2 = rK_2 (V_2 r - V_1 K_1)(r^2 - K_1 K_2)^{-1}$$

Wendet man nun die früher aufgestellte Beziehung

$$M_p = \gamma_{p,1} V_1 + \gamma_{p,2} V_2 + \cdots + \gamma_{p,n} V_n$$

auf die beiden Conductoren an, so erhält man die Gleichungen:

$$\gamma_{11} = K_1 (1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1}$$
$$\gamma_{22} = K_2 (1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1}$$
$$\gamma_{12} = - K_1 K_2 r^{-1} (1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1}$$

γ_{11}, γ_{12} stellen die Capacitäten der beiden Conductoren dar, wenn sie statt einzeln im elektrischen Felde zu sein, sich in

demselben gleichzeitig in der Entfernung r von einander befinden. Der Coefficient γ_{12} drückt den Inductions-Coefficienten von A_2 bezüglich A_1 aus.

Bezüglich anderer Anwendungen der allgemeinen in §. 196 und §. 197 angegebenen Sätze sei der Leser auf das berühmte Werk von Maxwell verwiesen. (1)

199. Theorem von Earnshaw: Ein elektrisierter Körper kann in einem elektrischen Felde nicht im stabilen Gleichgewichte sich befinden.

Wir wollen dieses wichtige, von Earnshaw herrührende Theorem in nachfolgender Weise (2) ableiten:

Ein elektrisierter Körper A befinde sich in einem elektrischen Felde, das von außerhalb liegenden elektrischen Massen B hervorgerufen werde; sowohl der Körper A als auch das System B sei von der Art, dass sich die Elektricität auf ihnen in keinerlei Weise verschieben kann; dieser Fall entspricht dem von elektrisierten Isolatoren.

Bezeichnen wir mit m die Elektricitätsmenge eines Raumelementes von A in einem Punkte P, in welchem das Potential der äußeren Massen V ist. Es ist die elektrische Energie des Körpers A in dem Felde

$$W = \Sigma m V.$$

Damit A sich im stabilen Gleichgewichte befinde, muss in einer ganz beliebigen Richtung r die Derivierte $\frac{\partial W}{\partial r}$ entweder Null oder positiv sein.

Die Coordinaten von P seien x, y, z; ξ, η, ζ seien die Coordinaten eines Punktes P_0, der im Inneren des Körpers A ist; a, b, c seien die Coordinaten des Punktes P bezüglich dreier neuen Axen, die parallel zu den ersteren sind und durch den Punkt P_0 hindurchgehen; man hat daher:

$$x = a + \xi$$
$$y = b + \eta$$
$$z = c + \zeta$$

(1) Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus; deutsch von Dr. B. Weinstein, p. 113 u. f.

(2) Mascart und Joubert, l. c. p. 56 — p. 59.

V kann als eine Function von a, b, c und von ξ, η, ξ betrachtet werden. Ist der Körper A gezwungen, sich parallel mit sich selbst zu bewegen, so wird man haben:

$$dx = d\xi,\ dy = d\eta,\ dz = d\zeta$$

und es wird demzufolge sein:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}.$$

Da nun V das Potential äußerer Massen ist, so hat man

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} =$$

Daraus ersieht man, dass die Energie W eine Function der Coordinaten von P_0 ist und diese Function genügt der Gleichung von Laplace. Man kann annehmen, dass der Punkt P_0 im Innern einer Kugel von so kleinem Radius r bleibe, dass der betrachtete Körper A keiner der äußeren Massen begegnet.

Für jede Verschiebung, die parallel zu einem Halbmesser dieser Kugel stattfindet, wird die Variation der Energie sein:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial r} dr.$$

Wenden wir nun die Gleichung:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int \Delta V . dv$$

auf die Oberfläche der Kugel an, so erhalten wir

$$\int \frac{\partial W}{\partial r} dS = \int \Delta W . dv = 0.$$

Da das Oberflächenintegral Null sein muss, so folgt, dass $\frac{\partial W}{\partial r}$ für gewisse Richtungen negativ, für andere positiv sein müsse; deshalb ist der Körper A nicht im Gleichgewichte und er strebt gegen Stellen sich zu verrücken, für welche die Energie W sich vermindert.

Im Gleichgewichte ist A, wenn $\frac{\partial W}{\partial r}$ immer Null ist; d. h.

wenn die Energie constant ist oder durch ein Maximum oder Minimum geht. Man hat dann

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial x} = \sum m \frac{\partial V}{\partial x} = -\sum m X = 0$$

und in analoger Weise:

$$\Sigma m Y = \Sigma m Z = 0.$$

Die Componenten X, Y, Z der Kraft des Feldes, das durch die äußeren Massen erzeugt wurde, können als Functionen der steigenden Potenzen von a, b, c und der Kraftcomponenten X_0, Y_0, Z_0, die sich auf den Punkt P_0 beziehen, entwickelt werden, und man erhält so:

$$X = X_0 + H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots$$

H_1, H_2 ... H_n sind Functionen der Coordinaten a, b, c vom 1., 2., ... n. Grade. Wir haben nun:

$$\Sigma m X = \Sigma m (X_0 + H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = 0.$$

Soll diese Gleichung erfüllt sein, so müssen zuerst alle Derivierten von X Null sein, da wir die Lage des Punkt P_0 willkürlich angenommen haben; dann muss auch sein:

$$\Sigma m X_0 = X_0 \Sigma m = 0,$$

d. h. entweder muss die gesammte elektrische Masse des Körpers A Null sein oder es müssen die Kraftcomponenten X_0, Y_0, Z_0 selbst Null sein.

Soll also ein elektrisierter Körper in einem elektrischen Felde im Gleichgewichte sein, so muss entweder die Kraft des Feldes Null sein oder es muss das Feld ein gleichförmiges sein, wobei noch die Bedingung erfüllt werden muss, dass die algebraische Summe der Elektricitätsmengen, welche der Körper A besitzt, Null ist. In einem homogenen oder gleichförmigen Felde, in welchem die Kraftlinien parallel zueinander verlaufen, sind nämlich alle Derivierten der Kraft Null.

In den vorstehenden Betrachtungen haben wir angenommen, dass die Elektricität auf A sich nicht bewegen könne und dass auch die äußeren Massen ein starres System bilden. Offenbar

ist das Theorem umsomehr giltig, wenn wir es mit leitenden Körpern zu thun haben; denn wenn das stabile Gleichgewicht nicht besteht, wenn die einzelnen Theile des Systems aneinander gebunden sind, so existiert es umsoweniger, wenn man diese Verbindungen aufhebt, z. B. wenn die elektrisierten Körper zum Theile Leiter sind, welche der Verschiebung der elektrischen Massen einen größeren Spielraum gewähren; die freie Bewegung der elektrischen Massen kann nur das labile Gleichgewicht des Körpers A vergrößern.

200. Bevor wir zu den weiteren mannigfaltigen Anwendungen der Potentialtheorie auf elektrostatische Probleme übergehen, betrachten wir die Gleichgewichtspunkte und -Linien. Sei V_0 das Potential in einem fixen Punkte P_0. Das Potential V in einem Nachbarpunkte P, dessen Coordinaten auf Axen bezogen werden, die durch den ersten Punkt hindurchgehen, und welche mit x, y, z bezeichnet werden mögen, kann durch die Formel von Maclaurin ausgedrückt werden, und zwar als Function der steigenden Potenzen der Coordinaten; man hat

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots,$$

wobei H_1 eine Function vom ersten Grade der Coordinaten des Punktes P, H_2 eine homogene Function vom zweiten Grade u. s. f. ist. Wenn die Function H_1 gleich Null ist, d. h. wenn die drei partiellen Derivierten des Potentiales Null sind, also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = o \text{ ist,}$$

dann ist der Punkt P_0 ein singulärer Punkt der Niveaufläche V_0; die Kraft in ihm ist dann Null, d. h. er ist ein Gleichgewichtspunkt. Für nahe Punkte kann man gegen H_2 die Functionen eines höheren Grades vernachlässigen und die Gleichung der Niveaufläche reduciert sich auf

$$V = V_0 + H_2.$$

Die Niveaufläche im Punkte P_0 ist tangential zu einem Kegel vom zweiten Grade, dessen Gleichung $H_2 = o$ ist.

Ist die Function H_2 gleich Null und ist H_n die erste Function der Entwicklung, welche nicht verschwindet, so ist die Gleichung

$$H_n = o$$

jene eines Kegels vom *n*ten Grade, der die Niveaufläche im Punkte P_0 berührt. Dieser Kegel wird gebildet aus *n* oder einer geringeren Zahl Fächer, entsprechend einer gleichen Fächerzahl der Niveaufläche. Den Durchschnitt dieser Kegelfläche mit einer um P_0 gelegten Kugel nennt man eine Knotenlinie.

Wenn die Fächer des Kegels sich nicht schneiden, so ist dies auch der Fall mit denen der Niveauflächen und P_0 ist ein alleinstehender Gleichgewichtspunkt.

Wenn die Fächer des Kegels sich schneiden, so ist jede Schnittlinie auch die Schnittlinie der entsprechenden Fächer der Niveaufläche und bildet eine Gleichgewichtslinie, die bis zum Punkte P_0 reicht.

Theorem. Wenn die Niveaufläche im Punkte P_0 aus zwei Fächern besteht, welche sich schneiden, so findet das Durchschneiden der Fächer unter einem rechten Winkel statt.

Es ist zunächst klar, dass in jedem Punkte der Schnittlinie die Kraft Null ist, weil sie nicht gleichzeitig normal zu beiden Fächern sein kann. Findet der Schnitt in der Oberfläche eines Conductors statt, so ist in den entsprechenden Punkten keine Elektricität vorhanden; die Schnittlinie ist eine neutrale Linie.

Andererseits nehmen wir die gemeinschaftliche Tangente zur Axe der Z und als Axe der Y die Tangente zu einem der Fächer. Da diese beiden Richtungen auf einer Niveaufläche sind, so hat man nach früheren Sätzen

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 = o, \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = o.$$

Da nach dem Theorem von Laplace die Summe der drei zweiten partiellen Derivierten Null ist, so folgt:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 = o,$$

d. h. die Axe der X ist ebenfalls tangential zur Niveaufläche;

es schneiden sich daher die beiden Fächer unter einem rechten Winkel.

Diese Betrachtungsweise setzt voraus, dass die Function H_2 endlich ist. Wenn diese Function auch verschwindet, so reduciert sich die Gleichung von Laplace immer auf

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = o,$$

wenn man zur Z-Axe die Schnittlinie wählt. Bezeichnen wir mit r die Entfernung des Punktes P von der Axe der Z und setzen wir

$$x = r\ cos\theta$$
$$y = r\ sin\theta,$$

so wird die Gleichung von Laplace:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = o.$$

Das Integral dieser Gleichung entwickelt nach steigenden Potenzen von r ist

$$V = V_0 + A_1 r\ cos(\theta + \alpha_1) + A_2 r^2\ cos\ (2\theta + \alpha_2) + \ldots + A_n\ r^n\ cos(n\theta + \alpha_n).$$

Auf der Gleichgewichtslinie hat man $A_1 = o$. Wenn n die Ordnung des ersten nicht verschwindenden Gliedes ist, so erhält man:

$$V = V_0 + A_n\, r^n\ cos\ (n\theta + \alpha_n) + \ldots;$$

die Gleichung der Berührungsfläche zur Niveaufläche im Punkte P_0 reduciert sich auf:

$$cos\ (n\theta + \alpha_n) = o,$$

und stellt n Ebenen dar, welche durch die Schnittlinie gehen, und die aufeinanderfolgend die gleichen Winkel $\frac{\pi}{n}$ bilden.

In diesem Falle besteht die Niveaufläche aus n Fächern, welche sich successiv unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ schneiden(¹).

(¹) Man sehe die Abhandlung **Rankine's** „Summary of the Properties of certain Stream Lines" Phil. Mag. Okt. 1864.

Betrachten wir als Beispiel die Oberfläche eines Conductors A, der zum Theil mit positiver, zum Theil mit negativer Elektricität geladen ist; die Trennungslinie der beiden Schichten ist eine neutrale Linie. Die Kraft ist Null in irgendeinem Punkte der neutralen Linie und es gibt in dem Dielektrikum eine andere Niveaufläche, welche den Conductor längs dieser Linie normal schneidet.

Man wird bemerken, dass diese besondere Niveaufläche die Kraftlinien, welche vom Conductor A ausgehen, von jenen trennt, welche zu denselben hingehen. Man kann sie daher, wenigstens in einem Theile ihrer Ausdehnung, als eine Fläche betrachten, welche von Kraftlinien begrenzt wird.

201. Theorie der Leydnerflasche. Eine Leydnerflasche ist, wie wir gesehen haben, ein Condensator, in welchem die eine der Belegungen von der anderen nahezu vollständig eingeschlossen ist; man kann auf diesen Apparat, wenigstens in angenäherter Weise, die Theoreme in Anwendung bringen, welche sich auf geschlossene Conductoren beziehen. Die innere Belegung der Flasche ist mit einer Elektricitätsquelle, der das Potential V_1 zukommt, in Verbindung gesetzt, sie ladet sich mit einer gewissen Elektricitätsmenge M_1; wenn die äußere Belegung isoliert ist, nimmt sie auf ihrer Innenseite eine Ladung $-M_1$, auf ihrer Außenseite eine Ladung $+M_1$ an. Setzt man die äußere Belegung in Verbindung mit dem Erdboden, so verschwindet die Ladung $+M_1$, so dass nun die Belegungen der Flasche mit gleichen Quantitäten entgegesetzter Elektricitätsmengen geladen sind.

Um die Ladung dieses Apparates zu berechnen, wollen wir zuerst annehmen, dass die Glasschichte, welche die Belegungen trennt, keine andere Rolle hat, als eine absolute Isolierung herzustellen. Seien A die innere Belegung, deren Potential V_1, B die äußere Belegung und auf ihr das Potential V_2.

Die correspondierenden Elemente der beiden Belegungen haben gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Ladungen und wenn ihre Distanz e sehr klein ist, so wird die Dichte der Elektricität auf der inneren Belegung durch die Beziehung (175)

$$4\pi\mu_1 = -\frac{V_2-V_1}{e} = \frac{V_1-V_2}{e}$$

gegeben sein.

Die gesammte Elektricitätsmenge M_1, welche sich auf der inneren Belegung ausgebreitet hat, ist:

$$M_1 = \int \mu_1 \, d\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{e}.$$

Wenn die Dicke des isolierenden Mediums constant ist, so bleibt einfach:

$$M_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e} \int d\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e} S_1.$$

Die Ladung der Flasche ist daher proportional der Oberfläche S_1, der Differenz der Potentiale, welche auf den Belegungen herrschen und umgekehrt proportional der Dicke der isolierenden Schichte.

Wird die äußere Belegung zum Erdboden abgeleitet, so ist ihr Potential Null und man hat:

$$M_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e}.$$

Dieser Ausdruck ist derselbe wie jener, welcher für einen Condensator, der aus einer Kugel gebildet ist, welche von einer concentrischen nicht isolierten Kugelschale umgeben ist, gilt. Denn wir haben (161) gesehen, dass das Potential der Kugel durch die Formel

$$V_1 = \frac{M_1}{R_1} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2}$$

gegeben wurde, woraus man

$$M_1 = \frac{V_1 \cdot 4\pi R_1^2}{4\pi (R_2 - R_1)} \times \frac{R_2}{R_1}$$

oder

$$M_1 = \frac{V_1 \cdot S_1}{4\pi e} \times \frac{R_1 + (R_2 - R_1)}{R_1} = \frac{V_1 S_1}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{R_1}\right)$$

erhält; diese Formel reduciert sich auf die früher erhaltene, wenn man das Verhältnis $\frac{e}{R_1}$ gegen die Einheit vernachlässigt.

202. Man kann überhaupt für eine Leydnerflasche von was immer für einer Gestalt und von constanter Dichte einen sehr

genäherten Ausdruck für die Ladung erhalten, der jenem für den sphärischen Condensator analog ist.

Wenn man von der inneren Belegung A (Fig. 99) gegen die äußere Belegung B vorrückt, ändert sich das Potential in stetiger Weise von V_1 zu V_2. Man kann V_2 als eine Function der normalen Dicke e des isolierenden Mediums und der Derivierten des Potentiales in der isolierenden Schichte betrachten; wenn man die Entwicklung auf Glieder zweiter Ordnung beschränkt, ergibt sich:

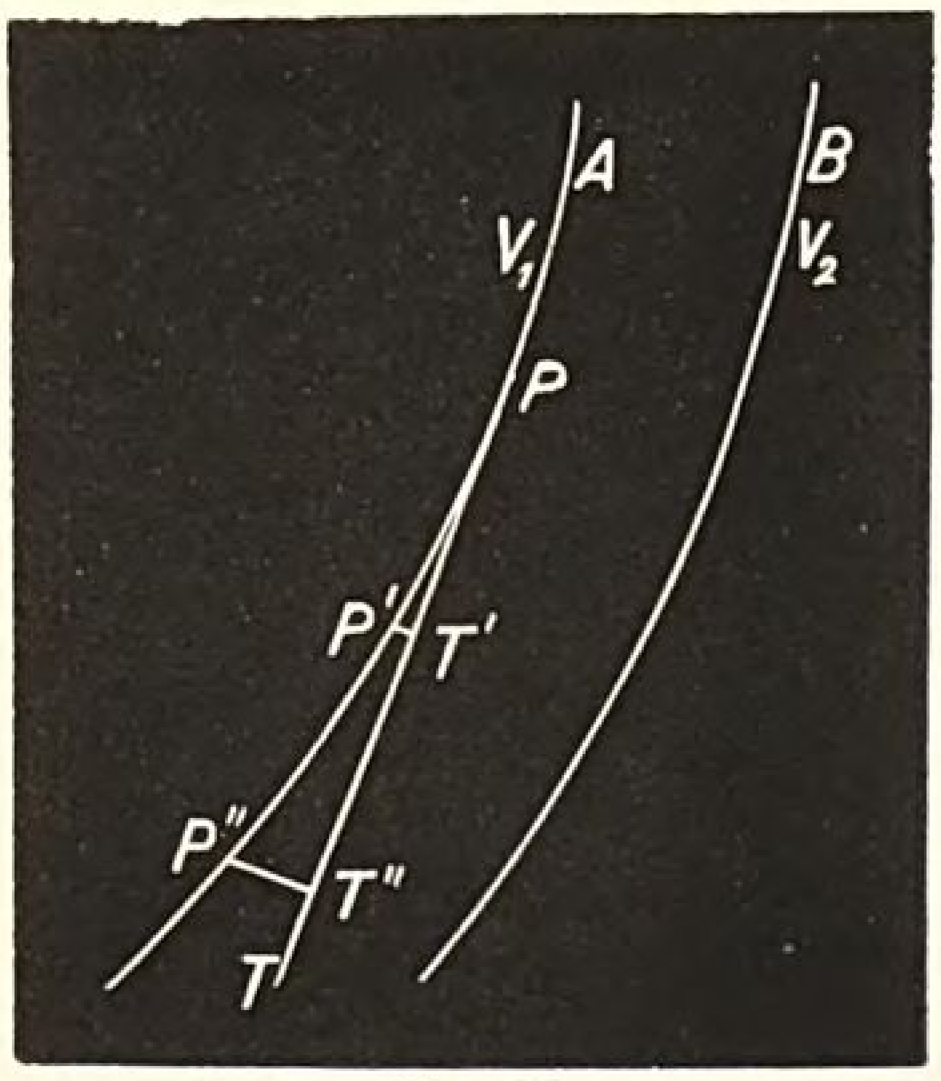


Fig. 99.

$$(1) \qquad V_2 = V_1 + e\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{e^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}.$$

In einem Punkte P der Oberfläche des Leiters A zeichnen wir drei rechtwinklige Axen, die eine in der Richtung der Normale und die beiden anderen (X- und Y-Axe) tangentiell zu den beiden in dem betreffenden Punkte der Oberfläche gezeichneten Hauptschnitten. Die elektrische Dichte ist im isolierenden Medium Null und man hat dort überall $\Delta V = o$ oder:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = o,$$

woraus man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \text{ erhält.}$$

Sei PP'' der Hauptschnitt der Oberfläche, welcher der X-Axe parallel ist, und PT die Tangente an denselben; betrachten wir auf dieser Geraden zwei Punkte T' und T'', die unendlich benachbart sind und deren Entfernungen vom Punkte P δx und $2\delta x$ betragen, und nennen wir V' und V'' die Potentiale in diesen beiden Punkten, so hat man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\delta \frac{\delta V}{\delta x}}{\delta x} = \frac{(V''-V')-(V'-V_1)}{(\delta x)^2} = \frac{V''-2V'+V_1}{(\delta x)^2}.$$

Die Lothe T'P', T''P'', welche bis zum Durchschnitte mit der Curve gezogen werden, sind näherungsweise durch die Formeln:

$$T'P' = \frac{(\delta x)^2}{2R}, \quad T''P'' = \frac{4(\delta x)^2}{2R}$$

ausgedrückt, wobei R den Krümmungsradius des betrachteten Hauptschnittes bedeutet.

Für diese unendlich benachbarten Punkte T' und T'' der Oberfläche kann man die Entwicklung (1) auf die beiden ersten Glieder beschränken, wodurch man erhält:

$$V' - V_1 = T'P' \times \frac{\partial V}{\partial n},$$

$$V'' - V_1 = T''P'' \times \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Man erhält daraus

$$V'' - 2V' + V_1 = (T''P'' - 2T'P')\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{(\delta x)^2}{R}\frac{\partial V}{\partial n},$$

und demzufolge:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Man erhält in derselben Weise, indem man den zweiten Hauptschnitt ins Auge fasst und den Krümmungsradius desselben R' nennt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{R'}\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Wenn man diesen Wert in die Gleichung (1) substituiert, erhält man:

$$V_2 - V_1 = e\frac{\partial V}{\partial n}\left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Ersetzt man $\frac{\partial V}{\partial n}$ durch seinen Wert $-4\pi\mu$, so erhält man

$$V_1 - V_2 = 4\pi\mu e\left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Machen wir die ganze Entwicklung nochmals, gehen aber jetzt von der Fläche B aus und schreiten in der Normale bis zur Oberfläche A vor. Wir erhalten nun, wenn wir die elektrische Dichtigkeit an dem betreffenden Punkte der Fläche B mit μ' bezeichnen, wenn wir ferner durch r und r' die Krümmungsradien der zweiten Fläche darstellen:

$$V_2 - V_1 = 4\pi\mu' e\left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right].$$

Daraus ergeben sich bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung die Formeln:

$$\mu = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] \quad \text{und}$$

$$\mu' = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right].$$

Sind die beiden Oberflächen an den betreffenden Stellen so gestaltet, dass

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$$

ist, so sind die Dichten der Elektricität an den einander gegenüberstehenden Stellen entgegengesetzt gleich; der Unterschied zwischen μ und $-\mu'$ würde nur noch durch Glieder höherer Ordnung ausgedrückt sein.

Setzen wir im Speciellen $V_2 = o$, so ist:

$$V_1 = 4\pi\mu e\left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] = -4\pi\mu' e\left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right]$$

und daraus:

$$\mu = \frac{V_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]$$

$$\mu' = -\frac{V_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right].$$

Betrachten wir z. B. die erste Formel, so ist dieser Ausdruck, welcher die elektrische Dichte im Punkte P der Belegung als Function der Dicke der isolierenden Schichte darstellt, derselbe, welchen wir für die Kugel erhalten haben.

Die Ladung M_1 der Belegung ist gleich $\int \mu d\sigma$. Wenn die Dicke constant ist und wenn die Oberfläche von der Beschaffenheit ist, dass die Summe der reciproken Werte der Krümmungsradien dieselbe in allen Punkten ist, so wird diese Ladung ausgedrückt durch:

$$M_1 = \int \mu d\sigma = \frac{V_1 S_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Für die Capacität der Leydnerflasche erhalten wir dann den Ausdruck:

$$C_1 = \frac{S_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$ (1)

203. Weitere Bemerkungen.

Da bei einem ebenen Condensator und bei der Franklin'schen Tafel die gegenüberstehenden Belegungen in ihrer ganzen Ausdehnung parallel sind, so gelten die Gleichungen, welche wir für die Potentialdifferenzen und die Dichten aufgestellt haben, für die ganzen Flächen; dabei sind aber die Stellen in der Nähe des Randes auszunehmen, weil dort die höheren Differentialquotienten so groß werden, dass sie nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Clausius (2) hat diesen Fall an einer Franklin'schen Tafel mit kreisförmiger Belegung studiert.

Bei dem ebenen Condensator und der Franklin'schen Tafel tritt ferner die Vereinfachung ein, dass das zweite Glied in den vorigen Entwicklungen Null wird, weil die Krümmungsradien unendlich werden. — Bei der Leydnerflasche, deren Belegungen wir parallel voraussetzen wollen, sind die Krümmungsradien nur um den Abstand e voneinander verschieden; da aber das die Krümmungsradien enthaltende Glied das höchste in den Gleichungen noch berücksichtigte ist, so kann in ihm ein Unterschied, der im Verhältnis zu seiner Größe wieder nur von der Ordnung e ist, vernachlässigt werden.

(1) Die hier für die Leydnerflasche aufgestellten Gleichungen wurden bereits von Green in seiner Abhandlung: „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism" aufgestellt.

(2) Pogg. Ann. Bd. 86.

Die Curven, in denen eine Normalebene die beiden Belegungen schneidet, verhalten sich insoferne entgegengesetzt, weil die eine nach außen convex, die andere concav ist; die Krümmungsradien sind deshalb entgegengesetzt gleich und wir erhalten, dies zusammenfassend, die Formeln:

$$\mu = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]$$

$$\mu' = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e}\left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Hätten die beiden Flächen, welche wir betrachtet haben, eine andere Lage, als die in der Fig. 99 angegebene, so müsste dies in dem Vorzeichen der Krümmungshalbmesser Berücksichtigung finden.

Aus der Art unserer Ableitung ist ersichtlich, dass die obigen Gleichungen nur dann Geltung haben, wenn an der betrachteten Stelle der Abstand der Belegungen e gegen die Ausdehnung der Belegungen klein ist. Ferner darf man nach den früheren Erwägungen die obigen Formeln nur auf jene Stellen der Belegungen anwenden, welche von den Rändern der Belegungen soweit entfernt sind, dass man die Distanz vom Rande gegen die Dicke des isolierenden Zwischenmittels vernachlässigen kann.

Außerdem ist noch zu berücksichtigen, dass nicht immer beide Belegungen gleich weit reichen, ihre Ränder sich also senkrecht einander gegenüberstehen, doch übt dieser Umstand einen geringen Einfluss auf das Resultat.

Green hat ferner bei der Entwicklung der obigen Gleichungen nur jene Elektricitätsmengen berücksichtigt, welche auf den einander zugekehrten Flächen der beiden Belegungen sich vorfinden; doch können auch die Elektricitätsmengen, welche auf den einander abgewendeten Seiten der Belegungen vorhanden sind, Einfluss auf das Resultat nehmen.

Aus dem ist ersichtlich, dass den Green'schen Gleichungen noch Ergänzungsglieder beizufügen sind, wenn man die auf den Belegungen befindlichen Elektricitätsmengen genau darstellen will. Clausius(1) hat die erwähnten Umstände be-

(1) R. Clausius, die mechanische Behandlung der Elektricität. Braunschweig, 1879.

rücksichtigt und allgemeine Gleichungen aufgestellt, die sich auf Leydnerflaschen beziehen.

204. Bevor wir zur Behandlung des allgemeinen Falles übergehen, wollen wir noch den Fall eines sogenannten Kugelcondensators eingehender als es in §. 161 geschehen ist, erörtern. Stellen wir uns eine überall gleich dicke gläserne Hohlkugel vor (Dicke des Glases e), welche innen mit einer Stanniolschichte (Dicke β), außen mit einer eben solchen (Dicke γ) überkleidet ist; der Radius der inneren Grenzfläche der Glaskugel sei a. Es sei auf die innere Belegung irgendwie eine Elektricitätsmenge M gebracht, die äußere Belegung umfasse die Elektricitätsmenge N; auf den Grenzflächen der Belegungen befänden sich von der innersten angefangen die Elektricitätsmengen M_1, M_2, N_1, N_2, so dass man hat:

$$M = M_1 + M_2, \quad N = N_1 + N_2.$$

Bezeichnet man das Potential in der inneren Belegung F, in der äußeren G, so hat man nach den früheren Sätzen über das Potential von gleichförmigen Kugelbelegungen, was hier der Fall ist:

$$F = \frac{M_1}{l} + \frac{M_2}{a} + \frac{N_1}{a+e} + \frac{N_2}{a+e+\gamma},$$

wenn wir mit l den Abstand eines in der inneren Belegung liegenden Punktes vom Kugelmittelpunkte nennen. Ebenso ist G, wenn l dieselbe Bedeutung bezüglich eines in der äußeren Belegung liegenden Punktes hat:

$$G = \frac{M_1 + M_2 + N_1}{l} + \frac{N_2}{a+e+\gamma}.$$

Da innerhalb jeder Belegung das Potential einen constanten Wert haben muss, die Potentialwerte F und G daher von l unabhängig sein müssen, so folgt:

$$M_1 = 0, \quad M_2 + N_1 = 0$$

und daraus:

$$M_2 = M, \quad N_1 = -M, \quad N_2 = M + N,$$

somit:

$$F = \frac{e}{a(a+e)} M + \frac{M+N}{a+e+\gamma}$$

$$G = \frac{M + N}{a + e + \gamma}.$$

Rechnet man aus diesen Formeln die Werte von M und N und bezeichnet die Oberfläche der inneren Grenzfläche der Kugel s, so ergeben sich:

$$M = \frac{s}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{a}\right)(F - G),$$

$$N = \frac{s}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{a}\right)(G - F) + (a + e + \gamma)\,G.$$

Ist die äußere Belegung zur Erde abgeleitet, so ist $G = 0$; es wird

$$M = -N = \frac{s}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{a}\right)F$$

dieselbe Formel, welche wir schon früher (§. 161) erhielten, als wir $\frac{e}{a}$ gegen 1 vernachlässigten.

Der Gestalt nach ähnliche Gleichungen hat Clausius für eine Franklin'sche Tafel mit kreisförmigen Belegungen (¹) aufgestellt. Mit der von ihm erhaltenen Gleichung stimmt auch die für denselben Fall von Kirchhoff(²) berechnete Formel im wesentlichen überein.

205. Ableitung der allgemeinen Gleichungen für zwei beliebige Körper.

Statt der Belegungen wollen wir irgend zwei Conductoren A und B als gegeben ansehen; in der Nähe dieser Leiter können sich noch andere Leiter befinden, die entweder zur Erde abgeleitet seien oder — wenn sie isoliert sind — keine Elektricität mitgetheilt erhalten. Es sei A z. B. die Innenfläche, B die Außenfläche eines Condensators. Verbinden wir A mit der Erde und theilen B eine Ladung mit, so dass das ganze Potential auf letzterem Leiter den Wert V hat, während das Potential auf dem abgeleiteten Körper A Null ist. Die

(¹) l. c. p. 161.

(²) Kirchhoff „zur Theorie des Condensators" (Monatsberichte der Berliner Akademie, März 1877); auch „gesammelte Abhandlungen" 1. Abtheilung p. 101 (Leipzig 1881).

auf B und A befindlichen Elektricitätsmengen sind offenbar V proportional und sollen ausgedrückt werden durch $a'V$ und $-aV$, wobei a' und a Coefficienten sind, die von der Art des Condensators abhängen.

Nun heben wir die Verbindung des Körpers A mit der Erde auf, so dass beide Körper isoliert sind, und theilen jetzt den letzteren Ladungen mit, so zwar, dass auf jedem von ihnen das Potential um den Betrag V' vergrößert wird. Die hiezu nothwendigen Elektricitätsmengen sind dieselben, wie die, welche man anwenden müsste, um die beiden isolierten und anfangs unelektrischen Körper auf das Potentialniveau V' zu bringen. Diese Mengen werden ausgedrückt durch $\alpha V'$ und $\beta V'$, wobei α und β wieder von der Größe, Gestalt und Lage der Körper abhängen. Wir haben nun auf dem Körper A das Potential V' und die Ladung $-aV+\alpha V'$; auf dem Körper B das Potential $V+V'$ und die Ladung $a'V+\beta V'$.

Eine dieser vier Constanten a, a', α, β wollen wir durch die drei anderen ausdrücken; zu diesem Behufe nehmen wir als speciellen Fall den, dass

$$V+V'=0 \text{ oder } V'=-V \text{ wird.}$$

Die Zustände, welche die Körper nach den beiden Operationen haben, sind dieselben, wie jene, welche auf ihnen vorhanden wären, wenn der Körper B mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt worden wäre, während der isoliert gehaltene Körper A bis zum Potentiale $-V$ geladen worden wäre. Die unter diesen Umständen auf B durch Influenz erregte Elektricität muss nach der Riemann'schen Gleichung (§. 192) aV sein, so dass für diesen Fall $(V'=-V)$ man die Gleichung:

$$a'V-\beta V=aV$$

oder

$$a'=a+\beta$$

erhält.

Wir können nun, wenn wir zum allgemeinen Fall zurückkehren, sagen: auf A ist das Gesammtpotential V' und die Ladung $-aV+\alpha V'$; auf B das Gesammtpotential $V+V'$ und die Ladung $aV+\beta(V+V')$. Bezeichnen wir das schließliche

Potentialniveau des Körpers A mit F, jenes von B mit G, so ist

$$V' = F,\ V + V' = G,$$

und man hat nun $V = G - F$, somit die auf den beiden Körpern zuletzt vorhandenen Elektricitätsmengen:

$$M = a(F - G) + \alpha F,$$
$$N = a(G - F) + \beta G.$$

206. Bestimmung der Constanten a, α, β für Leydnerflaschen.

Würde die innere Belegung A einer Leydnerflasche abgeleitet, während die äußere Belegung B isoliert ist, so erhalten wir, weil $F = 0$ ist, für die auf A gebundene Elektricität

$$M = -aG.$$

Da sich die auf der inneren Belegung befindliche Elektricität ganz auf jener der äußeren Belegung zugewandten Fläche der inneren Belegung befindet, so kann man die früher entwickelte Green'sche Formel:

$$\mu = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]$$

anwenden, wobei man $V_2 = G$, $V_1 = 0$ setzt; man erhält in dieser Weise für die Elektricitätsmenge, welche auf der nach außen gekehrten Fläche der inneren Belegung sich vorfindet:

$$M = \int \mu d\sigma = -\int \frac{G}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ ein Element der erwähnten Fläche vorstellt. Ist die Glasdicke constant, so hat man einfach

$$\int \frac{d\sigma}{e} = \frac{s}{e},$$

unter s die Fläche der inneren Belegung verstanden; ist dies nicht der Fall, dann ist

$$\int \frac{d\sigma}{e} = \frac{s}{e_0},$$

wobei man unter e_0 einen Mittelwert der Glasdicke versteht. Es wird dann

$$M = -\frac{Gs}{4\pi e_0}\left[1 + \frac{e_0}{2s}\int\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)d\sigma\right].$$

M stellt in Wirklichkeit **nicht genau** die auf der Innenbelegung befindliche Elektricitätsmenge dar, weil die elektrische Dichte in der Nähe des Randes größer ist, als der Wert von μ angibt. Man muss deshalb zur obigen Formel ein Correctionsglied hinzufügen; dieses wird bei unendlich abnehmender Glasdicke auch unendlich klein; es ist daher das Glied von der Form λe_0; das Integralglied der zuletzt aufgestellten Gleichung hat aber auch die Eigenschaft mit der Glasdicke zugleich abzunehmen und wir können daher diese beiden Glieder zusammenfügen und schreiben:

$$M = -\frac{Gs}{4\pi e_0}(1+\delta);$$

durch Vergleichung dieser Gleichung mit

$$M = -aG$$

entsteht

$$a = \frac{s}{4\pi e_0}(1+\delta),$$

wodurch der Coefficient a soweit bestimmt ist, dass nur noch die im Verhältnisse zu 1 kleine Größe δ unbestimmt gelassen ist.

Gehen wir nun zur Bestimmung von α und β. Nach den obigen Betrachtungen stellen diese Coefficienten die Elektricitätsmengen dar, welche man den beiden Belegungen ertheilen muss, um sie auf den gemeinschaftlichen Potentialwert 1 zu bringen. Wäre nur eine Belegung vorhanden, so stellt $\alpha + \beta$ angenähert die Elektricitätsmenge vor, welche man dieser einen Belegung geben müsste, um sie bis zum Potential 1 zu laden. Es ist diese Summe, die klein gegen die Größe a ist, wenn auch nicht wirklich bestimmt, so doch auf einen einfacheren Fall zurückgeführt.

Das Verhältnis $\alpha : \beta$ hängt von der Krümmung der Belegungen vorzugsweise ab. Bei einer Franklin'schen Tafel, in welcher die Belegungen gleich groß sind und deren Ränder genau senkrecht gegenüberstehen, sind α und β gleich und z. B. wie man aus den von Clausius[1] angegebenen Formeln

[1] Clausius, l. c.

für kreisförmige Belegungen

$$M = \frac{s}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{a\pi}\left(\log \frac{17{\cdot}68\, a}{e} - 2\right)\right](F - G) + \frac{a}{\pi} F$$

$$N = \frac{s}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{a\pi}\left(\log \frac{17{\cdot}68\, a}{e} - 2\right)\right](G - F) + \frac{a}{\pi} G$$

ersieht, $\frac{a}{\pi}$. — Für den Kugelcondensator, den wir früher betrachteten, ist

$$\alpha = 0$$
$$\beta = a + e + \gamma.$$

Überhaupt ist, wenn die eine Belegung die andere vollkommen umschließt, allgemein $\alpha = 0$. — Umschließt die eine Belegung die andere nur theilweise, so ist der auf die innere Belegung bezügliche Coefficient α kleiner als β, welcher Coefficient sich auf die äußere Belegung bezieht.

207. Wir sind nun in der Lage, die Grundformeln für Leydnerflaschen in einfacher Weise darzustellen. Setzen wir abkürzungshalber

$$\frac{4\pi e}{1+\delta} = k,$$

unter e die mittlere Glasdicke verstanden, so ist:

$$M = \frac{s}{k}(F - G) + \alpha F,$$

$$N = \frac{s}{k}(G - F) + \beta G.$$

Der Coefficient k ist vorzugsweise von der Glasdicke abhängig und näherungsweise $4\pi e$.

Bei der Leydnerflasche ist gewöhnlich die äußere Belegung zur Erde abgeleitet, deshalb $G = 0$. Setzen wir noch

$$\frac{s}{k} + \alpha = \frac{s}{K},$$

also

$$K = \frac{4\pi e}{1 + \delta + \alpha \frac{4\pi e}{s}},$$

so erhalten wir in diesem zuletzt bezeichneten Falle

$$M = \frac{s}{K} F$$

$$N = -\left(\frac{s}{K} - \alpha\right) F$$

als Formeln für die Elektricitätsmengen auf den beiden Belegungen. Wir werden später sehen, dass diese von Clausius aufgestellten Gleichungen auch dann noch gelten, wenn man die Eigenschaften des zwischen den Belegungen befindlichen Dielektrikums in Rechnung zieht. Der Wert von K ist dann allerdings ein anderer. (¹)

208. Um die condensierende Kraft einer Leydnerflasche zu rechnen, muss man die elektrische Capacität C der Belegung A (Fig. 99), wenn sie allein vorhanden vorausgesetzt ist, suchen, was im allgemeinen ein sehr schwieriges Problem ist. Man wird dann durch Vergleichung der früher (§. 202) erhaltenen Capacität und der Capacität C für die condensierende Kraft erhalten:

$$\mathfrak{F} = \frac{S_1}{4\pi C} \cdot \frac{1}{e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Man sieht, dass in erster Annäherung die condensierende Kraft der Dicke der isolierenden Schichte umgekehrt proportional ist. Diese condensierende Kraft hängt von der Gestalt der Oberfläche ab; sie ist ein Maximum für einen sphärischen Condensator, weil die Kugel jener Körper ist, der bei gegebener Oberfläche die geringste elektrische Capacität besitzt.

Es soll hier bemerkt werden, dass in der Praxis die condensierende Kraft im allgemeinen kein großes Interesse bietet; von hauptsächlicher Wichtigkeit ist die Bestimmung der totalen Elektricitätsmenge, welche man auf einem Condensationsapparate ansammeln kann; wenn die isolierende Schichte von constanter Dicke ist, so hängt die Gesammtladung nur von der Größe der Oberfläche und der Dicke des isolierenden Mediums ab.

(¹) Außer der oben erwähnten Schrift von Clausius behandelt auch Grinwis in seiner „wiskundigen theorie der wrijvings electriceit" ausführlich den Condensator; er folgte der Clausius'schen Darstellung. — Man sehe auch: Boek, theorie van den electrischen condensator (Utrecht 1865).

Da die Kugel unter allen Körpern, welche dasselbe Volumen haben, jener ist, welcher die kleinste Oberfläche besitzt, so ist es vom Nutzen, den Leydnerflaschen Formen zu geben, welche von der Kugel verschieden sind, also z. B. cylindrische Gefäße zu wählen. Man vermehrt in der Weise die Elektricitätsmenge, gleichzeitig sind die Apparate leichter zu construieren und zu handhaben.

209. Cylindrische Condensatoren. Man kann noch für den Fall cylindrischer Condensatoren die Rechnung in einer beinahe vollständigen Weise ausführen, wenigstens dann, wenn die Länge des Cylinders unbegrenzt ist, was dem praktischen Falle von im Verhältnisse zu ihren Durchmessern sehr langen Cylindern entspricht.

Betrachtet man mehrere parallele und unbegrenzte cylindrische Conductoren, die elektrisiert sind, so ist klar, dass zufolge der Symmetrie die Dichte in allen Punkten einer Erzeugenden irgendeines der Cylinder constant ist, wenn Gleichgewicht stattfindet; die Niveauflächen sind selbst cylindrisch und die Vertheilung der Elektricität ist in allen Ebenen dieselbe, welche auf diesen Cylindern perpendiculär stehen. Es genügt daher, die Bedingung des Gleichgewichtes in einer dieser Ebenen zu bestimmen.

Berechnen wir zu diesem Behufe die Wirkung, welche in einem Punkte P (Fig. 100), der eine Elektricitätsmenge gleich 1 besitzt, ein schmaler zwischen zwei unendlich benachbarten Erzeugenden AB und A'B' genommener Streifen hervorbringt. Ziehen wir durch den Punkt P eine zu diesen Erzeugenden perpendiculäre Ebene und verbinden diesen Punkt mit dem Mittelpunkte O des Bogens ds, der zwischen den Erzeugenden sich befindet. Die Wirkung dieses Streifens findet augenscheinlich in der Richtung PO statt; es genügt deshalb die Summe der Componenten aller elementaren Wirkungen zu bilden, welche der Geraden PO parallel sind.

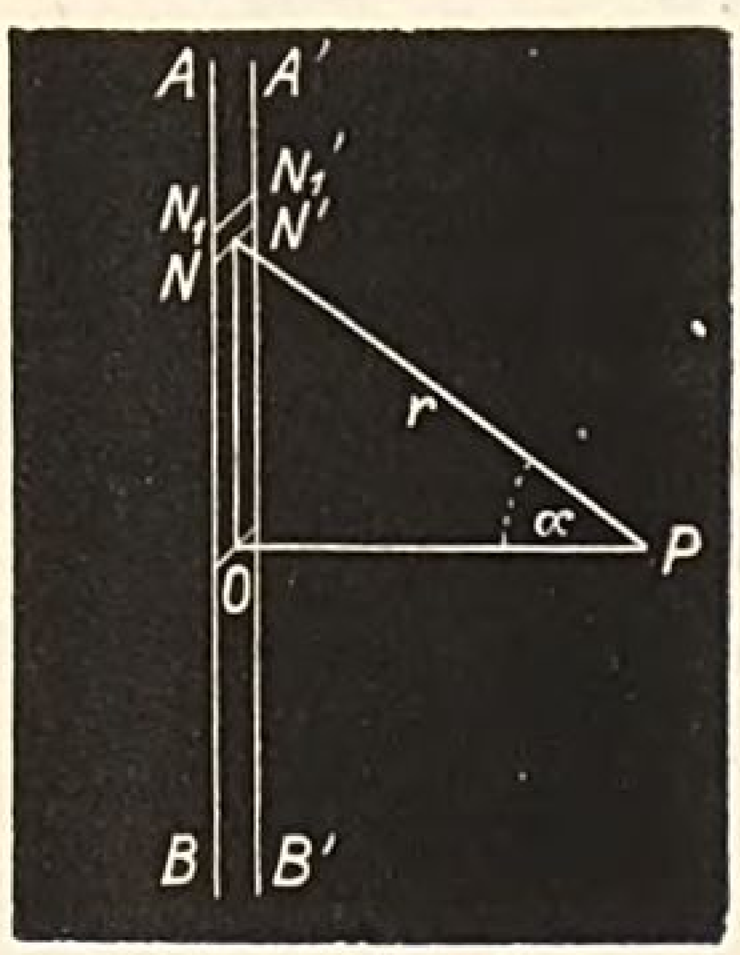


Fig. 100.

Die von einer zwischen den beiden Parallelen NN' und

N_1N_1' (in den Distanzen y und $y + dy$ vom Punkte O) gelegenen Elektricitätsmenge auf P ausgeübte Wirkung ist:

$$\mu \frac{dsdy}{r^2},$$

wenn man μ die elektrische Dichte auf der Oberfläche nennt, und die zu PO parallele Componente ist, unter ρ die Entfernung PO verstanden,

$$\mu \frac{dsdy}{r^2} \times \frac{\rho}{r} = \mu\rho ds \frac{dy}{r^3}.$$

Man hat überdies, wenn man mit α den Winkel NPO bezeichnet:

$$y = \rho \operatorname{tg.} \alpha, \quad r = \frac{\rho}{\cos \alpha}, \quad dy = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha,$$

woraus man durch Substitution erhält:

$$\mu\rho ds \frac{dy}{r^3} = \frac{\mu ds}{\rho} \cos \alpha . d\alpha.$$

Die Resultierende ist daher für einen unendlich langen Streifen:

$$\frac{\mu ds}{\rho} \int \cos \alpha . d\alpha = \frac{\mu ds}{\rho} \Big(\operatorname{Sin} \alpha \Big)_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2\mu ds}{\rho}.$$

Das elektrische Gleichgewicht ist daher dasselbe, als ob die elektrischen Wirkungen in der betrachteten, auf die Cylinder perpendiculären Ebene einfach umgekehrt der Entfernung proportional wären, und die elektrische Dichte auf der Schnittcurve dieser Ebene mit einem Cylinder doppelt so groß wäre, als die entsprechende Dichte auf der Oberfläche.

210. Die elektrische Kraft $\frac{2\mu ds}{\rho}$ im Punkte P ist gleich und von entgegengesetztem Zeichen wie die Derivierte des Potentials; man hat daher für das Potential den Ausdruck (bis auf eine Constante):

$$V = - 2\mu ds \log. \rho = 2\mu ds \log. \frac{1}{\rho},$$

unter dem Zeichen log. die Neper'schen Logarithmen verstanden.

Hat die betrachtete Schichte eine Länge gleich L, so ist die Elektricitätsmenge m, welche sie besitzt:

$$m = L.\mu ds,$$

und wenn diese Länge L im Verhältnis zur Distanz ρ genügend groß ist, so dass man die Wirkung der entfernteren Theile vernachlässigen kann, so kann man schreiben:

$$V = 2\frac{m}{L}\log.\frac{1}{\rho} = \frac{m}{L}\log.\frac{1}{\rho^2}.$$

Wenn man außerdem eine zu den erzeugenden Linien Parallele als Z-Axe wählt, so reduciert sich die allgemeine Gleichgewichtsbedingung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{auf}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

und dieser Bedingung wird durch eine logarithmische Function wie die oben angegebene, oder durch eine Summe von Functionen derselben Form Genüge geleistet.

Für einen geraden Kreiscylinder vom Radius R, dessen elektrische Dichte in allen Punkten dieselbe ist, ist das Potential auf der Axe die Summe der Potentiale aller Streifen, in welche man die ganze Oberfläche zerlegen kann; man hat daher, wenn man mit M die gesammte Elektricitätsmenge und mit L die Länge des Cylinders bezeichnet,

$$V = \frac{2M}{L}\log.\frac{1}{R} = \frac{M}{L}\log.\frac{1}{R^2}.$$

211. Betrachten wir endlich zwei concentrische Cylinder, den einen mit dem Radius R_1 und den anderen mit dem inneren Radius R_2; der erste befindet sich wie früher auf dem Potentiale V und ist geladen mit einer Elektricitätsmenge $+ M$, der zweite ist in Verbindung mit dem Erdboden. Dieser letztere wird durch Influenz geladen, welche auf seiner inneren Seite eine Elektricitätsmenge $- M$, welche der früheren gleich und entgegengesetzt ist, erzeugt. Das Potential auf der gemeinschaftlichen Axe ist

$$V = \frac{2M}{L}\log.\frac{1}{R_1} - \frac{2M}{L}\log.\frac{1}{R_2} = \frac{2M}{L}\log.\frac{R_2}{R_1},$$

woraus man schließt, dass

$$M = \frac{VL}{2}\frac{1}{\log.\frac{R_2}{R_1}} \text{ ist.}$$

Man kann zeigen, dass dieser Ausdruck sich auf die allgemeine Formel geschlossener Condensatoren mit sehr nahen Belegungen zurückführen lässt. Denn bezeichnet man mit e die Entfernung der beiden Oberflächen, von welcher wir nun voraussetzen, dass sie sehr klein ist, so hat man, indem man die Entwicklung der Formel der Logarithmen auf die ersten Glieder beschränkt,

$$\log.\frac{R_2}{R_1} = \log.\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) = \frac{e}{R_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{R_1}\right)^2 = \frac{e}{R_1}\left(1 - \frac{e}{2R_1}\right)$$

und die Gesammtoberfläche des inneren Cylinders ist

$$S = 2\pi R_1 L.$$

Man erhält daraus:

$$M = \frac{V.S}{4\pi e\left(1 - \frac{e}{2R_1}\right)} = \frac{VS}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{2R_1}\right);$$

das ist aber der Ausdruck, welchen wir für die elektrische Ladung eines geschlossenen Condensators erhalten haben.

212. Man kann die eben erhaltenen Resultate noch auf andere directere Weise gewinnen. Seien die Potentiale auf den beiden concentrischen Kreiscylindern V_1 und V_2, ihre Halbmesser R_1 und R_2. Betrachten wir (Fig. 101) den Keilwinkel, welcher von zwei Ebenen gebildet wird, die durch die Axe hindurchgehen; er sei unendlich klein und $d\omega$. Schneiden wir diese Ebenen durch zwei zur Axe senkrechte Ebenen, von denen wir die eine zur Ebene der Zeichnung wählen. Alle Kraftlinien sind infolge der Symmetrie normal zur gemeinschaftlichen Axe; das

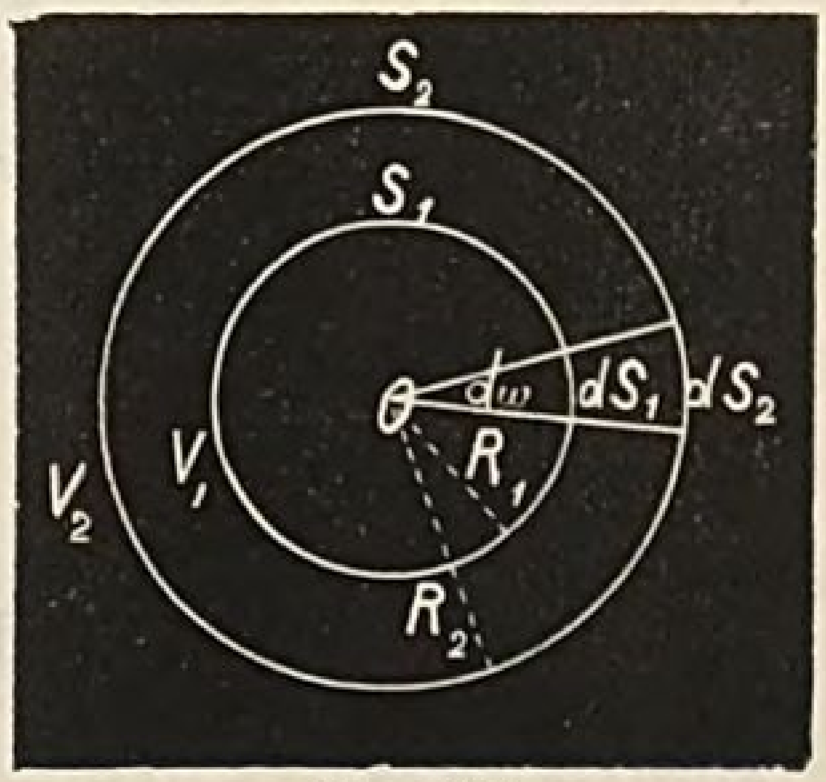


Fig. 101.

von den vier Ebenen gebildete Volumen ist eine Kraftröhre; die aus den Cylindern ausgeschnittenen Flächenelemente stehen in demselben Verhältnisse wie die Kreisbogen dS_1 und dS_2. — Sind daher die Kräfte in den Entfernungen R_1 und R_2 von der Axe F_1 und F_2, so hat man:

$$F_1 dS_1 = F_2 dS_2.$$

Da außerdem

$$dS_1 = R_1 d\omega$$

und

$$dS_2 = R_2 d\omega$$

ist, so erhält man

$$F_1 R_1 = F_2 R_2 = A.$$

Die Kraft in irgendeinem Punkte des Dielektrikums ist daher der Entfernung von der Axe umgekehrt proportional.

Bezeichnet man die Kraft F und V das Potential in einer Entfernung R, so hat man daher:

$$F = \frac{A}{R} = -\frac{dV}{dR}$$

und demzufolge:

$$V = -A \int \frac{dR}{R}.$$

Dehnt man dieses Integral auf das Volumen aus, das sich zwischen den Oberflächen S_1 und S_2 befindet, so erhält man:

$$V_2 - V_1 = -A \log. \frac{R_2}{R_1},$$

woraus die Constante A berechnet werden kann.

Es ist:

$$A = \frac{V_1 - V_2}{\log. \frac{R_2}{R_1}}.$$

Für die elektrische Dichte an der Oberfläche des inneren Cylinders erhält man:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} F_1 = \frac{A}{4\pi R_1} = \frac{1}{4\pi R_1} \frac{V_1 - V_2}{\log. \frac{R_2}{R_1}}.$$

Sei S die Größe der Oberfläche, welche zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die normal zur Axe sind; die auf dieser Fläche ausgebreitete Elektricitätsmenge ist

$$M = S\sigma = \frac{(V_1 - V_2) S}{4\pi R_1 \log. \frac{R_2}{R_1}}.$$

Ist L die Länge des so bestimmten Cylinders, so hat man:

$$S = 2\pi R_1 L,$$

woraus man schließlich erhält:

$$M = \frac{L}{2 \log. \frac{R_2}{R_1}} (V_1 - V_2).$$

Die Capacität eines cylindrischen Condensators per Längeneinheit ist daher

$$C = \frac{1}{2 \log. \frac{R_2}{R_1}},$$

was mit den früher abgeleiteten Formeln in Übereinstimmung ist. Dieses Problem hat in der Praxis eine große Wichtigkeit, es entspricht vollständig dem Falle der elektrischen Kabel, welche aus leitenden Drähten bestehen, die von einer isolierenden Schichte umgeben sind, welche ihrerseits durch eine metallische Belegung geschützt wird.

Eine andere Berechnung der Capacität des eben betrachteten Accumulators ergibt sich leicht aus der Ähnlichkeit der Gleichungen, welche den Wärmefluss an einem Punkte in einem an verschiedenen Stellen verschieden warmen Körper und die elektrische Anziehung in demselben bei Ladung mit Elektricität an jenem Punkte bestimmen. (¹)

213. Man kann noch den Fall eines Condensators behandeln, der aus zwei leitenden Cylindern gebildet ist, von denen der eine innerhalb des andern liegt, aber derart, dass die Cylinder nicht concentrisch sind.

(¹) Man sehe W. Thomson, reprint of papers p. 1.; auch G. Wiedemann, die Lehre von der Elektricität. I. Bd., p. 107; (1882).

Betrachten wir zwei parallele Gerade von der Länge L, welche mit den gleichen, aber entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsmengen + M und — M geladen sind, welche auf jeder von ihnen in gleichförmiger Weise vertheilt sind. Zeichnen wir eine Ebene, welche senkrecht auf diese Geraden steht; die Ebene schneidet die erste in A (Fig. 102) und die

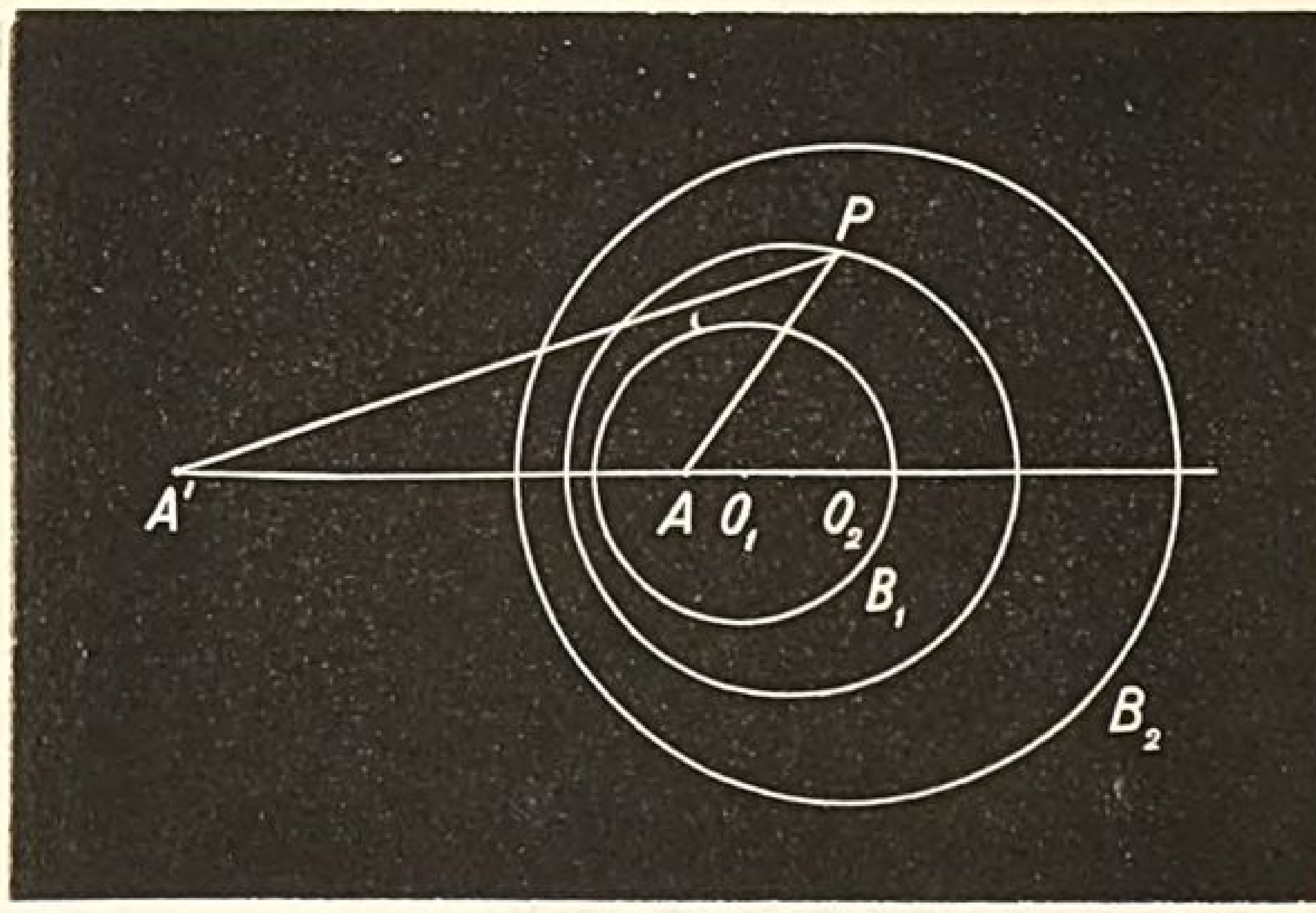


Fig. 102.

zweite in A'. Das Potential im Punkte P dieser Ebene ist durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$V = \frac{M}{L} log. \frac{1}{\overline{PA}^2} - \frac{M}{L} log. \frac{1}{\overline{PA'}^2} = \frac{M}{L} log. \frac{\overline{PA'}^2}{\overline{PA}^2}.$$

Die Niveaulinien in der betrachteten Ebene sind durch die Bedingung:

$$\frac{PA'}{PA} = \text{constans}$$

bestimmt; es sind dies Kreislinien, von denen die einen innerhalb der anderen aber nicht concentrisch liegen. Die Niveauflächen sind deshalb parallele excentrische Cylinder.

Setzen wir der Einfachheit halber:

$$v = \frac{VL}{M}$$

und nehmen zu Coordinatenaxen die Gerade A'A und eine zweite Gerade, welche in der Mitte der Entfernung der beiden Punkte A und A', die wir $2a$ bezeichnen, auf die erste senkrecht errichtet ist.

Für den Kreis, welcher dem Potentiale V entsp richt, hat man die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{VL}}{\mathrm{M}} = v = log.\ \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

oder auch:

$$e^v[(x-a)^2+y^2] = (x+a)^2+y^2$$

wobei e die Basis der Neper'schen Logarithmen ist; der Radius dieses Kreises ist durch die Formel:

$$(2)\qquad \mathrm{R}^2 = a^2\left(\frac{e^v+1}{e^v-1}\right)^2 - a^2$$

bestimmt und die Abscisse des Mittelpunktes ist

$$(3)\qquad \alpha = a\frac{e^v+1}{e^v-1} = \sqrt{\mathrm{R}^2+a^2}.$$

Die Gleichung (2) liefert

$$e^v = \frac{\sqrt{\mathrm{R}^2+a^2}+a}{\sqrt{\mathrm{R}^2+a^2}-a} = \frac{(a+\sqrt{\mathrm{R}^2+a^2})^2}{\mathrm{R}^2}$$

$$v = 2log.\ \frac{a+\sqrt{\mathrm{R}^2+a^2}}{\mathrm{R}}.$$

Wenn man zwei Kreise B_1 und B_2, deren Radien R_1 und R_2 sind, betrachtet, so ist die Entfernung $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ der beiden Mittelpunkte:

$$(4)\qquad \alpha_2 - \alpha_1 = \sqrt{\mathrm{R}_2{}^2+a^2} - \sqrt{\mathrm{R}_1{}^2+a^2} = d.$$

Diese Gleichung nach a aufgelöst gibt:

$$4d^2a^2 = (\mathrm{R}_2{}^2-\mathrm{R}_1{}^2-d^2)^2 - 4d^2\mathrm{R}_1{}^2$$

oder

$$2da = \sqrt{(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2+d)(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2-d)(\mathrm{R}_2-\mathrm{R}_1+d)(\mathrm{R}_2-\mathrm{R}_1-d)}.$$

Man erhält noch aus der Gleichung (4)

$$(5)\qquad \begin{aligned} \sqrt{\mathrm{R}_1{}^2+a^2} &= \frac{\mathrm{R}_2{}^2-\mathrm{R}_1{}^2-d^2}{2d}, \\ \sqrt{\mathrm{R}_2{}^2+a^2} &= \frac{\mathrm{R}_2{}^2-\mathrm{R}_1{}^2+d^2}{2d} \end{aligned}$$

Die Differenz der Werte von v für die beiden Kreise ist:

$$v_1 - v_2 = 2\log.\frac{a+\sqrt{R_1^2+a^2}}{R_1} - 2\log.\frac{a+\sqrt{R_2^2+a^2}}{R_2} =$$

$$= 2\log.\frac{R_2}{R_1}\times\frac{a+\sqrt{R_1^2+a^2}}{a+\sqrt{R_2^2+a^2}},$$

oder wenn man die Wurzelgrößen durch ihre aus den Gleichungen (5) bestimmten Werte ersetzt:

$$v_1 - v_2 = 2\log.\frac{R_2}{R_1}.\frac{R_2^2-R_1^2-d^2+2da}{R_2^2-R_1^2+d^2+2da};$$

demzufolge:

$$V_1 - V_2 = \frac{M}{L}(v_1 - v_2) = \frac{2M}{L}\log.\frac{R_2}{R_1}\times\frac{R_2^2-R_1^2-d^2+2da}{R_2^2-R_1^2+d^2+2da}.$$

Es wird hinreichen, in dieser Gleichung das Glied $2da$ durch seinen Wert zu ersetzen, um die Differenz der Potentiale als Function der Radien R_1 und R_2 der beiden Kreise und der Entfernung ihrer Mittelpunkte auszudrücken. Für den Fall des wirklichen elektrischen Problems bedeutet dies, dass die Potential-Differenz auf den beiden cylindrischen Niveauflächen als Function der Cylinderradien und der Distanz ihrer Axen ausgedrückt ist.

Bemerken wir nun, dass die elektrisierte Gerade, welche im Punkte A projiciert ist, im Innern aller Niveauflächen und die Gerade A' außerhalb aller dieser Flächen gelegen ist. Man kann daher nach dem Theorem (185), ohne das Gleichgewicht zu stören und ohne das Gesetz der Potentiale in der Gegend, welche sich zwischen den beiden Cylindern mit den Radien R_1 und R_2 befindet, zu ändern, die Elektricitätsmenge $+M$ in einer geeigneten Weise auf der Oberfläche des Cylinders mit dem Radius R_1, und die Elektricitätsmenge $-M$ auf dem Cylinder, dessen Radius R_2 ist, vertheilen. Der neue Gleichgewichtszustand entspricht dem Falle, in welchem ein leitender Cylinder vom Radius R_1 mit einer Elektricitätsquelle vom Potentiale V_1 in Verbindung ist und von einem andern Cylinder, dessen innerer Radius R_2 ist und der sich auf dem Potentiale V_2 befindet, umgeben ist.

Bezeichnet man mit V die Differenz der beiden Potentiale, so wird man daher haben:

$$(6) \qquad V = \frac{2M}{L} \log. \frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_2^2 - R_1^2 - d^2 + 2da}{R_2^2 - R_1^2 + d^2 + 2da}.$$

Die elektrische Capacität C des Condensators, der aus diesen beiden Cylindern gebildet wird, ist durch die Gleichung:

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{L} \log. \frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_2^2 - R_1^2 - d^2 + 2da}{R_2^2 - R_1^2 + d^2 + 2da}$$

gegeben. Angenähert hat man auch:

$$C = \frac{L}{2 \log. \frac{R_2^2 - d^2}{R_1 R_2}},$$

eine Formel, welche von W. Thomson(¹) gegeben wurde.

Sind die Cylinder concentrisch, die Entfernung d also Null, so reduciert sich (6) auf die Gleichung:

$$V = \frac{2M}{L} \log. \frac{R_2}{R_1}$$

und man ist auf die schon bekannte Formel zurückgekommen.

214. Um auf den Fall überzugehen, in welchem ein einziger Cylinder in einer gewissen Entfernung von einer unbegrenzten Ebene liegt, wird man die Excentricität d durch ihren Wert als Function des Radius R_2 des größeren Cylinders und der kürzesten Entfernung δ des Mittelpunktes des kleineren von der Oberfläche des größeren ersetzen, also die Gleichung

$$d + \delta = R_2$$

anwenden.

Man wird den Grenzwert der Gleichung (6) suchen, in welcher man R_2 unendlich groß machen wird. In diesem Falle wird das Glied $2da$ gleich $2R_2 \sqrt{\delta^2 - R_1^2}$ und man erhält:

$$V = \frac{2M}{L} \log. \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - R_1^2}}{R_1}.$$

Wenn die Distanz δ sehr groß im Verhältnisse zum Cylinderradius R_1 ist, ein Fall, der zum Beispiel einem Telegraphendrahte, welcher in einer gewissen Entfernung ober dem Erdboden sich befindet, entsprechen wird, so bleibt einfach:

(¹) Philos. Mag. 11, p. 158, 1856.

$$V = \frac{2M}{L} \log . \frac{2\delta}{R_1}$$

und

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{L} . \log . \frac{2\delta}{R_1} .$$

Die elektrische Capacität eines Drahtes, welcher unter diesen Bedingungen sich befindet, ist daher dieselbe, als ob dieser Draht noch von einer concentrischen cylindrischen Einhüllung umgeben wäre, deren Radius der doppelten Höhe gleichkommt, in welcher der Draht sich befindet. (1)

Es sei noch bemerkt, dass alle diese Resultate, wie wir gesehen haben, sich auf den Fall unbegrenzter Cylinder beziehen und nur dann angewendet werden können, wenn es sich bei wirklichen Experimenten um Näherungswerte handelt.

215. Ebene Condensatoren. Betrachten wir zwei Leiter, welche durch planparallele Oberflächen S_1 und S_2, die in der Entfernung e voneinander sich befinden, begrenzt sind; das Potential auf ihnen sei V_1 und V_2. In einer Entfernung von den Rändern, welche sehr groß im Verhältnisse zur Dicke des Dielektrikums ist, sind die Kraftlinien untereinander parallele Gerade, welche zu den betrachteten Flächen normal sind. Das elektrische Feld zwischen den beiden Platten ist daher gleichförmig; die Kraft wird durch die Formel

$$F = \frac{V_1 - V_2}{e}$$

ausgedrückt; die Dichte auf der Oberfläche S_1 ist

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e} .$$

Der elektrostatische Druck, d. h. die auf die Oberflächeneinheit wirkende Kraft ist

$$p = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2 ;$$

(1) Das Problem excentrischer Cylinder ist von Blavier gelöst worden, gelegentlich gewisser von Gaugain angestellter Experimente (Journal de Physique, t. III, p. 115 und 151). Man sehe mehrere Artikel von M. Blavier über elektrische Größen und deren Messung in absoluten Einheiten, in den Annales télegraphiques, 3. Serie t. I. et II.

er ist proportional dem Quadrate der Potential-Differenz und umgekehrt proportional dem Quadrate des Plattenabstandes.

Wenn ein Theil der Fläche S_1, der die Größe a hat, allein beweglich ist und in einer großen Entfernung von den Rändern liegt, dabei aber doch mit dem umgebenden Theile von S_1 im Contacte ist, so dass er dasselbe Potential beibehält, so wird dieses Flächenstück eine gleichförmige Elektricitätsschichte erhalten und die Kraft P, welche nöthig ist, um der elektrischen Attraction der beiden Platten S_1 und S_2 das Gleichgewicht zu halten, wird ausgedrückt durch

$$P = pa = \frac{a}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2.$$

W. Thomson hat bei der Construction der absoluten Elektrometer, wie später gezeigt werden wird, eine derartige bewegliche Platte gebraucht; er nennt jenen Theil der Oberfläche S_1, der den beweglichen Theil umgibt und ihn auf constanter elektrischer Dichte hält, Schutzplatte oder Schutzring (guard-plate oder guard-ring).

Ein ebener Condensator setzt sich aus zwei parallelen Metallplatten zusammen, die durch eine Schichte einer isolierenden Substanz getrennt sind. In der Praxis haben diese Condensatoren nothwendigerweise eine beschränkte Ausdehnung und das Problem der Elektricitätsvertheilung auf einem solchen Condensator bietet große Schwierigkeiten dar, insbesonders in jenen Punkten, welche der Begrenzung benachbart sind. Wenn aber die Entfernung der Belegungen dieses Condensators sehr klein im Verhältnis zu ihrem Durchmesser ist, kann man jede der beiden Belegungen als Theil einer unbegrenzten Ebene betrachten und die so gerechneten elektrischen Ladungen werden sich äußerst wenig von den wirklichen Ladungen unterscheiden; es gelten dann die eben erhaltenen Formeln.

Sei noch A (Fig. 103) eine unbegrenzte leitende Platte, die sich auf dem Potentiale V_1 befindet, B und B′ seien zwei leitende Platten, welche parallel zur ersten auf verschiedenen Seiten, die eine in der Entfernung e, die andere in der Entfernung e' gelegen sind, sie seien beide auf dasselbe Potential V_2 gebracht. Es ist klar, dass die elektrische Dichte auf

jeder der Oberflächen eine gleichförmige ist, dass die zu den Niveauflächen gezeichneten Orthogonalen untereinander parallele Gerade sind, welche lothrecht auf den betrachteten Oberflächen stehen und dass demzufolge die Dichte auf zwei gegenübergestellten Oberflächen dieselbe ist. Die Dichte μ auf der unteren Fläche des Conductors A ist gegeben durch die Gleichung:

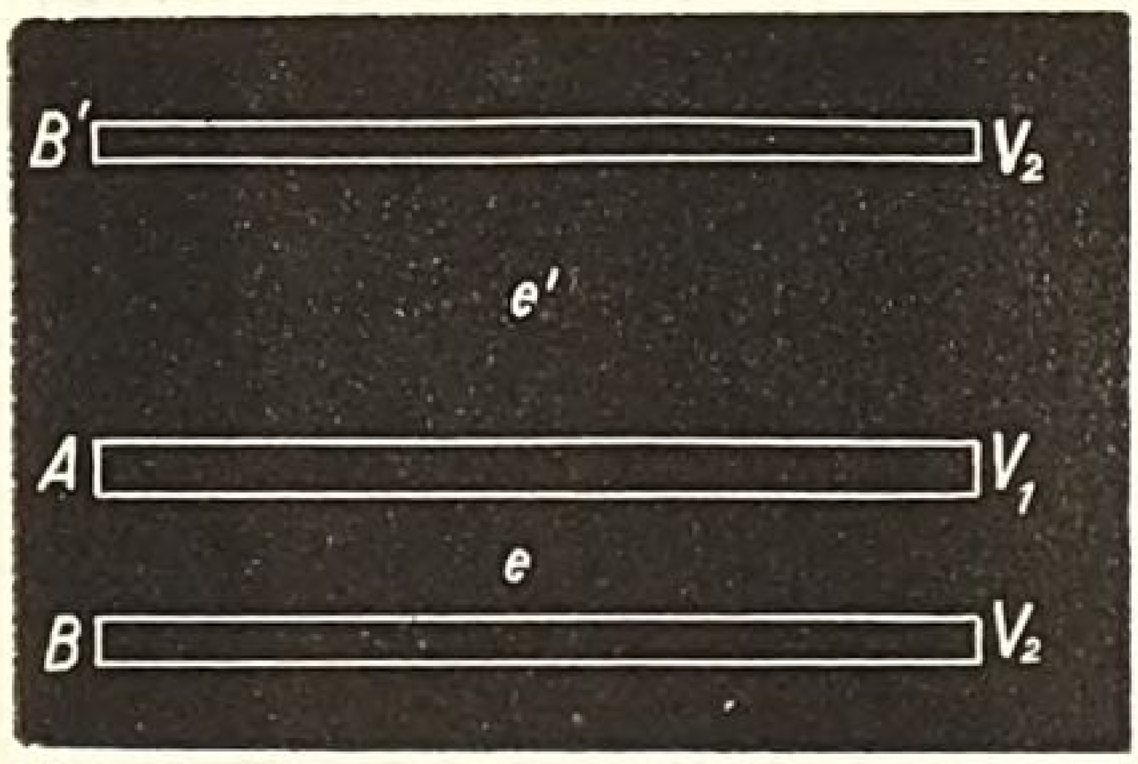


Fig. 103.

$$4\pi\mu = -\frac{dV}{dn} = -\frac{V_2 - V_1}{e} = \frac{V_1 - V_2}{e}.$$

In derselben Weise hat man für die Oberseite dieser Platte:

$$4\pi\mu' = \frac{V_1 - V_2}{e'}.$$

Die gesammte Elektricitätsmenge M, welche der Conductor A in einer Ausdehnung S besitzt, ist daher:

$$M = S(\mu + \mu') = \frac{(V_1 - V_2)S}{4\pi}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right)$$

$$= \frac{VS}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{e'}\right),$$

wenn V die Potentialdifferenz bezeichnet. Wird der Leiter B' sehr entfernt, was dem Falle eines aus zwei Platten bestehenden Conductors entspricht, so bleibt einfach:

$$M = \frac{VS}{4\pi e},$$

d. h. dieselbe Formel wie für die Leydnerflasche. Die Elektricitätsmenge eines Plattencondensators und die condensierende Kraft sind daher nahezu umgekehrt proportional der Entfernung der Belegungen und diese Beziehung wird umso exacter, je näher die Oberflächen sein werden.

216. Allgemeines über elektrische Influenz. Methode von Murphy.

Alle Rechnungen, welche nun ausgeführt wurden, beziehen sich auf specielle Fälle des allgemeinen Problems der elektrischen Influenz.

Betrachten wir einen isolierten Conductor A, der mit einer gewissen Elektricitätsmenge +M geladen ist; in seiner Nachbarschaft befinde sich ein Conductor B in leitender Verbindung mit der Erde. Man kann sich die Aufgaben stellen: die Ladung des Conductor B zu bestimmen, sodann das Potential des ersten Conductors A und schließlich das Gesetz der Vertheilung der elektrischen Schichten zu bestimmen, sobald Gleichgewicht eingetreten ist.

Bemerken wir zunächst, dass ein elektrisierter Körper immer so betrachtet werden kann, als wäre er vollständig von einem zur Erde abgeleiteten Conductor umgeben; dieser Conductor wird durch die Wände des Saales, in welchem man die Versuche anstellt, oder einfach durch die Erdoberfläche und allerlei Gegenstände, von denen er umgeben ist, gebildet.

Ist der elektrisierte Körper von einem Conductor wirklich eingeschlossen, wie es bei den Wänden eines Saales der Fall ist, so wird dieser Conductor mit einer gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsmenge geladen werden und die einander correspondierenden Elemente auf dem elektrisierten Körper und auf der Einhüllung, welche mit gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsmengen geladen sind, werden durch einen orthogonalen Canal bestimmt.

Im Speciellen wird, wie wir schon früher gesehen haben, der Conductor B, welcher an der Einhüllung theilnimmt, nur von einem Theile der Orthogonalen, die vom elektrisierten Körper ausgehen, getroffen werden, und es wird demzufolge die negative Elektricitätsmenge —M′ dieses Conductors kleiner sein, als die positive des influencierenden Körpers.

Wird der elektrisierte Körper mitten in Luft gestellt, so ist die Elektricitätsschichte besonders gegen die untere Partie seiner Oberfläche vertheilt; die Mehrzahl der Orthogonalen, welche man von diesem Körper ausgehend zeichnen kann, treffen den Erdboden in kleiner Entfernung, jene, welche nach oben gerichtet sind, biegen bald um und treffen, in größerer

oder geringerer Entfernung, entweder den Erdboden oder einen mit dem Erdboden in Verbindung stehenden Leiter.

Man ersieht hieraus, welche Bedeutung man der von Faraday ausgesprochenen Ansicht geben muss, dass niemals eine gegebene Menge positiver Elektricität hervorgerufen werden kann, ohne dass gleichzeitig irgendwo eine gleiche Quantität negativer Elektricität hervorgerufen würde und dass diese gleichen und entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsmengen durch Kraftlinien verbunden sind.

217. Betrachten wir zuerst den Fall, in welchem die influencierende Elektricität $+M$ aus fixen Massen gebildet ist, welche z. B. in verschiedenen Punkten eines absolut isolierenden Körpers vertheilt sind, und nehmen wir an, dass man die entgegengesetzte Elektricitätsmenge $-M'$, welche der mit der Erde in Verbindung stehende und deshalb auf das Potential Null gebrachte Conductor B empfängt, zu bestimmen habe.

Um den elektrischen Zustand zu erhalten, welchen der Conductor annehmen würde, wenn er ursprünglich isoliert im neutralen Zustande gewesen wäre, genügt es, auf diesem Conductor eine Elektricitätsschichte gleich $+M'$, welche in einer regulären Weise vertheilt ist, aufzulegen; die Dichte, welche in jedem Punkte herrscht, wird die algebraische Summe der Dichten sein, welche sich auf die Elektricitätsschichten $-M'$ und $+M'$ beziehen. Die Gesammtladung dieses Conductors ist Null und es besteht Gleichgewicht, da die influencierende Elektricität und die Schichte $-M'$ auf dem Conductor ein Potential Null hervorrufen und da die Schichte $+M'$ ein constantes Potential besitzt.

Wäre der Conductor B isoliert und anfänglich mit einer Elektricitätsmenge M_1 geladen, so wird es wieder genügen, um das Gleichgewicht zu finden, der durch Influenz hervorgerufenen Ladung $-M'$ eine regulär vertheilte Elektricitätsschichte M_1+M' beizufügen.

Wenn man endlich einzeln die Gleichgewichtszustände kennt, welche der Influenz der beiden Systeme M und N der fixen Massen entsprechen, so wird man den elektrischen Zustand, welcher der Influenz des Systemes $M+N$ entspricht, erhalten,

wenn man die Elektricitätsschichten übereinanderlegt, die den beiden vorhergehenden Gleichgewichtszuständen entsprechen.

218. Ist der influencierende Körper selbst ein Conductor, was der allgemeinste Fall ist, so wird das Problem noch schwieriger, weil es nothwendig ist, Rücksicht zu nehmen auf die Rückwirkung, welche durch die Elektricität des influencierten Körpers auf den influencierenden Körper ausgeübt wird. Die folgende Methode der successiven Annäherungen rührt von R. Murphy (Phil. Mag. II. p. 350, 1833) her und gestattet eine gewisse Anzahl von Problemen zu behandeln.

Nehmen wir an, wir wollten den Gleichgewichtszustand zweier isolierten Conductoren A und B finden, die ursprünglich mit den gegebenen Elektricitätsmengen M_1 und M_2 geladen wären. Sei m die Niveauschichte, welche auf A ausgebreitet, auf A ein Potential gleich 1 hervorruft; diese Schichte, fest gedacht, wird durch Influenz auf B, wenn dieser letztere Conductor mit dem Erdboden in Verbindung steht, eine Schichte $-m'$ hervorrufen. Die Schichte $-m'$, fest vorausgesetzt, wird ihrerseits auf dem Conductor A, der nicht isoliert ist, eine Schichte m_1 hervorbringen; diese Schichte, fest gedacht, wird in derselben Weise auf dem Conductor B, der nicht isoliert ist, eine Schichte $-m_1'$ erzeugen, und so bis ins Unendliche. Superponieren wir diese verschiedenen Schichten, so werden wir auf A eine Schichte haben, welche gleich

$$M = m + m_1 + m_2 + \ldots$$

ist und auf B eine Schichte, die gleich:

$$-M' = -m' - m_1' - m_2' - \ldots \text{ ist.}$$

Man sieht leicht ein, dass das Potential auf dem Conductor A Eins, auf dem Conductor B Null ist; demzufolge wird Gleichgewicht sein.

M stellt die Capacität des isolierten Conductors A in Gegenwart des mit der Erde verbundenen Leiters B vor und $-M'$ den Coefficienten der inducierten Elektricität auf B.

In derselben Weise sei n die Niveauschichte, welche auf B ausgebreitet ein Potential gleich 1 hervorruft. Diese Schichte

fest vorausgesetzt, wird durch Influenz auf dem nicht isolierten Leiter A eine Ladung $-n'$ hervorrufen; diese wird in derselben Weise auf dem nicht isolierten Leiter B eine Schichte n_1 hervorrufen, welche auf A eine Schichte $-n_1'$ erzeugen wird und so ins Unendliche. Die beiden Elektricitätsschichten:

$$N = n + n_1 + n_2 + \ldots$$
$$-N' = -n' - n_1' - n_2' - \ldots$$

ausgebreitet auf B und A erzeugen ein Potential gleich 1 auf B und ein Potential gleich Null auf A und demzufolge werden sie einen neuen Gleichgewichtszustand bilden.

Multiplicieren wir M und M' mit V_1; die diesbezüglichen Ladungen V_1M und $-V_1M'$ entsprechen einem neuen Gleichgewichtszustande mit dem Potentiale Null auf B und dem Potentiale V_1 auf A. Ebenso werden die Elektricitätsmengen V_2N und $-V_2N'$, ausgebreitet auf B und A, einem neuen Gleichgewichtszustande entsprechen, in welchem der Leiter A das Potential Null und der Leiter B das Potential V_2 hat. Superponiert man diese beiden Gleichgewichtszustände, so erhält man abermals einen neuen Gleichgewichtszustand mit dem Potentiale V_1 auf A, dem Potentiale V_2 auf B, wobei V_1 und V_2 den Gleichungen:

$$V_1M - V_2N' = M_1$$
$$-V_1M' + V_2N = M_2$$

genügen. Man wird so den Zustand wechselseitigen Gleichgewichtes der beiden auf A und B ausgebreiteten gegebenen Elektricitätsmengen M_1 und M_2 haben. Das Potential des Systems wird somit auf A den constanten Wert V_1, auf B V_2 haben, welche Werte sich aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ergeben. Gibt man die Potentiale V_1 und V_2 der beiden Conductoren an, so wird man aus denselben Gleichungen die gesammten auf den beiden Leitern befindlichen Elektricitätsschichten M_1 und M_2 bestimmen können.

219. Gegenseitige Wirkung zweier elektrisierter Conductoren. Die vorhergehende Methode von Murphy gestattet die Bestimmung der Vertheilung der Elektricität auf den beiden Conductoren, weil die schließliche Dichte in jedem

Punkte die Summe der Dichten ist, welche sich auf die verschiedenen superponierten Schichten beziehen und weil — nach der Annahme — man das Gesetz der Vertheilung für jeden der Conductoren kennt. Man hat daher alle Elemente, welche nöthig sind, um die zwischen den beiden Körpern herrschende Wirkung zu rechnen; das Problem bietet nur Rechnungsschwierigkeiten.

Diese Wirkung setzt sich zusammen aus der Wirkung der beiden Elektricitätsschichten MV_1 und $-N'V_2$ des Körpers A auf die beiden Schichten NV_2 und $-M'V_1$ des Körpers B. Da die Potentiale positiv vorausgesetzt sind, so besteht die Wirkung von MV_1 aus zwei Gliedern, von denen das eine repulsiv und dem Producte der beiden Potentiale V_1V_2 proportional ist, während das andere Glied eine Attraction vorstellt und V_1^2 proportional ist. — Die Wirkung von $-N'V_2$ besteht auch aus zwei Theilen, einem attractiven, der proportional V_2^2 ist, und einem anderen, repulsiven, der dem Producte V_1V_2 proportional ist.

Bezeichnet man mit a, b, c Coefficienten, welche von der Gestalt der Körper und ihrer Entfernung abhängen, so wird die gegenseitige Wirkung, als repulsiv betrachtet, durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$R = 2cV_1V_2 - aV_1^2 - bV_2^2.$$

Sind die Leiter A und B identisch und symmetrisch angeordnet, so wird dieser Ausdruck, da a und b einander gleich sind:

$$R = 2cV_1V_2 - a\,(V_1^2 + V_2^2).$$

Wir haben vorausgesetzt, dass die Wirkung der beiden Körper sich auf eine einzige Resultierende reduciert. Wenn es anders wäre, so ließe sich dieselbe Betrachtung auf die beiden Resultanten, durch die man das Kräftesystem ersetzen kann, anwenden.

Auch in einfachen Fällen ist die Bestimmung von M, M', N, N' und der Resultierenden R sehr schwierig; wir werden später eine Anwendung der vorgetragenen Theorie auf die Berechnung der gegenseitigen Einwirkung zweier Kugeln geben. —

Arbeit der elektrischen Kräfte. Elektrische Energie.

220. Wird ein System elektrisierter Conductoren in Verbindung mit dem Erdboden gesetzt, so wird die ganze freie Elektricität verschwinden, das System kehrt in den neutralen Zustand zurück und erhält den Potentialwert Null. Bleiben diese Conductoren von der Erde isoliert, während man sie untereinander in Communication setzt, so wird sich die Vertheilung der Elektricität im allgemeinen ändern und alle Conductoren werden dasselbe Potential annehmen. Wenn überhaupt aus irgendeinem Grunde eine Verschiebung der elektrischen Fluida oder eine Bewegung der elektrisierten Körper selbst eintritt, so ist diese Veränderung im Zustande des Systems von einer Arbeit der elektrischen Kräfte begleitet.

Zwischen zwei elektrischen Mengen m und m' wirkt die Kraft $\frac{mm'}{r^2}$ und wenn die Entfernung dieser beiden Elektricitätsmengen sich um δr ändert, so ist die Arbeit der Kraft

$$\frac{mm'}{r^2}\delta r = -\delta\frac{mm'}{r}.$$

Die gesammte Variation $\delta\mathfrak{T}$ der elektrischen Arbeit welche, einer Änderung im Zustande des Systems entspricht, ist:

$$\delta\mathfrak{T} = -\sum\delta\frac{mm'}{r} = -\delta\sum\frac{mm'}{r},$$

wobei das Zeichen $\sum$ auf alle Combinationen der elektrischen Mengen zu zwei und zwei ausgedehnt wird.

Setzen wir

$$W = \sum\frac{mm'}{r},$$

so ist

$$\delta\mathfrak{T} = -\delta W,$$

und wenn das System aus dem Zustande 1 in den Zustand 2 übergeht, so ist die Arbeit der elektrischen Kräfte

$$\mathfrak{T} = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2.$$

221. Elektrische Energie. Der Wert der Function W in irgendeinem Zustande des Systems ist die Arbeit, welche die

elektrischen Kräfte entwickeln würden, wenn das Systme in den neutralen Zustand zurückkehrt; denn in diesem Falle wird man $W_2 = 0$ haben und demzufolge $\mathfrak{T} = W_1$. Das System kehrt von selbst in den neutralen Zustand zurück, wenn man es mit dem Erdboden in Verbindung setzt, woraus man schließt, dass die Quantität W immer positiv ist. Man nennt, nach Analogie mit den Functionen, welche man in der mechanischen Wärmetheorie studiert, diese Function die potentielle Energie des elektrisierten Systemes oder einfach die elektrische Energie.

Umgekehrt muss man, um ein System mittelst einer Elektrisiermaschine zu elektrisieren, eine Quantität kinetischer Energie verbrauchen, welche gleich der potentiellen Energie ist, die man dem Systeme mittheilen will. Es ist allgemein die zu irgendeiner Veränderung gehörige Arbeit der elektrischen Kräfte gleich der Änderung, welche die potentielle Energie erfährt, wenn man von dem ersten zum zweiten Zustande übergeht.

Verbindet man zwei geladene Conductoren, so vollzieht sich im allgemeinen eine Veränderung in der Vertheilung der Elektricitätsmengen, welche einer positiven Arbeit entspricht. Die elektrische Energie eines Systemes von Conductoren ist daher gleich oder größer als jene des Systems, welches man erhalten würde, wenn man zwischen den Leitern irgendwelche Verbindungen herstellt.

Wenn das System einen elektrisierten isolierenden Körper enthält, so kann man die verschiedenen Elektricitätsmengen, mit denen der Körper geladen ist, so betrachten, als ob sie auf unendlich kleinen leitenden Körpern sich befinden würden. Verbindet man alle Massen untereinander, so wird die Energie kleiner. Die Energie eines Systems von Körpern, von denen jeder eine bestimmte Elektricitätsmenge besitzt, ist daher ein Minimum, wenn alle Körper Leiter sind.

222. Man kann die potentielle Energie W eines Systems mittelst der Function V, d. h. mittelst des Potentiales, welches in jedem Punkte des Systems herrscht, ausdrücken. Die Summe:

$$W = \sum \frac{mm'}{r}$$

umfasst die Combinationen von allen Massenelementen zu je zwei.

Combinieren wir eine bestimmte Elektricitätsmenge m mit allen anderen, so erhalten wir:

$$m\left(\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \frac{m'''}{r'''} + \dots\right) = m \sum \frac{m'}{r'},$$

wobei $r', r'', r''' \dots$ die Entfernungen aller anderen Massentheilchen vom ersten sind. Der Ausdruck $\sum \frac{m'}{r'}$ ist nichts anderes, als das Potential V_m aller Elektricitätsmengen in jenem Punkte, in welchem sich die betrachtete Menge m vorfindet, so dass die Summe aller Combinationen, in welchen die Elektricitätsmenge m vorkommt, durch die Formel mV_m ausgedrückt wird. In derselben Weise werden die Combinationen einer Masse m' mit jeder der anderen $m'V_{m'}$ geben und so weiter; die gesammte Summe dieser Combinationen wird:

$$mV_m + m'V_{m'} + \dots = \sum mV$$

sein. Wenn man aber in der angezeigten Weise vorgeht, nimmt man jede Combination zweimal; das Glied $\frac{mm'}{r'}$ z. B. bezieht sich auf die Combination der beiden Mengen m und m' und befindet sich ein erstesmal in dem Summanden mV_m, ein zweitesmal in dem Summanden $m'V_{m'}$. Die potentielle Energie ist daher gleich der Hälfte obiger Summe, was nun gibt:

(1) $$W = \frac{1}{2} \sum mV.$$

223. Man kann die Formel für die Energie e i n e s Conductors und e i n e s S y s t e m e s von Conductoren auch in folgender Weise directer herleiten:

a) Nehmen wir zunächst einen einzigen Conductor, der die Capacität C hat; er werde durch eine Ladung M auf das Potential V gebracht.

Um seine Ladung um dM zu vergrößern, muss man aus dem Unendlichen oder von der Oberfläche der Erde eine Elektricitätsmenge dM auf diesen Conductor bringen; die zur Erreichung dieses Zieles nöthige Arbeit ist VdM.

Die Zunahme des Conductors an Energie ist daher:

$$dW = VdM = \frac{MdM}{C}.$$

Ändert sich die Elektricitätsmenge von M_0 bis M_1, so beträgt die Zunahme an Energie

$$W_1 - W_0 = \frac{1}{2C}(M_1^2 - M_0^2).$$

Da, wenn die Elektricitätsmenge Null wird, auch die elektrische Energie verschwindet, so sieht man, dass die der Elektricitätsmenge M entsprechende Energie ausgedrückt wird durch:

$$W = \frac{M^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}MV.$$

Die elektrische Energie eines Conductors ist somit proportional dem Quadrate der Ladung oder auch dem Quadrate des Potentials.

b) Hat man mehrere Conductoren $A_1, A_2, A_3 \ldots$; die auf ihnen befindlichen Elektricitätsmengen seien $M_1, M_2, M_3 \ldots$; ihre Potentiale $V_1, V_2, V_3 \ldots$ Multipliciert man(¹) die elektrische Dichte in jedem Punkte mit n, so erhält man einen neuen Gleichgewichtszustand; es betragen dann die Potentiale auf den einzelnen Leitern: $nV_1, nV_2, nV_3 \ldots$; die auf ihnen befindlichen Elektricitätsmengen $nM_1, nM_2, nM_3 \ldots$

Lässt man n um dn zunehmen, so beträgt der Zuwachs der Ladung auf dem Conductor $A_1 \ldots M_1 dn$. Die Arbeit, welche man anwenden muss, um diese Elektricitätsmenge auf den Conductor A_1 zu bringen, liegt zwischen

$$M_1 dn . nV_1 \text{ und } M_1 dn . (n + dn) V_1;$$

sie ist daher bei Vernachlässigung unendlich kleiner Größen zweiter Ordnung gleich

$$M_1 V_1 n dn.$$

(¹) Maxwell, Treatise pg. 89; deutsche Übersetzung pg. 101 u. f.; man sehe auch: Mascart u. Joubert, l. c. pg. 91.

Dasselbe gilt für die anderen Conductoren, so dass die Energievariation des Systems beträgt:

$$dW = (M_1V_1 + M_2V_2 + \ldots)\, ndn = ndn \sum MV.$$

Zwischen den Werten n_0 und n_1 ist die Energiezunahme

$$W_1 - W_0 = \frac{n_1^2 - n_0^2}{2} \sum MV.$$

Geht man vom neutralen Zustande aus und kommt in dem Zustande an, in welchem die Leiter die Ladungen M_1, $M_2 \ldots$, die Potentiale V_1, $V_2 \ldots$ besitzen, so werden die Größen n_1 und n_0 gegeben sein durch:

$$n_1 = 1$$
$$n_0 = 0,$$

und man erhält einfach

$$W = \frac{1}{2} \sum MV,$$

welche Formel früher in anderer Weise abgeleitet wurde.

Diese Formel findet auch für den Fall eines elektrisierten Isolators Anwendung; es lässt sich nämlich jedes Volumelement dieses Körpers dv als ein unendlich kleiner Leiter, auf welchem die Elektricitätsmenge ρdv vertheilt sein wird, betrachten. Man erhält:

$$W = \frac{1}{2} \int V \rho dv,$$

wo ρ die elektrische Dichte und V das Potential in dem betrachteten Volumelemente ist.

224. Betrachten wir ein System von Conductoren A_1, A_2, $A_3 \ldots$, auf welchem die Elektricitätsmengen M_1, M_2, $M_3 \ldots$ ausgebreitet sind. Wenn elektrisches Gleichgewicht herrscht, so wird das Potential in jedem der Conductoren einen constanten Wert haben, V_1 im ersten A_1, V_2 im zweiten A_2 u. s. w.

In der Summe ΣmV geben die Glieder, welche sich auf die verschiedenen elektrischen Massen beziehen, die auf dem Conductor A sich befinden, einen Summanden $V_1 \Sigma m = V_1 M_1$; in derselben Weise die auf A_2 bezüglichen Glieder $V_2 M_2$ u. s. w. und die Beziehung (1) geht in

$$(2)\qquad W = \frac{1}{2}(V_1M_1 + V_2M_2 + \ldots)$$

über.

Bemerken wir, dass, wenn ein Conductor isoliert gelassen wird, während man das System elektrisiert, dieser Conductor nur durch Influenz elektrisch wird und gleiche Quantitäten positiver und negativer Elektricität enthält; seine Gesammtladung M ist dann Null, also auch das entsprechende Glied M.V der elektrischen Energie. Isolierte Conductoren verbrauchen also keine Arbeit während der Ladung, liefern aber auch keine solche während der Entladung; gleichwohl wird es nicht richtig sein, daraus zu schließen, dass solche Conductoren das Phänomen nicht verändern, denn ihre Ladung kann die Ladung beeinflussen, welche die anderen Conductoren annehmen, so dass die aufgewandte und hervorgerufene Arbeit vergrößert wird: wir werden davon ein Beispiel bei der Cascadenbatterie kennen lernen.

Wenn einer der Körper constant mit der Erde in Verbindung ist, so können die Erde und der mit ihr verbundene Körper als ein Theil des Systemes betrachtet werden; wegen der großen Dimensionen der Erdkugel wird das Potential oder wenigstens die Änderung des Potentials der betreffenden betrachteten elektrischen Massen nahezu Null sein. Die Menge der auf diesem Conductor durch Influenz hervorgerufenen Elektricität hat einen endlichen Wert, weshalb das der Energie entsprechende Glied wieder Null sein wird.

Es ist klar, dass das Arbeitsquantum, welches nothwendig ist, um einem Körper eine gegebene elektrische Ladung zu ertheilen, ein Minimum ist, wenn der Körper ein vollständig guter Leiter ist; denn, wenn man sich eine andere Vertheilung mit Hilfe von inneren Widerständen vorstellt, so wie sie in unvollständig leitenden Körpern bestehen, und wenn man hierauf annimmt, dass diese Widerstände sich nach und nach verringern, so wird das Fluidum zur ersten Vertheilung zurückkehren, indem es die Widerstände überwindet und demzufolge eine positive Arbeit leistet.

225. Wäre die Elektricität eine materielle Substanz, so würden die Massen, welche die elektrischen Schichten zusammensetzen,

bei der Entladung eine gewisse lebendige Kraft erlangen; es würde die potentielle Energie in kinetische übergehen und die einzelnen Massen würden zufolge der lebendigen Kraft, welche sie erlangt haben, wie Pendel ihre Gleichgewichtslage überschreiten und so dem Systeme einen Bruchtheil der Energie zurückerstatten; es würden aufeinander folgende Entladungen von entgegengesetzter Richtung entstehen, bis die auf den Conductoren freigewordene Wärme die ganze disponible Energie erschöpft hätte und das Gleichgewicht würde nur nach einer gewissen Anzahl Schwingungen erreicht werden.

In der That lehrt der Versuch (1), dass unter gewissen Bedingungen die Entladungen einen oscillatorischen Charakter aufweisen; es kann aber diese Oscillationsbewegung durch eine ganz verschiedene Ursache erklärt werden. Man kann daher auf Grund dieser Versuche keineswegs der Hypothese beipflichten, welche den elektrischen Massen eine gewisse Trägheit zuschreibt; man kann überhaupt bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft keine Thatsache anführen, welche diese wichtige Frage zur Entscheidung brächte. (2)

226. Da nach §. 196 das Potential jedes der Conductoren eine lineare homogene Function der Ladungen der Conductoren ist, so ist wegen der Gleichung $W = \frac{1}{2}\sum VM$ die Energie des Systems eine homogene quadratische Function der Ladungen; da ferner die Ladungen als lineare homogene Functionen der Potentiale ausgedrückt werden können, so kann die Energie auch als homogene quadratische Function der Potentiale ausgedrückt werden.

227. Entladung einer Leydnerflasche. Betrachten wir eine Leydnerflasche mit geschlossenen Belegungen. Wir haben gesehen (201), dass, wenn wir uns mit einer ersten Annäherung begnügen und die Dicke der isolierenden Schichte als constant und sehr klein annehmen, die auf der inneren Belegung ausgebreitete Elektricitätsmenge durch die Formel

(1) Unter anderem sehe man die Abhandlung von Feddersen, Pogg. Ann. Bd. 103.

(2) Mascart und Joubert l. c. pg. 93.

$$M = \frac{VS}{4\pi e}$$

dargestellt ist, wenn V das Potential der Elektricitätsquelle ist, die mit der inneren Belegung in Verbindung steht, und wenn die äußere Belegung zur Erde abgeleitet ist, d. h. auf dem Potentiale Null sich befindet.

Wenn wir mit C das Verhältnis $\frac{S}{4\pi e}$ bezeichnen, welches für eine gegebene Flasche eine constante Größe ist und die elektrische Capacität derselben bedeutet, so hat man:

$$V = \frac{M}{C}.$$

Das Energiequantum, welches eine solche Flasche enthält, ist

$$W = \frac{1}{2} VM = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C}$$

oder

$$W = \frac{1}{2} CV^2.$$

Es ist somit die elektrische Energie einer Leydnerflasche dem Quadrate der Ladung oder auch dem Quadrate des Potentiales der Elektricitätsquelle proportional.

Diese Energie offenbart sich, wenn man die beiden Belegungen durch einen Funkenzieher verbindet; die Flasche entladet sich vollständig, wobei eine Arbeitsmenge $\frac{1}{2} \frac{M^2}{C}$ hervorgerufen wird.

Diese Arbeit wird sich in einem Funken und in der Erwärmung der verschiedenen Theile des Körpers, welcher eine Verbindung zwischen den Belegungen herstellt, manifestieren. Ein Theil der elektrischen Energie wird zum Überwinden des Luftwiderstandes, d. h. zur Erzeugung des Funkens verbraucht; der Rest setzt sich in calorische Energie um.

Wenn die Belegungen durch einen dicken und kurzen Metalldraht verbunden werden, so ist der Funke heftig und die Erwärmung des Conductors sehr schwach. Wenn aber der

Draht lang und dünn ist, so ist der Funke schwach, aber der Draht erwärmt sich beträchtlich. Im allgemeinen ist der Verbrauch von Energie dort bedeutender, wo der zu überwältigende Widerstand größer ist.

Verbindet man die beiden Belegungen durch einen sehr langen und sehr feinen Draht, so wird der Funke sehr schwach und die entsprechende Arbeit kann vernachlässigt werden. Die Menge der in dem Drahte frei gewordenen Wärme ist dann dem Quadrate der Flaschenladung proportional. Dieses Gesetz ist auf experimentellem Wege von Riess gefunden worden.

228. Entladung der Batterien. — Betrachten wir nun eine aus n gleichen Flaschen gebildete Batterie, deren äußere Belegungen alle mit dem Erdboden verbunden sind. Wenn man alle diese Flaschen einzeln mit einer und derselben Elektricitätsquelle ladet, so wird man auf jeder der inneren Belegungen dasselbe Potential V und dieselbe Ladung m herstellen, so dass man hat:

$$V = \frac{m}{c},$$

wo c die elektrische Capacität jeder Flasche ist.

Verbindet man alle inneren Belegungen, so bleibt das Gleichgewicht bestehen, da das Potential überall dasselbe ist und die Flaschen keine Wirkung aufeinander ausüben. Die Gesammtladung ist dieselbe, als ob die Batterie direct mit der Elektricitätsquelle verbunden worden wäre.

Die Energie der Batterie ist gleich der Summe der Energien der einzelnen Flaschen, d. h.

$$W = \frac{1}{2} n V m = \frac{1}{2} V n m = \frac{1}{2} V M,$$

wobei M die Gesammtladung der Batterie bezeichnet.

Eine aus n gleichen Flaschen gebildete Batterie ist daher einer einzigen Flasche von derselben Dicke, deren Oberfläche aber n-mal größer ist, d. h. gleich der Summe der Oberflächen aller Flaschen ist, welche die Batterie zusammensetzen, äquivalent.

Man erhält daraus noch:

$$W = \frac{1}{2}\frac{m}{c}nm = \frac{1}{2c}\frac{(nm)^2}{n} = \frac{1}{2c}\frac{M^2}{n}.$$

Es ist daher für eine aus gleichen Flaschen gebildete Batterie die elektrische Energie proportional dem Quadrate der Ladung und umgekehrt proportional der Anzahl der Flaschen.

Dieses Gesetz ist in Übereinstimmung mit jenem, welches Riess durch das Experiment gefunden hat.

Ersetzt man c durch seinen Wert $\frac{s}{4\pi e}$, welcher sich auf jede Flasche bezieht und bezeichnet man mit S die ganze Oberfläche ns der Batterie, so hat man:

$$W = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{s}\frac{M^2}{n} = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{S}M^2 = \frac{1}{2}\frac{S}{4\pi e}V^2.$$

Man sieht hieraus, dass für eine gegebene Elektricitätsmenge die Energie proportional der Dicke jeder Flasche und umgekehrt proportional der ganzen Oberfläche ist. In diesem Falle wird es vortheilhaft sein, die Anzahl der Flaschen zu vermindern und die Dicke zu vergrößern.

Wenn andererseits das Potential gegeben ist — und das ist der gewöhnliche Fall — so ist die Energie umgekehrt proportional der Dicke und proportional der Gesammtoberfläche. Es ist dann vortheilhaft, die Flaschen zu vervielfältigen, weil dies leichter sein wird, als ihnen eine geringe Dicke zu geben.

229. Man kann eine Batterie noch in einer unvollständigen Weise entladen. Betrachten wir z. B. zwei Batterien, die eine aus n, die andere aus n' ganz gleichen Flaschen bestehend. Laden wir die erste abgesondert, wie gewöhnlich; die potentielle Energie dieser Batterie ist dann:

$$W = \frac{1}{2}nVm = \frac{1}{2c}.\frac{M^2}{n}$$

Die zweite Batterie ist im neutralen Zustande; man verbindet ihre äußere Belegung mit dem Erdboden, die inneren Belegungen der beiden Batterien untereinander; die Ladung nm breitet sich dann auf die $n+n'$ Flaschen aus und man

hat somit eine neue Batterie zusammengestellt, deren potentielle Energie gegeben ist durch:

$$W' = \frac{1}{2c} \frac{M^2}{n + n'}$$

$$W' = \frac{n}{n + n'} W.$$

Die während dieser Transformation gelieferte Arbeit ist gleich der Verminderung $W - W'$ der potentiellen Energie:

$$W - W' = \frac{n'}{n + n'} W = \frac{1}{2c} M^2 \frac{1}{n\left(\frac{n}{n'} + 1\right)}.$$

Der ausgegebene Bruchtheil der ursprünglichen Energie ist:

$$\frac{W - W'}{W} = \frac{1}{1 + \frac{n}{n'}}.$$

230. Diese Formel gilt nicht mehr, wenn die Flaschen der beiden Batterien nicht identisch sind. Sei M_1 die gesammte Elektricitätsmenge, M und M′ jene Mengen, welche sich auf der ersten und auf der zweiten Batterie nach der unvollständigen Entladung ausbreiten. Die ursprüngliche Energie ist immer

$$W = \frac{1}{2c} \frac{M_1^2}{n},$$

wenn die n Flaschen der ersten Batterie untereinander identisch sind.

Sei V′ das Potential auf den inneren Belegungen der beiden miteinander verbundenen Batterien; man wird für jede Flasche der ersten Batterie

$$\frac{M}{n} = cV' \text{ oder } M = ncV'$$

haben.

Wenn man mit c' die elektrische Capacität der Flaschen der zweiten Batterie bezeichnet, so wird man in derselben Weise

$$M' = n'c'V'$$

haben, woraus man erhält:

$$M + M' = M_1 = V'(nc + n'c'),$$

$$V' = \frac{M_1}{nc + n'c'}.$$

Die potentielle Energie, welche diese Batterie noch besitzt, ist:

$$W' = \frac{1}{2} V' M_1 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{nc + n'c'}.$$

Die während der unvollständigen Entladung consumierte Arbeit ist daher:

$$W - W' = \frac{M_1^2}{2}\left[\frac{1}{nc} - \frac{1}{nc + n'c'}\right] = \frac{M_1^2}{2n} \frac{c'}{c^2} \frac{1}{\frac{n}{n'} + \frac{c'}{c}}.$$

Bezeichnen wir mit e und s die Dicke und die Oberfläche jeder Flasche der ersten Batterie, mit e' und s' die analogen Größen für die Flaschen der zweiten Batterie, so hat man:

$$\frac{c'}{c} = \frac{s'}{4\pi e'} : \frac{s}{4\pi e} = \frac{s'}{s} . \frac{e}{e'},$$

woraus man weiter erhält:

$$W - W' = \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{n} \frac{c'}{c^2} \frac{1}{\frac{n}{n'} + \frac{e}{e'} \frac{s'}{s}}.$$

Jetzt ist der ausgegebene Bruchtheil der ursprünglichen Energie bestimmt durch:

$$\frac{W - W'}{W} = \frac{1}{1 + \frac{n}{n'} \frac{s}{s'} \frac{e'}{e}}.$$

Sind die Dicken der Flaschen einander gleich, so bleibt:

$$W - W' = \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{nc} \frac{s'}{s} \frac{1}{\frac{n}{n'} + \frac{s'}{s}},$$

ein Ausdruck, welcher jenem identisch ist, den Riess auf experimentellem Wege erhalten hat.

231. Studieren wir endlich die Ladung par cascade. Betrachten wir mehrere Batterien, eine erste, welche n_1 Flaschen

besitzt, eine zweite mit n_2, eine dritte mit n_3 Flaschen u. s. w.; alle diese Flaschen seien identisch und die Batterien par cascade miteinander verbunden. Die innere Belegung der ersten Batterie steht in Verbindung mit einer Elektricitätsquelle, die äußere Belegung dieser Batterie ist mit der inneren der zweiten in Verbindung u. s. w. bis zur letzten Batterie, deren äußere Belegung zur Erde abgeleitet ist. Sei M_1 die Ladung, welche die innere Belegung der ersten Batterie aufnimmt, das Potential der Elektricitätsquelle sei V_1; durch Influenz wird auf der äußeren Belegung der ersten Batterie eine Ladung $-M_2$ hervorgerufen, während auf der inneren Belegung der zweiten Batterie eine Elektricitätsmenge $+M_2$ sich ansammelt; das Potential des durch diese Belegungen gebildeten Conductors ist V_2; der folgende Leiter besitzt ebenso die Ladungen $-M_3$ und $+M_3$ und sein Potential ist V_3 u. s. w.; das Potential der letzten Belegung ist Null. Man hat also, wenn man mit c die elektrische Capacität jeder Flasche bezeichnet:

für die erste Batterie $M_1 = n_1 c(V_1 - V_2)$

„ „ zweite „ $M_2 = n_2 c(V_2 - V_3)$

„ „ p_{te} und letzte Batterie $M_p = n_p c V_p$.

Man erhält daraus:

$$\frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \ldots + \frac{M_p}{n_p} = cV_1.$$

Können die Flaschen als geschlossen betrachtet werden, so sind die durch Influenz auf allen Belegungen entwickelten Elektricitätsladungen einander gleich und man hat:

$$M_1 = M_2 = M_3 = \ldots = M_p,$$

woraus man erhält:

$$M_1\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_p}\right) = cV_1.$$

Haben alle Batterien dieselbe Anzahl Flaschen, etwa n, so wird die Formel

$$M_1 \frac{p}{n} = cV_1 \text{ oder}$$

$$M_1 = \frac{nc}{p} V_1.$$

Man sieht daraus, dass die elektrische Capacität einer Batterie, welche aus einer gewissen Anzahl identischer Batterien, die par cascade angeordnet sind, besteht, umgekehrt proportional der Anzahl der Batterien und direct proportional der Anzahl der Flaschen jeder Batterie ist.

Würde man p identische einzelne Flaschen cascadenartig miteinander verbinden, so hätte man in obiger Formel $n = 1$ zu setzen und man erhielte als Capacität einer solchen Cascadenbatterie die Formel

$$c_1 = \frac{c}{p}.$$

Während also bei der Zusammenstellung der Flaschen mit ihren gleichartigen Oberflächen die Capacität der Batterie ein so Vielfaches der Capacität einer Flasche ist, als identische Flaschen vorhanden sind, wird die Capacität einer Cascadenbatterie stark vermindert erscheinen. Die Cascadenanordnung ist jedoch vom Vortheile, weil die Leydnerflaschen nur eine beschränkte Potentialdifferenz ertragen können; wird diese Differenz zu groß, so erfolgt die Entladung zwischen den Belegungen längs der Oberfläche des Glases, ja auch durch das Glas, welches durchbohrt wird. Man kann mittelst einer Cascadenbatterie die gesammte Potentialdifferenz stufenweise auf die aufeinanderfolgenden Flaschen vertheilen.

Hat man mehrere einzelne Flaschen, welche die Capacitäten $c, c', c'', \ldots$ besitzen, cascadenartig miteinander verbunden, so findet man ebenso leicht, wie oben, die Capacität der Batterie c_1 nach folgender Formel:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{c''} + \ldots$$

Die potentielle Energie einer Reihe von Batterien, die par cascade angeordnet sind, ist:

$$W = \frac{1}{2}(V_1 M_1 - V_2 M_2 + V_2 M_2 - \ldots - V_{p-1} M_{p-1} + V_{p-1} M_{p-1}),$$

oder

$$W = \frac{1}{2} V_1 M_1.$$

Man hätte überdies diese Gleichung direct aufschreiben können, da die zwischenliegenden Conductoren, welche isoliert bleiben, und die letzte Belegung, welche mit dem Erdboden in Verbindung steht, zur potentiellen Energie nichts beitragen.

Wenn man die Flaschen geschlossen betrachtet, und wenn man V_1 durch seinen früher gewonnenen Wert ersetzt, erhält man:

$$W = \frac{1}{2c} M_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_p} \right).$$

Dies ist die Arbeitsgröße, welche nöthig ist, um die Batterie zu laden und auch die Arbeit, welche bei der Entladung hervorgerufen wird.

Wenn dieselbe Elektricitätsmenge auf die erste Batterie allein gebracht worden wäre, so wäre die Arbeit

$$W_1 = \frac{1}{2c} M_1^2 \frac{1}{n_1}$$

gewesen; daraus erhält man:

$$\frac{W}{W_1} = \frac{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_p}}{\frac{1}{n_1}}$$

eine Formel, welche sich auf:

$$\frac{W}{W_1} = 1 + \frac{n_1}{n_2}$$

reduciert, wenn die Cascade aus zwei Batterien allein gebildet ist. Dies ist wieder ein Gesetz, welches Riess auf experimentellem Wege gefunden hat.

232. Von diesen Formeln lassen sich wichtige Anwendungen machen.

Wenn alle Batterien aus derselben Anzahl Flaschen n gebildet sind, und wenn die erste Batterie eine Ladung M erhält, so ist die potentielle Energie

$$W = \frac{1}{2c} M^2 \frac{p}{n}.$$

Die elektrische Arbeit für eine und dieselbe Elektricitätsmenge ist daher der Anzahl der Batterien direct, der Flaschen-

anzahl oder der Oberfläche jeder Batterie umgekehrt proportional.

Die gesammte Oberfläche der Flasche ist:

$$S = pns$$

und man hat, wenn man c durch $\frac{s}{4\pi e}$ ersetzt,

$$V = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{s}M^2\frac{p}{n} = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{S}M^2p^2.$$

Wenn man also über eine bestimmte Elektricitätsmenge M und über eine gewisse Anzahl Flaschen verfügt, die man als gleiche Batterien cascadenweise verbindet, so ist die elektrische Arbeit proportional dem Quadrate der Anzahl der Batterien. Diese Arbeit ist daher ein Maximum, wenn alle Flaschen, eine mit der anderen, par cascade verbunden sind.

Wenn andererseits das Potential V bestimmt ist, so hat man ebenso für gleiche Batterien

$$W = \frac{1}{2}cV^2\frac{n}{p} = \frac{1}{2}\frac{s}{4\pi e}V^2\frac{n}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{4\pi e}\right)\frac{V^2}{p^2}.$$

Die Arbeit ist dann umgekehrt proportional dem Quadrate der Batterienanzahl. In diesem Falle wird die Anwendung von Cascaden daher ungünstig sein.

233. Elektrische Arbeit während der Verstellung isolierter Conductoren.

Mascart hat im Jahre 1877 die Arbeitsverhältnisse betrachtet, welche stattfinden, wenn jene Leiter, welche einen Accumulator bilden, beweglich sind. (¹) Wir wollen diese Verhältnisse im Folgenden näher erörtern. Wir betrachten zunächst Conductoren, auf welchen die Ladung constant ist.

Ändert man die relative Lage der ein System bildenden Conductoren, ohne aber zwischen ihnen eine Verbindung herzustellen, so ruft man im allgemeinen eine positive oder nega-

(¹) Journal de Physique. 6, 169, 1877; auch Mascart u. Joubert, l. c. pg. 96.

tive Arbeit der elektrischen Kräfte hervor; man ändert demzufolge die Energie des Systems, welche durch die Formel

$$W = \frac{1}{2}\sum MV$$

ausgedrückt wird. Erfährt das System durch eine äußere Arbeit eine Lagenänderung, die den elektrischen Wirkungen entgegengesetzt ist, so wird die Energie um eine entsprechende Größe gesteigert.

Werden die einzelnen dem Systeme angehörenden Leiter sich selbst überlassen, so bewegen sie sich, den elektrischen Wirkungen, welche zwischen ihnen herrschen, Folge leistend; die entwickelte positive Arbeit hat eine Energieverminderung des Systems zur Folge. Nennt man dT die in einem bestimmten Augenblicke geleistete Arbeit der elektrischen Kräfte, dW die entsprechende Energievariation, so ist

$$dW + dT = 0,$$

woraus man ersieht, dass die Energie der ihren Wechselwirkungen überlassenen Conductoren einem Minimum zustrebt.

Wenn die Ladung der Conductoren constant ist, wie wir es voraussetzten, so ist

$$dW = \frac{1}{2}\sum M dV,$$

da ganz allgemein

$$dW = \frac{1}{2}\sum M dV + \frac{1}{2}\sum V dM$$

ist und man erhält die Formel

$$dT = -\frac{1}{2}\sum M dV.$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass einer positiven Arbeit eine Verminderung des Potentials entspricht. Ein in ein elektrisches Feld hineingezogener, ursprünglich im neutralen Zustande befindlicher Körper erniedrigt in der That die Potentiale.

Betrachten wir nun den zweiten Fall, in welchem die Leiter durch Elektricitätsquellen, welche außerhalb des Wirkungs-

feldes sich befinden, auf constante Potentiale gebracht wurden.

Wir werden voraussetzen, dass die Leiter A_1, A_2, A_3 . . ., deren Ladungen M_1, M_2, M_3... und deren Potentiale V_1, V_2, V_3.. sind, einzeln mit Körpern in Verbindung stehen, deren Capacitäten C_1, C_2, C_3.. sind und die jeder äußeren Einwirkung entzogen wurden, z. B. mit geschlossenen Condensatoren, deren äußere Belegungen mit dem Erdboden in Verbindung stehen; erleidet das System eine Verschiebung ohne äußere Kräfte, so ist, wenn wir die Arbeit der elektrischen Kräfte wieder mit dT bezeichnen:

$$dT + dW = 0.$$

Nun ist

$$dW = dW_1 + dW_2,$$

wenn W_1 die Energie der Conductoren, W_2 jene der Condensatoren ist; es ist ferner

$$W_1 = \frac{1}{2}\sum MV$$

und dann

$$dW_1 = \frac{1}{2}\sum M dV + \frac{1}{2}\sum V dM.$$

Für die Condensatoren, deren Capacität constant ist, hat man:

$$W_2 = \frac{1}{2}\sum CV^2$$

und

$$dW_2 = \sum CV dV.$$

Für jedes aus einem Conductor und dem entsprechenden Condensator gebildete System ist die Elektricitätsmenge

$$M + CV$$

constant.

Daraus folgt:

$$dM + C dV = 0$$

und man erhält für alle Conductoren und Condensatoren die Gleichung

$$\sum V dM + \sum CV dV = 0$$

und daraus nach leichter Rechnung

$$2dW_1 + dW_2 = \sum M dV = -\sum \frac{M dM}{C}.$$

Die zuletzt aufgestellte Gleichung ist giltig, wie auch immer die Capacitäten der Condensatoren beschaffen sein mögen; wenn diese Capacitäten unendlich groß im Verhältnisse der Ladungen M der Conductoren sind, so kann man die Energievariationen von der Form MdV vernachlässigen und es bleibt dann

$$2dW_1 + dW_2 = 0,$$

woraus augenblicklich

$$dT = dW_1$$

folgt. Wenn also die Conductoren durch äußere Elektricitätsquellen auf constante Potentiale gebracht wurden, so nimmt bei einer Deformation des Systems die elektrische Energie des Systems um eine Größe zu, welche der Arbeit der elektrischen Kräfte gleichkommt. Diese Arbeit ist, wenn das System sich selbst überlassen wird, positiv und ebenso wie der Energiezuwachs den Elektricitätsquellen entlehnt, welche die Constanz des Potentials hervorrufen. Die Quellen liefern daher in jedem Momente eine Energiemenge, die sich in zwei gleiche Theile theilt: der eine Theil dient zur Vollziehung der Arbeit der elektrischen Kräfte dT, der andere zur Vergrößerung der elektrischen Energie des Systems um dW_1. Die Gleichung

$$dT = dW_1$$

lehrt, dass jetzt die Energie des Leitersystemes einem Maximum zustrebt.

234. Mascart hat diese wichtigen allgemeinen Betrachtungen auf einen Fall angewendet, der in der Theorie der symmetrischen Elektrometer vom Belange ist; auch Maxwell(¹) erörtert diesen Fall in seinem Werke.

Es seien zwei hohle leitende Cylinder A und B (Fig. 104) von unendlicher Länge, die eine gemeinschaftliche Axe haben

(¹) Maxwell, Treatise etc., pg. 155, Art. 127; deutsche Übersetzung pg. 189.

und voneinander um einen kleinen Zwischenraum abstehen. C sei ein den vorigen concentrischer Cylinder, der im Sinne dieser Axe beweglich ist; die Länge dieses Cylinders ist so groß, dass die elektrische Dichte an jedem seiner Enden nur von dem benachbarten fixen Conductor abhängt. Seien V_a, V_b und V die Potentiale, A_0, B_0, C_0 die Ladungen der drei Körper, welche sie besitzen, wenn der bewegliche Cylinder in einer Lage sich befindet, die symmetrisch zu den beiden anderen ist.

Verrückt sich der Cylinder C um eine kleine Größe x, z. B. nach rechts, so wird die Vertheilung der Elektricität auf den verschiedenen Oberflächen, welche der Öffnung benachbart sind,

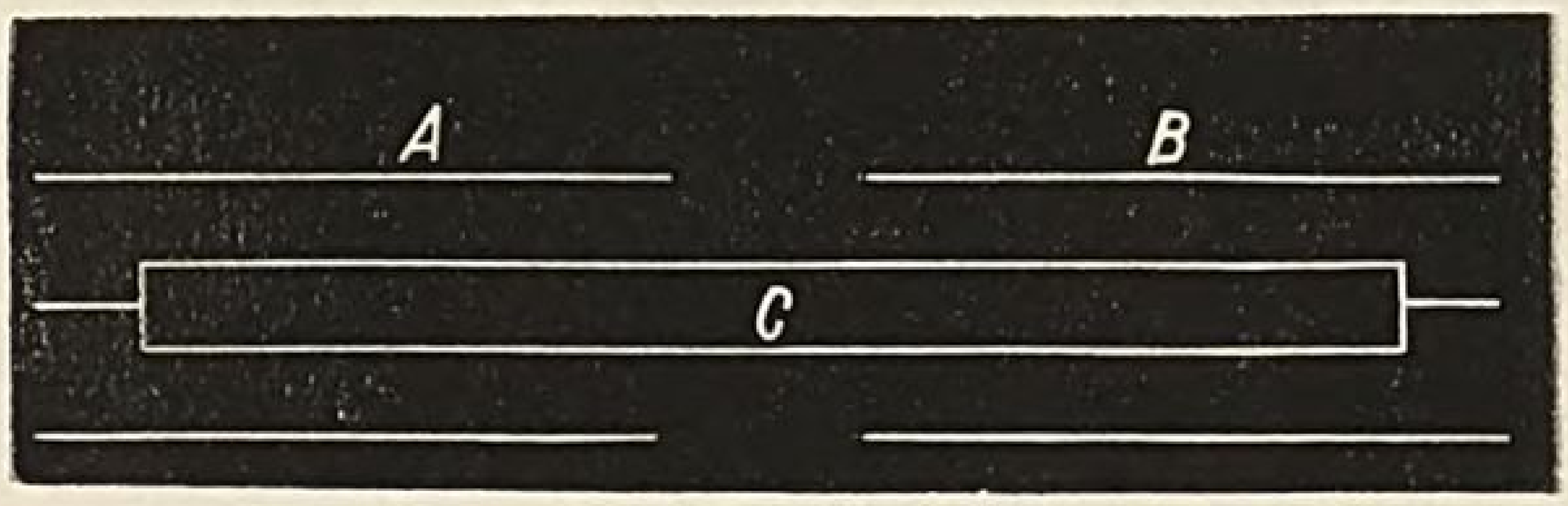


Fig. 104.

und an den Enden nicht geändert; man hat einfach auf dieser Seite die Oberfläche, auf welcher die elektrische Dichte gleichförmig und proportional der Potentialdifferenz der benachbarten Conductoren ist, um eine Größe vermehrt, die dem x proportional ist. Die rechtsseitige Hälfte des beweglichen Cylinders wird daher eine Elektricitätsmenge gewinnen, die x proportional ist, und der fixe Cylinder B eine gleiche Menge entgegengesetzter Elektricität; das Umgekehrte wird auf der anderen Seite der Fall sein.

Man wird also, wenn man A, B, C die neuen Ladungen der drei Leiter nach der Verrückung des inneren Cylinders nennt, und mit α die Capacität per Längeneinheit des inneren Cylinders fern von der Mitte und den Enden bezeichnet, haben

$$C = C_0 + \alpha x (V - V_b) - \alpha x (V - V_a) = C_0 + \alpha x (V_a - V_b)$$
$$B = B_0 - \alpha x (V - V_b)$$
$$A = A_0 + \alpha x (V - V_a).$$

Die Energievariation ist daher:

$$W - W_0 = \alpha x (V_a - V_b) \left[V - \frac{1}{2} (V_a + V_b) \right].$$

Die Resultante F der Wirkungen von A und B auf C ist wegen der Symmetrie parallel zur gemeinschaftlichen Axe; es ist die während der Verrückung x vollzogene Arbeit gleich der Variation der Energie.

Hieraus erhält man

$$F = \alpha (V_a - V_b) \left[V - \frac{1}{2} (V_a + V_b) \right].$$

Ist V gegen $V_a + V_b$ groß, dann ist die Kraft näherungsweise

$$F = \alpha (V_a - V_b) \, V;$$

nach dieser Formel kann die Differenz der Potentiale der beiden Cylinder gemessen werden, wenn wir F messen können; die Genauigkeit der Messung wird umso bedeutender, je größer V, das Potential des inneren Cylinders, ist.

Dieses Princip wird im Quadrantenelektrometer von Thomson verwertet und wir werden später zu der für die Resultierende F aufgestellten Formel auch noch auf anderem Wege gelangen.

Für unseren speciellen Fall können wir auch die Größe α finden. Wir haben früher die Capacität eines cylindrischen Condensators für die Längeneinheit gefunden; sie war durch folgende Formel dargestellt:

$$\alpha = \frac{1}{2 \log . \frac{R_2}{R_1}},$$

wo R_2 den Radius des äußeren, R_1 den Radius des inneren Cylinders bedeutet, und es wird dann unsere Formel:

$$F = \frac{V_a - V_b}{2 \log . \frac{R_2}{R_1}} \left[V - \frac{1}{2} (V_a + V_b) \right].$$

VII. Capitel.

Anwendung der Theorie auf die elektrische Vertheilung.

235. Wir wollen in erster Linie die Vertheilung der Elektricität auf Conductoren, die jeder Influenzwirkung entzogen sind, untersuchen.

Bezeichnen wir mit ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes derjenigen Oberfläche, auf welcher die Elektricitätsvertheilung bestimmt werden soll; auf diesen Punkt habe das Potential V Bezug; es seien ferner x, y, z die Coordinaten eines willkürlichen Oberflächenelementes $d\sigma$, so ist:

$$V = \int \frac{\rho d\sigma}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

wenn ρ die Dichte im Punkte x, y, z bedeutet, die uns unbekannt ist. Es muss ρ als derartige Function von x, y, z bestimmt werden, dass dieses Integral, erstreckt über die ganze Oberfläche, einen constanten, von ξ, η, ζ unabhängigen Wert bekommt; denn dann ist nach früheren Sätzen die Elektricität auf der Oberfläche im Gleichgewichte und die Wirkung in einem beliebigen, im Innern des Körpers gelegenen Punkte ist Null. Hat man eine derartige Function ρ gefunden, so genügt auch $C\rho$ der eben erwähnten Bedingung, wo C eine Constante ist. Man bestimmt diese Constante C aus der ganzen über die Oberfläche vertheilten Elektricitätsmenge Q, denn man hat

$$Q = \int C\rho d\sigma,$$

woraus

$$C = \frac{Q}{\int \rho d\sigma}$$

folgt.

Diese allgemeine Methode wurde von Poisson[1] angegeben und von ihm sowie von späteren Analytikern in Anwendung gebracht. Es bietet aber diese Methode zumeist große Schwierigkeiten und die Lösung ist nur in einigen Problemen gelungen.

236. Wir wollen im Nachstehenden nach einer der erwähnten Poisson'schen Methode ähnlichen Methode die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche einer Kugel und eines dreiaxigen Ellipsoides bestimmen.

Nehmen wir, bevor wir zu diesen speciellen Fällen übergehen, allgemein eine mit Elektricität beladene beliebige

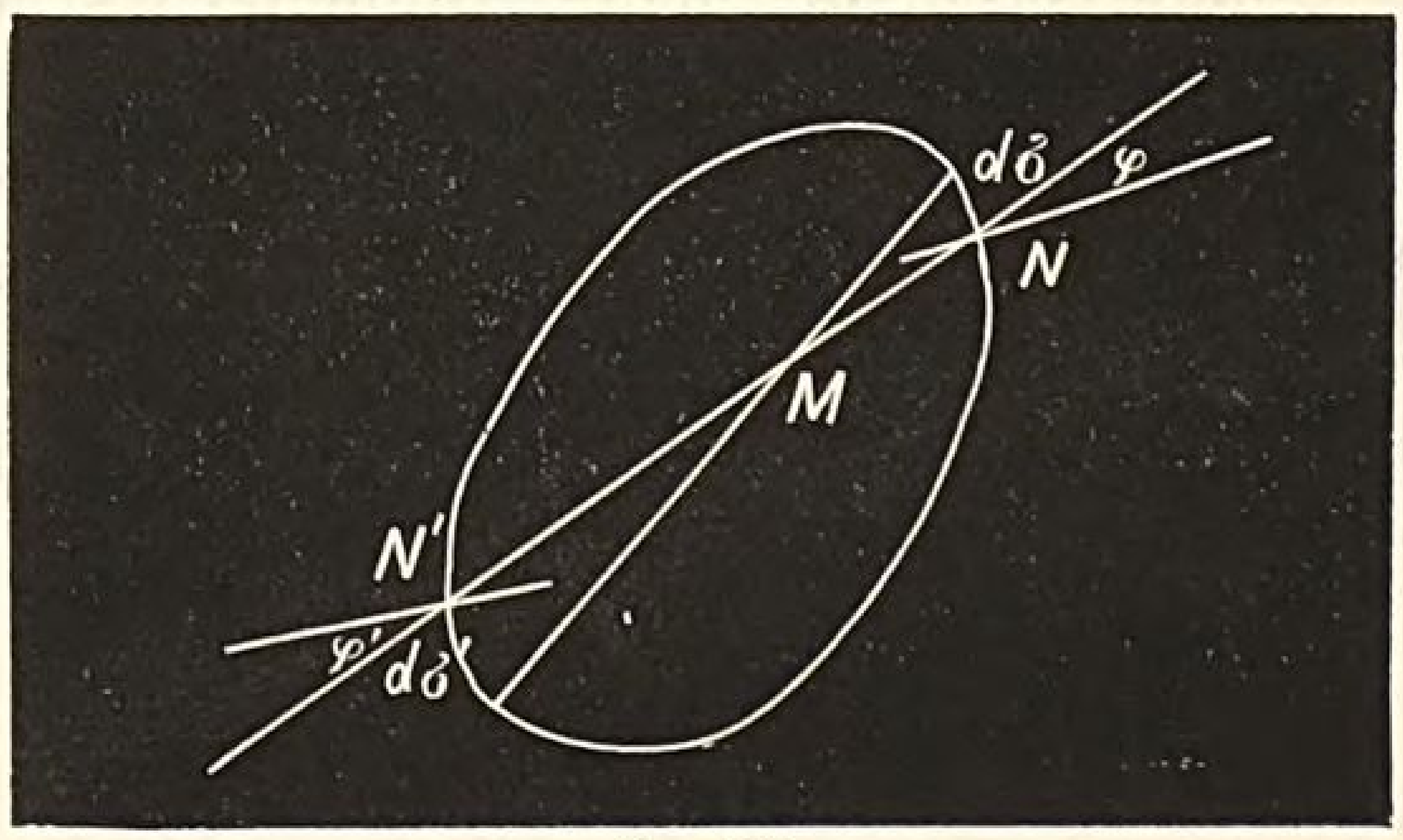


Fig. 105.

Fläche an; soll die Elektricität im Gleichgewichte sein, so muss die Wirkung — wie bereits oben gesagt — in einem inneren Punkte M (Fig. 105) Null sein. Zeichnen wir durch denselben einen Doppelkegel mit unendlich kleiner Öffnung, so schneidet derselbe die Oberfläche in zwei Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$, auf welchen die Elektricität die Dichte ρ und ρ' habe; wegen der Kleinheit der Oberflächenelemente können wir auf ihnen ρ und ρ' als constant ansehen. Die Kräfte nun, welche von diesen Elementen auf M ausgeübt werden, sind

(1) Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs (1811).

$$\frac{\rho d\sigma}{r^2} \text{ und } \frac{\rho' d\sigma'}{r'^2},$$

wenn r und r' die Entfernungen MN und MN' des Punktes M von den beiden Elementen bezeichnen. Beide Kräfte fallen in die Richtung der Kegelaxe und haben entgegengesetzte Richtung; sie werden sich aufheben, wenn

$$\frac{\rho d\sigma}{r^2} = \frac{\rho' d\sigma'}{r'^2}$$

ist. Ist diese Gleichung für jeden anderen Doppelkegel erfüllt, so erfährt M keine Kraftwirkung von der über die Oberfläche verbreiteten Elektricität. Für die einzelnen Elemente muss man ρ und ρ' derart bestimmen, dass obige Gleichung erfüllt ist.

Nennt man noch ω den räumlichen Winkel des Doppelkegels und φ und φ' die Winkel, welche die nach außen auf $d\sigma$ und $d\sigma'$ errichteten Normalen mit der Geraden N'N, resp. NN' bilden, so hat man

$$d\sigma . \cos\varphi = r^2 d\omega$$

$$d\sigma' . \cos\varphi' = r'^2 d\omega;$$

deshalb wird die früher aufgestellte Bedingungsgleichung für das elektrische Gleichgewicht werden:

$$\rho : \rho' = \cos\varphi : \cos\varphi'.$$

Bezeichnet man die Coordinaten von σ mit x, y, z, jene von σ' mit x', y', z', wobei ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem gewählt sein möge; setzt man ferner die Winkel, welche die Normalen in N und N' mit den Coordinatenaxen bilden, λ, μ, ν und λ', μ', ν'; dann ist

$$\cos\varphi = \frac{x - x'}{l}\cos\lambda + \frac{y - y'}{l}\cos\mu + \frac{z - z'}{l}\cos\nu,$$

$$\cos\varphi' = \frac{x' - x}{l}\cos\lambda' + \frac{y' - y}{l}\cos\mu' + \frac{z' - z}{l}\cos\nu',$$

wenn man N'N $= l$ setzt. Hat die Oberfläche die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

so ist bekanntlich

$$\cos\lambda = \frac{\partial F}{\partial x} : N, \cos\mu = \frac{\partial F}{\partial y} : N, \cos\nu = \frac{\partial F}{\partial z} : N$$

$$\cos\lambda' = \frac{\partial F}{\partial x'} : N', \cos\mu' = \frac{\partial F}{\partial y'} : N', \cos\nu' = \frac{\partial F}{\partial z'} : N',$$

wenn abkürzungshalber

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = N,$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2} = N'$$

gesetzt wurde. Es wird nun:

$$\cos\varphi = \left[(x - x')\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y')\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z')\frac{\partial F}{\partial z}\right] : l.N$$

$$\cos\varphi' = \left[(x' - x)\frac{\partial F}{\partial x'} + (y' - y)\frac{\partial F}{\partial y'} + (z' - z)\frac{\partial F}{\partial z'}\right] : l.N',$$

daher die Gleichgewichtsbedingung:

$$\rho : \rho' = \frac{1}{N}\left[(x - x')\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y')\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z')\frac{\partial F}{\partial z}\right] :$$

$$: \frac{1}{N'}\left[(x' - x)\frac{\partial F}{\partial x'} + (y' - y)\frac{\partial F}{\partial y'} + (z' - z)\frac{\partial F}{\partial z'}\right].$$

Diese Methode ist für Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung anwendbar, denn dann wird ρ eine Function von x, y, z, ρ' dieselbe Function von x', y', z' sein.

237. Vertheilung der Elektricität auf einer Kugeloberfläche. In diesem Falle ist $\varphi = \varphi'$, wie leicht zu ersehen ist; deshalb geht die Gleichgewichtsbedingung:

$$\rho : \rho' = \cos\varphi : \cos\varphi'$$

über in:

$$\rho = \rho'$$

und wir erhalten somit den Satz: Die über der Kugeloberfläche verbreitete Elektricität ist dann im Gleichgewichte, wenn in allen Punkten dieser Oberfläche constante elektrische Dichte herrscht.

238. Vertheilung der Elektricität auf einem dreiaxigen Ellipsoide.

Da in diesem speciellen Falle

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist, wo a, b, c die drei Halbaxen des Ellipsoides bedeuten, so hat man, wenn man berücksichtigt, dass

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{2}{p}$$

ist, wobei p die Senkrechte ist, welche man vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die durch den Punkt x, y, z an das Ellipsoid gezeichnete Tangentialebene fällen kann:

$$\cos\varphi = \frac{p}{l}\left(1 - \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2}\right)$$

und analog:

$$\cos\varphi' = \frac{p'}{l}\left(1 - \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2}\right).$$

Man erhält hieraus:

$$\cos\varphi : \cos\varphi' = p : p'$$

und schließlich:

$$\rho : \rho' = p : p'.$$

Auf einem dreiaxigen Ellipsoide ist daher die Elektricität derart verbreitet, dass deren Dichte in jedem Punkte der Länge des Perpendikels p proportional ist. Dieser Satz gilt für alle Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, also für alle Flächen, deren Gleichungen durch:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

ausgedrückt sind.

Die Dichte der Elektricität in einem Punkte der ellipsoidischen Oberfläche kann daher ausgedrückt werden durch:

$$\rho = Cp,$$

wenn C eine Constante ist und p die frühere Bedeutung hat. Wir wollen die Constante C durch die Angabe der gesammten

Elektricitätsmenge Q, die sich auf der Oberfläche befindet, bestimmen. Es ist nämlich, unter $d\sigma$ ein Oberflächenelement des Ellipsoides, in welchem die Dichte ρ herrscht, verstanden:

$$Q = \int \rho \, d\sigma = C \int p \, d\sigma.$$

Bezeichnet man den Inhalt eines unendlich kleinen Kegels, der $d\sigma$ zur Grundfläche, p zur Höhe hat, mit di, so ist

$$di = \frac{1}{3} p \, d\sigma$$

und das Volumen des Ellipsoides V somit:

$$V = \frac{1}{3} \int p \, d\sigma,$$

wobei die Integration über die gesammte Oberfläche des Ellipsoides ausgedehnt werden muss. Man hat nun

$$C = \frac{Q}{3V}$$

und daher

$$\rho = \frac{Qp}{3V}.$$

Da das Volumen des Ellipsoides

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

ist, so ist schließlich:

$$\rho = \frac{p}{4\pi abc} Q,$$

eine Formel, welche bereits früher (§. 66) gefunden wurde. An den Enden der großen Axe ist die Dichte der Elektricität am größten, an den Enden der kleinen Axe am kleinsten.

239. Bestimmung des äusseren Potentiales der über ein Ellipsoid vertheilten Elektricität. (¹).

Sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(¹) Grinwis, l. c. pg. 60 u. f.

die Gleichung der ellipsoidischen Oberfläche S, auf welcher die Elektricitätsmenge Q verbreitet ist; α, β, γ seien die Coordinaten eines außerhalb dieser Oberfläche liegenden Punktes, in welchem wir das Potential der Elektricitätsschichte suchen.

Wir legen durch diesen Punkt eine mit der ersten confocale ellipsoidische Oberfläche S'; die Gleichung derselben ist

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

und man hat:

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2,\ a^2-c^2=a'^2-c'^2,\ b^2-c^2=b'^2-c'^2.$$

Bezeichnet man mit μ einen Parameter, der für ein anderes confocales Ellipsoid einen anderen Wert hat, so ist:

$$a'^2=a^2+\mu,\quad b'^2=b^2+\mu,\quad c'^2=c^2+\mu.$$

Die Coordinaten des Punktes α, β, γ genügen deshalb nachstehender Gleichung:

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\mu}+\frac{\beta^2}{b^2+\mu}+\frac{\gamma^2}{c^2+\mu}=1.$$

Bezüglich μ ist diese Gleichung vom dritten Grade und hat deshalb drei Wurzeln, von denen nur eine positiv ist, so dass das Ellipsoid S' vollkommen bestimmt ist.

Unter gepaarten Punkten der beiden ellipsoidischen Oberflächen versteht man solche Punkte, deren Coordinaten den entsprechenden Halbachsen proportional sind. Sind nun M und N (Fig. 106) zwei Punkte des ersten Ellipsoides S, M' und N' die gepaarten Punkte auf dem zweiten Ellipsoide S', so ist — wie leicht gezeigt werden kann —

$$MN'=M'N.$$

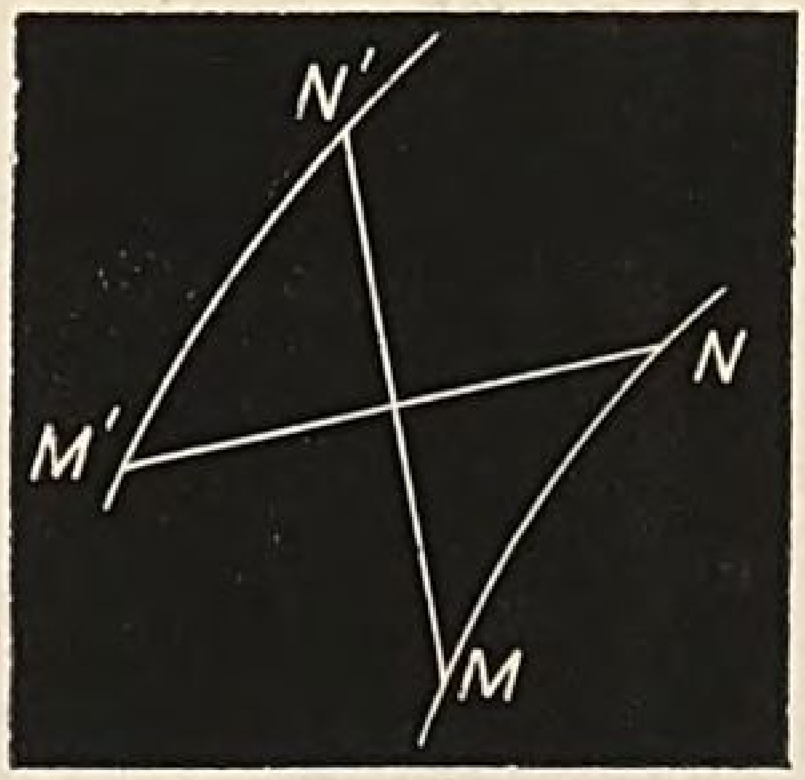


Fig. 106.

Die Elektricität auf der Oberfläche S hat nach dem Früheren die Dichte

$$\rho=\frac{Qp}{4\pi abc}.$$

Würden wir dieselbe Menge über die Oberfläche S' ausbreiten, so wäre die Dichte auf dieser Oberfläche bestimmt durch

$$\rho' = \frac{Qp'}{4\pi a'b'c'},$$

wobei

$$p' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a'^4} + \frac{y'^2}{b'^4} + \frac{z'^2}{c'^4}\right)}} \text{ ist.}$$

Sind φ und φ' die Winkel, welche die Normalen in zwei correspondierenden Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$ der beiden Oberflächen, d. h. in Elementen, welche an der Stelle gepaarter Punkte sich befinden, mit der Axe der Z bilden, so sind offenbar $dx\,dy$, $dx'\,dy'$ ihre Projectionen auf die XY-Ebene und man hat:

$$dxdy = d\sigma . \cos\varphi, \quad dx'dy' = d\sigma' . \cos\varphi',$$

so dass die Elektricitätsmengen in den beiden Elementen angegeben werden durch:

$$\rho d\sigma = \frac{\rho dxdy}{\cos\varphi}, \quad \rho' d\sigma' = \frac{\rho' dx'dy'}{\cos\varphi'}.$$

Da nun:

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{y}{y'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{c}{c'}$$

ist, so ist

$$dxdy = \frac{ab}{a'b'} dx'dy'.$$

Es ist ferner:

$$\rho : \rho' = \frac{p}{abc} : \frac{p'}{a'b'c'}$$

und

$$\cos\varphi = \frac{pz}{c^2}, \quad \cos\varphi' = \frac{p'z'}{c'^2}$$

somit:

$$\frac{1}{\cos\varphi} : \frac{1}{\cos\varphi'} = \frac{c}{p} : \frac{c'}{p'}.$$

Durch Substitution dieser Gleichungen in die folgende Proportion:

$$\rho d\sigma : \rho' d\sigma' = \frac{\rho}{\cos\varphi} dx\,dy : \frac{\rho'}{\cos\varphi'} dx'dy'$$

erhält man schließlich:

$$\rho d\sigma = \rho' d\sigma'.$$

Es enthalten also zwei übereinstimmende Elemente gleich große Elektricitätsmengen. Es ist nun klar, dass deshalb das Potential der Ladung von S in einem Punkte M' gleich dem Potentiale der Ladung von S' in dem mit M' gepaarten Punkte M ist, da beide Integrale, welche die Potentiale ausdrücken, aus gleichen Elementen bestehen.

Weil nun das Potential von S' in allen Punkten von S, da dies innere Punkte sind, constant ist, so folgt, dass S' eine Niveaufläche von S ist.

Es ist ferner einleuchtend, dass das Potential V' von S' in einem äußeren Punkte M'' gleich dem Potentiale V von S in demselben Punkte ist; denn legt man durch M'' ein drittes confocales Ellipsoid S'' mit der Ladung Q, so sind, wenn M, M', M'' gepaarte Punkte sind, die Potentiale von S und S' in M'' jedes einzeln gleich dem Potentiale von S'' in M und M'; diese beiden letzten Werte sind aber einander gleich, da M und M' innere Punkte sind.

Wir haben nun für den Punkt M'

$$\frac{dV'}{dn} = -4\pi\rho',$$

welche Formel wir nun auch in folgender Weise schreiben können

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\rho',$$

oder es ist:

$$dV = -4\pi\rho' dn.$$

Legen wir durch das Ende von dn ein confocales Ellipsoid, dessen Parameter $\mu + d\mu$ ist, so erhalten wir infolge der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1$$

die Differentialbeziehung:

$$\frac{2xdx}{a^2+\mu}+\frac{2ydy}{b^2+\mu}+\frac{2zdz}{c^2+\mu}-$$

$$-\left[\frac{x^2}{(a^2+\mu)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\mu)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\mu)^2}\right]d\mu=0$$

oder in einfacherer Schreibweise:

$$\frac{2xdx}{a'^2}+\frac{2ydy}{b'^2}+\frac{2zdz}{c'^2}-\left(\frac{x^2}{a'^4}+\frac{y^2}{b'^4}+\frac{z^2}{c'^4}\right)d\mu=0.$$

Die Richtungscosinusse der Normale in M' sind:

$$\frac{p'}{a'^2}x,\ \frac{p'}{b'^2}y,\ \frac{p'}{c'^2}z,$$

deshalb:

$$dx=\frac{p'}{a'^2}xdn,\ dy=\frac{p'}{b'^2}ydn,\ dz=\frac{p'}{c'^2}zdn.$$

Die oben aufgeschriebene Gleichung nimmt nun die Form

$$2p'\left(\frac{x^2}{a'^4}+\frac{y^2}{b'^4}+\frac{z^2}{c'^4}\right)dn-\frac{d\mu}{p'^2}=0$$

an; nach weiterer Reduction erhält man:

$$dn=\frac{d\mu}{2p'}$$

und nun:

$$dV=-4\pi\rho'\frac{d\mu}{2p'}=-\frac{2\pi\rho'}{p'}d\mu.$$

Da ferner:

$$\frac{\rho'}{p'}=\frac{Q}{4\pi a'b'c'}$$

ist, so wird:

$$dV=-\frac{Qd\mu}{2a'b'c'}$$

oder

$$dV=-\frac{Qd\mu}{2\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}.$$

Integriert man von der Oberfläche S, als von $\mu=0$ bis zu einem willkürlichen Werte μ, so ist, wenn an der Oberfläche des Ellipsoides S das Potential den Wert V_0 hat:

$$V=V_0-\frac{1}{2}\int_0^\mu \frac{Q d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}.$$

Bedenkt man ferner, dass für $\mu=\infty$ das Potential den Wert Null annimmt, so ist

$$V_0=\frac{Q}{2}\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}$$

und nun:

$$V=\frac{Q}{2}\int_\mu^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}$$

als Ausdruck für das Potential, welches das ursprünglich betrachtete Ellipsoid auf einen außerhalb desselben liegenden Punkt ausübt.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass der in diesem Artikel in Anwendung gebrachte Satz, dass die Potentiale der beiden mit derselben Elektricitätsmenge belegten confocalen ellipsoidischen Oberflächen S und S′ in einem äußeren Punkte einander gleich sind, ein specieller Fall des von Mac Laurin(¹) aufgestellten und von Legendre bestimmter ausgesprochenen Theoremes ist, welches lautet:

Wenn die drei Hauptschnitte zweier Ellipsoide resp. dieselben Brennpunkte haben oder confocal sind, so haben die Kräfte, mit denen sie denselben äußeren Punkt anziehen, dieselbe Richtung und verhalten sich zueinander wie die Massen der Ellipsoide.

240. Wir wollen nun die von Green angegebene und bereits früher erwähnte Methode zur Bestimmung der Dichte der Elektricität auf der Oberfläche von Conductoren an einigen

(¹) Mac Laurin, treatise of fluxions, Art. 653.

Beispielen erörtern. Nimmt man eine bestimmte Elektricitätsmenge in beliebiger Vertheilung in einem Punkte, auf einer Linie oder Fläche an und sucht das zugehörige Potential und die entsprechenden Niveauflächen, denen die Gleichung

$$V = \text{constans}$$

zukommt, dann wird die betrachtete Elektricitätsmenge, auf diese Flächen übertragen, in äußeren Punkten dasselbe Potential ausüben, und die elektrische Dichte auf diesen Flächen findet man aus dem bekannten Potentialwerte durch die Gleichung

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn},$$

in welcher Formel für $\frac{dV}{dn}$ der Wert für die ursprünglich betrachteten Elektricitätsmengen an der gewählten Niveaufläche genommen werden muss.

Wir gehen im Nachfolgenden zu einigen besonderen Fällen über.

241. Nehmen wir zunächst in einem Punkte M eine Elektricitätsmenge Q an. Das Potential der letzteren im Abstande r vom Punkte M ist $V = \frac{Q}{r}$; es sind daher die Niveauflächen concentrische Kugeln, deren Centrum in M liegt. Die Dichte der Elektricität auf der Kugel vom Radius R ist:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}$$

oder

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{O},$$

wenn O die Oberfläche der Kugel bedeutet.

Wir erhalten wieder das bekannte Resultat, dass die Elektricität auf einer Kugelfläche sich in gleichförmiger Dichte anordnet.

242. Als zweites Beispiel wählen wir die Bestimmung der Dichte der Elektricität auf einem Rotationsellipsoide.

Auf einer geraden Linie von der Länge $2l$ sei die Elektricitätsmenge Q gleichförmig vertheilt, so dass die Dichte ρ in einem Punkte durch die Formel

$$\rho = \frac{Q}{2l}$$

bestimmt ist. Nehmen wir den Mittelpunkt der Strecke zum Coordinatenanfangspunkte, die Abscissenaxe mit der Strecke zusammenfallend, dann ist das Potential in einem Punkte (x, y) bestimmt durch:

$$V = \frac{Q}{2l} \int_{-l}^{+l} \frac{d\xi}{\sqrt{y^2 + (x-\xi)^2}},$$

wobei wir mit ξ die Abscissen der Punkte der Strecke bezeichnen. Man erhält nach Ausführung der Integration:

$$V = \frac{Q}{2l} \log \left\{ \frac{\sqrt{y^2 + (x-l)^2} - (x-l)}{\sqrt{y^2 + (x+l)^2} - (x+l)} \right\}$$

Setzen wir nun $V = C$, wobei C eine Constante ist, so stellt uns die Gleichung

$$\frac{\sqrt{y^2 + (x-l)^2} - (x-l)}{\sqrt{y^2 + (x+l)^2} - (x+l)} = c,$$

in welcher Formel c eine andere Constante ist, eine in der XY-Ebene liegende Niveaulinie vor. Durch Rotation dieser Curve um die Axe der X erhält man die Niveaufläche; dass dieselbe eine Rotationsfläche sein muss, war im Vorhinein ersichtlich, weil die mit Elektricität belegte Strecke in allen durch sie hindurchgelegten Ebenen in derselben Weise wirken muss. Die oben angegebene Gleichung der Niveaulinie gehört einer Ellipse an, denn man erhält durch einen einfachen algebraischen Process:

$$\frac{x^2}{l^2\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2} + \frac{y^2}{l^2\left(\frac{2\sqrt{c}}{1-c}\right)^2} = 1.$$

Die Halbachsen der Ellipse sind:

$$a = l.\frac{1+c}{1-c} \text{ und } b = l\frac{2\sqrt{c}}{1-c}.$$

Die Niveauflächen sind deshalb Rotationsellipsoide; dieselben sind confocal, da die Excentricität

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \pm l$$

unabhängig von c ist; die gemeinsamen Brennpunkte sind die Endpunkte der in Betracht gezogenen mit der Elektricitätsmenge Q belegten Strecke. Da confocale Ellipsen von confocalen Hyperbeln, welche dieselben Brennpunkte, wie die Ellipsen haben, rechtwinklig geschnitten werden, so sind in unserem Falle die Kraftlinien die Durchschnittslinien confocaler Rotationshyperboloide mit zwei Schalen und denselben Brennpunkten, wie sie auch den Niveauflächen zugehören, mit Ebenen, welche durch die große Hauptaxe der confocalen Ellipsoide gelegt sind.

Überträgt man nun die ursprünglich auf der Strecke $2l$ befindliche Elektricitätsmenge Q auf eine der Niveauflächen, etwa auf jene, deren Gleichung durch:

$$V = C_1$$

gegeben ist, so ist der Potentialwert der Elektricität auf dem Ellipsoide dieselbe Constante, wenn die Elektricität nach dem Gesetze

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dn}\right),$$

wo $\left(\frac{dV}{dn}\right)$ sich auf die erwähnte Niveaufläche bezieht, vertheilt ist. Setzt man

$$\left(\frac{dV}{dn}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{dx}{dn} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{dy}{dn},$$

so findet man nach unschwerer Rechnung:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a b^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

oder man hat, da $\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = p$ ist, wobei p das Perpendikel

ist, das vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die Tangentialebene im Punkte x, y gefällt wurde, schließlich:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi ab^2} \cdot p,$$

eine Formel, welche auch unmittelbar aus der für das dreiaxige Ellipsoid abgeleiteten hervorgeht.

243. Nachdem wir im Vorstehenden einige der Methoden(¹) dargestellt haben, welche dazu dienen, die Elektricitätsvertheilung auf isolierten, jeder äußeren Influenzwirkung entzogenen Conductoren zu bestimmen, wenden wir uns zunächst zu einfacheren Fällen der elektrischen Influenz und der durch sie bewirkten Vertheilung auf der Oberfläche von Leitern.

Als erster Fall soll die Influencierung einer leitenden Kugel durch eine in einem äußeren Punkte befindliche Elektricitätsmenge betrachtet werden. Zur Lösung dieses Problemes wollen wir einen nützlichen Satz(²) verwenden, der die Beziehung zwischen dem inneren und äußeren Potentiale einer über die Oberfläche einer Kugel willkürlich vertheilten Elektricitätsmenge angibt.

Wir denken uns die Kugeloberfläche (Radius a) irgendwie mit Elektricität belegt; das Potential der auf dieser Oberfläche verbreiteten Elektricität in dem äußeren Punkte M (Fig. 107) wird ausgedrückt durch:

$$V_e = \int\int \frac{\rho d\sigma}{r},$$

(¹) Weitere Berechnungen der Elektricitätsvertheilung auf Conductoren findet man unter anderen in folgenden Schriften: Lipschitz, Vertheilung auf einem kreisförmig begrenzten Kugelsegment (Crelle's J. 58, 1861); C. Neumann, Vertheilung auf einem Ringe (Halle 1864); Kötteritzsch, Vertheilung auf Conductoren, speciell Systemen von Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe (Schlömilch's Zeitschrift 13 u. 14, 1868 u. 1869); Mehler, Elektricitätsvertheilung auf einem von Kugelcalotten begrenzten Körper (Crelle's J. 68, 1868); Weickert, aus dem Gebiete der Influenzelektricität (Dissertation, Leipzig 1879) etc. Verschiedene Probleme der Elektricitätsvertheilung werden auch gelöst in den wiederholt angeführten Werken von Maxwell, Thomson, Betti, Kötteritzsch, Beer und anderen; die hierher gehörige Literatur hat zumeist mathematisches Interesse.

(²) Grinwis, l. c. pg. 115.

wenn $r = \mathrm{MA}$ ist und die Dichte in dem Oberflächenelemente $d\sigma$ mit ρ bezeichnet wurde. Aus dem Dreiecke OAM erhalten wir, wenn $\mathrm{OM} = p$ gesetzt wird,

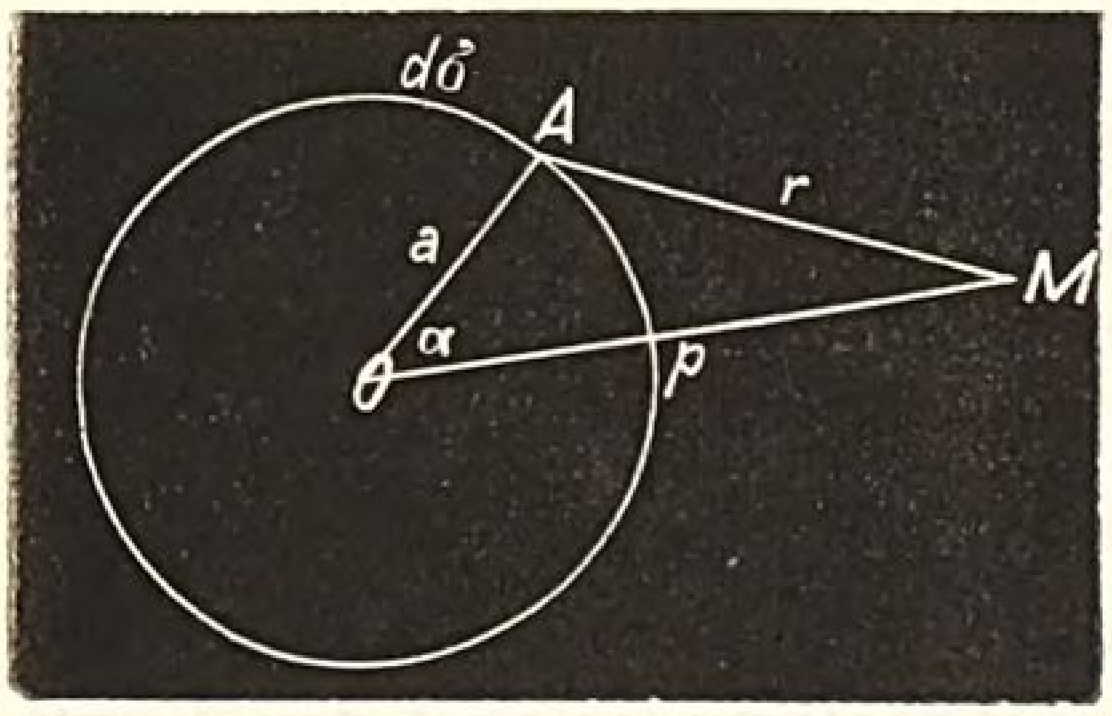


Fig. 107.

$$r^2 = a^2 + p^2 - 2ap \cos\alpha$$

oder

$$\frac{1}{r} = (a^2 + p^2 - 2ap\cos\alpha)^{-\frac{1}{2}}.$$

Liegt M außerhalb der Kugel, wie wir es angenommen haben, dann ist $a < p$ und wir können $\frac{1}{r}$ in eine Reihe von folgender Form entwickeln:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left\{Q_0 + Q_1\left(\frac{a}{p}\right) + Q_2\left(\frac{a}{p}\right)^2 + \cdots\right\},$$

wenn $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots$ Größen sind, welche weder a noch p enthalten, sondern nur Functionen von α sind; es führen diese Coefficienten bekanntlich den Namen „Kugelfunctionen“. Durch Substitution der letzten Reihe in den Ausdruck für V erhält man:

$$V_e = \int\!\!\int \frac{\rho d\sigma}{p}\left\{Q_0 + Q_1\left(\frac{a}{p}\right) + Q_2\left(\frac{a}{p}\right)^2 + \cdots\right\}$$

oder

$$V_e = \frac{1}{p}\left\{\int\!\!\int \rho Q_0 d\sigma + \frac{a}{p}\int\!\!\int \rho Q_1 d\sigma + \left(\frac{a}{p}\right)^2\int\!\!\int \rho Q_2 d\sigma + \ldots\right\}.$$

Die Doppelintegrale sind sämmtlich von a und p unabhängig; bezeichnet man dieselben der Reihe nach mit den Buchstaben $S_0, S_1, S_2 \ldots$ so ergibt sich:

$$V_e = \frac{1}{p}\left\{S_0 + \left(\frac{a}{p}\right)S_1 + \left(\frac{a}{p}\right)^2 S_2 + \ldots\right\}.$$

Würden wir das Potential V_i der mit Elektricität belegten Kugeloberfläche auf einen inneren Punkt rechnen, so würden wir für $\frac{1}{r}$ folgende Reihe anwenden:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\left\{Q_0+\left(\frac{p}{a}\right)Q_1+\left(\frac{p}{a}\right)^2Q_2+\ldots\right\},$$

woraus man erhält:

$$V_i=\frac{1}{a}\left\{S_0+\left(\frac{p}{a}\right)S_1+\left(\frac{p}{a}\right)^2S_2+\ldots\right\}.$$

Aus den beiden Formeln, die wir für V_e und V_i aufgestellt haben, folgt unter anderem, dass, wenn die Elektricität gleichförmig auf der Kugeloberfläche verbreitet ist, also

$$V_e=\frac{M}{p}$$

ist, wenn M die gesammte Elektricitätsmenge bedeutet, man hat:

$$S_0=M,\; S_1=S_2=\ldots=0.$$

Man hat daher weiter

$$Q_0=1,\; \int\int Q_1\,d\sigma=\int\int Q_2\,d\sigma=\ldots=0.$$

Weiter folgt aus den obigen Formeln, dass das Potential im Mittelpunkte der Kugel ausgedrückt wird durch:

$$V_o=\frac{S_0}{a}=\frac{M}{a},$$

denn p ist in diesem Falle Null. Diese Formel, die wir schon früher für eine gleichförmig belegte Kugeloberfläche nachgewiesen haben, gilt also auch bei beliebiger Vertheilung. Man findet daher jederzeit die Ladung einer Kugel, wenn man das Potential im Mittelpunkte mit dem Halbmesser der Kugel multipliciert.

Setzen wir nun

$$S_0+\left(\frac{p}{a}\right)S_1+\left(\frac{p}{a}\right)^2S_2+\ldots=F\left(\frac{p}{a}\right),$$

so ist:

$$S_0+\left(\frac{a}{p}\right)S_1+\left(\frac{a}{p}\right)^2S_2+\ldots=F\left(\frac{a}{p}\right)$$

und man hat:

$$V_i=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),$$

$$V_e = \frac{1}{p} F\left(\frac{a}{p}\right)$$

Die beiden letzten Formeln lassen das bekannte Resultat erkennen, dass das Potential beim Übergang von dem innerhalb der Kugel liegenden Raume in den Außenraum sich stetig ändert, denn für $p = a$ wird: $V_i = V_e$.

Bilden wir nun $\frac{\partial V_e}{\partial p}$ und $\frac{\partial V_i}{\partial p}$; es ist:

$$\frac{\partial V_e}{\partial p} = -\frac{1}{p^2} F\left(\frac{a}{p}\right) - \frac{a}{p^3} F'\left(\frac{a}{p}\right),$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial p} = \frac{1}{a^2} F'\left(\frac{p}{a}\right).$$

Bezeichnen wir die Werte dieser Differentialquotienten für die Kugeloberfläche mit $\left(\frac{\partial V_e}{\partial p}\right)_a$ und $\left(\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_a$, so gilt also:

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial p}\right)_a = -\frac{1}{a^2} F(1) - \frac{1}{a^2} F'(1),$$

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_a = \frac{1}{a^2} F'(1)$$

und deshalb:

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial p}\right)_a = -\frac{1}{a}(V_i)_a - \left(\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_a.$$

Nach einem früher entwickelten Theoreme ist:

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial p}\right)_a - \left(\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_a = -4\pi\rho,$$

da p auch die Normale zur Kugeloberfläche ist und daher hat man:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a}(V_i)_a + 2\left(\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_a\right].$$

Es ist nun ρ durch das innere Potential ausgedrückt. In ähnlicher Weise hätte man ρ als Function des äußeren Potentiales angeben können. Man hätte gefunden

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a}(V_e)_a + 2\left(\frac{\partial V_e}{\partial p}\right)_a\right].$$

244. Mittelst dieser Formeln sind wir in den Stand gesetzt, das äußere und innere Potential einer über eine Kugeloberfläche verbreiteten willkürlichen Ladung aus dem im allgemeinen nicht constanten Potentialwert an der Oberfläche der Kugel abzuleiten.

Das Potential der auf der Kugeloberfläche ausgebreiteten Elektricität in einem äußeren Punkte ist nämlich

$$V_e = \int\int \frac{\rho d\sigma}{r} = -\frac{1}{4\pi}\int\int\left[\frac{1}{a}(V_e)_a + 2\left(\frac{\partial V_e}{\partial n}\right)_a\right]\frac{d\sigma}{r},$$

wenn r der Abstand des in Betracht gezogenen Oberflächenelementes von dem Punkte ist, in welchem man das Potential zu rechnen hat, und n die Normale in $d\sigma$ ist.

Man hat nach einer Folgerung aus dem Green'schen Theoreme (§. 186)

$$\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = \int\int V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma - 4\pi V_e$$

für einen äußeren Punkt. Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

wobei φ den Winkel zwischen r und der auswärts gezeichneten Normale bedeutet; ferner hat man:

$$p^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\varphi$$

und

$$\cos\varphi = \frac{p^2 - a^2 - r^2}{2ar},$$

somit:

$$\int\int V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma = \int\int V\left(\frac{p^2 - a^2}{2ar^3} - \frac{1}{2ar}\right)d\sigma.$$

Man erhält weiter:

$$V_e = -\frac{1}{4\pi}\int\int\left(\frac{V}{ar} + V\frac{p^2 - a^2}{ar^3} - \frac{V}{ar}\right)d\sigma + 2V_e$$

und schließlich:

$$V_e = \frac{p^2 - a^2}{4\pi a}\int\int\frac{V}{r^3}d\sigma.$$

Das Potential in einem inneren Punkte wird in analoger Weise durch die nachstehende Formel ausgedrückt:

$$V_i = \frac{a^2 - p^2}{4\pi a} \int\int \frac{V}{r^3} d\sigma.$$

Kennt man also das Potential an der Oberfläche einer Kugel — die Elektricitätsmengen können auf dieser Fläche willkürlich vertheilt sein — so kann man nach den eben angegebenen Formeln sowohl das Potential in einem außerhalb als auch innerhalb der Kugel gelegenen Punkte berechnen. Beer([1]) hat diese beiden Formeln in Anwendung gebracht, um die elektrische Vertheilung auf einer sehr dünnen isolierten kugelförmigen Schale, die an einer Stelle eine sehr kleine kreisförmige Öffnung hat, kennen zu lernen. Er erhielt das mit dem Versuche in Einklang stehende Resultat, dass die Dichte der Elektricität auf der inneren Oberfläche des Conductors in größerer Entfernung von der Öffnung nur einen sehr kleinen Bruchtheil der elektrischen Dichte an der äußeren Oberfläche ausmacht.

245. Wir wenden uns nun zu dem Falle der Influencierung einer leitenden Kugel durch eine außerhalb derselben in einem Punkte concentrierte Elektricitätsmenge. Nehmen wir im Innern der Kugel einen beliebigen Punkt M (Fig. 108) an, so dass OM $= p$, MN d. i. die Entfernung des betrachteten Punktes von der influencierenden Elektricitätsmenge e gleich r wird; setzen wir ferner den Radius der Kugel a, die Strecke ON $= c$, so ist einleuchtend, dass das Potential V im Punkte M sich aus zwei Theilen zusammensetzt, dem Potentiale der influencierenden Elektricitätsmenge in diesem Punkte und dem von der auf der Kugeloberfläche durch Influenz gebildeten Elek-

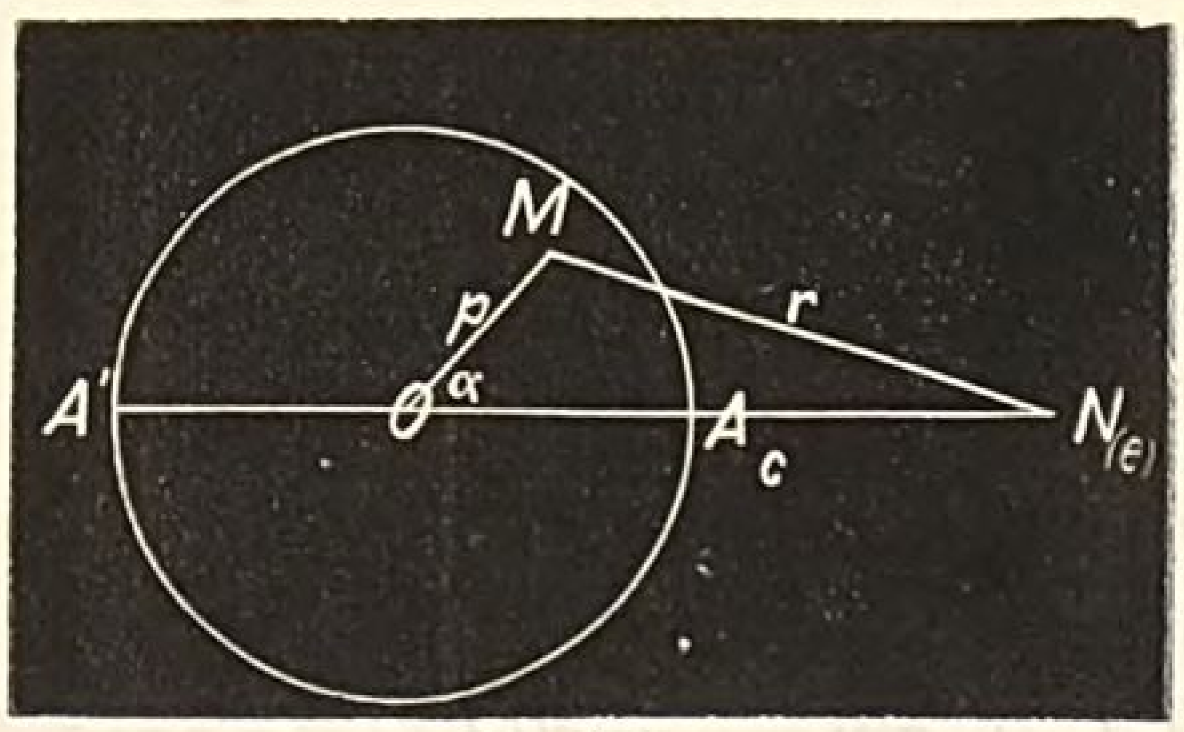


Fig. 108.

([1]) Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Herausgegeben von J. Plücker, Braunschweig, 1865, pg. 54; man sehe auch Grinwis, l. c. pg. 122 u. f.

tricitätsmenge herrührenden Potentiale, welches V_i bezeichnet werden möge. Es ist also

$$V = V_i + \frac{e}{r}.$$

Soll elektrisches Gleichgewicht sein, so muss $V = C$ sein, wo C eine Constante bedeutet; man hat daher

$$V_i = C - \frac{e}{r} = C - e(p^2 + c^2 - 2pc \operatorname{Cos} \alpha)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn man den Winkel $NOM = \alpha$ in die Rechnung führt. Wenden wir die früher gefundene Formel:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a}(V_i)_a + 2\left(\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_a\right]$$

auf diesen Fall an, so erhalten wir nach unschwerer Rechnung:

$$\rho = \frac{1}{4a\pi}\left[C - e\frac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 + a^2 - 2ac \operatorname{Cos} \alpha}^3}\right],$$

oder, wenn wir abkürzungshalber

$$a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{Cos} \alpha = u^2$$

setzen,

$$\rho = \frac{1}{4a\pi}\left(C - e\frac{c^2 - a^2}{u^3}\right).$$

Wir ersehen aus diesen Formeln, dass die Dichte der durch Influenz auf der Kugeloberfläche erregten Elektricität auch von dem Winkel α, resp. von u abhängig ist. Zeichnen wir daher einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf ON ist, so ist die elektrische Dichte in allen Punkten eines solchen Kreises dieselbe, sie ändert sich aber, wenn man von einem solchen Kreise zum Nachbarkreise übergeht.

246. Wir wenden uns nun zur Bestimmung der constanten Größe C. Ist die Kugel mit der Erde leitend verbunden, dann ist $C = 0$ und die Formel für die Dichte der Elektricität auf der Kugeloberfläche ist:

$$\rho = -\frac{e}{4a\pi}\frac{c^2 - a^2}{u^3},$$

in diesem Falle gibt es nur negative Elektricität auf der Kugel, die auf der Oberfläche derselben derart vertheilt ist,

dass in einem Oberflächenpunkte die Dichte der Elektricität umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung des betrachteten Punktes von jenem Punkte ist, in welchem die influencierende Elektricität sich befindet.

Die Gesammtmenge E der influencierten Elektricität erhalten wir nach der Formel:

$$E = \int\int \rho d\sigma,$$

wenn $d\sigma$ ein Oberflächenelement bedeutet. Man erhält nach Ausführung der Integration

$$E = -\frac{ea}{c},$$

welche Formel aussagt, dass die durch Influenz erzeugte Elektricität der inducierenden Elektricitätsmenge und dem Radius der Kugel direct, der Entfernung der inducierenden Elektricitätsmenge vom Kugelmittelpunkte verkehrt proportional ist.

Ist die Kugel isoliert, dann enthält sie nach der Influenz noch gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität.

Es ist in diesem Falle

$$\int\int \rho d\sigma = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man, nachdem die Integration ausgeführt wurde, wobei

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{C}{a} - \frac{e(c^2 - a^2)}{au^3}\right)$$

gesetzt ist:

$$C = \frac{e}{c}.$$

Es wird daher jetzt die Formel für die Dichte ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{ac} - \frac{e(c^2 - a^2)}{au^3}\right).$$

Fragen wir um die elektrische Dichte ρ' in A; für diesen Punkt ist $u = c - a$ und deshalb

$$\rho' = -\frac{e}{4\pi}\frac{3c - a}{c(c-a)^2};$$

für den Punkt A' ist $u = c + a$ und man hat als Dichte in diesem Punkte

$$\rho'' = \frac{e}{4\pi}\frac{3c + a}{c(c+a)^2}.$$

Die Elektricität in A' ist daher ungleichnamig mit der in A, aber gleichnamig mit der influencierenden Elektricität.

Die elektrische Dichte wird für alle Punkte desjenigen kleinen zur Linie ON senkrechten Kreises Null, der durch die Gleichung:

$$u^3 = c\,(c^2 - a^2)$$

bestimmt ist. Es stellt uns jener Kreis die neutrale Linie vor, welche die positive von der negativen Zone trennt; es ist diese Curve eine Gleichgewichtslinie, die Kraft sowohl als auch die Dichte sind auf dieser Curve Null. — Wie man sich leicht überzeugen kann, rückt die neutrale Linie immer näher gegen den Mittelpunkt der Kugel, je weiter man die influencierende Elektricitätsmenge vom Mittelpunkte entfernt.

247. Berechnung des auswärtigen Potentiales einer durch Influenz von Seite eines elektrischen Massenpunktes geladenen Kugelfläche.

Nehmen wir die Kugel isoliert an; es war dann:

$$V_i = C - \frac{e}{r}$$

$$= C - \frac{e}{\sqrt{c^2 + p^2 - 2pc \operatorname{Cos} \alpha}}.$$

Nach dem oben (243) erwähnten Satze ist, wenn

$$aV_i = F\left(\frac{p}{a}\right)$$

ist,

$$pV_e = F\left(\frac{a}{p}\right).$$

Wir können nun setzen:

$$aV_i = aC - \frac{ae}{\sqrt{c^2 + a^2\frac{p^2}{a^2} - 2ac\frac{p}{a}\cos\alpha}}$$

und hat dann:

$$pV_e = aC - \frac{ae}{\sqrt{c^2 + a^2\frac{a^2}{p^2} - 2ac\frac{a}{p}\cos\alpha}}$$

oder

$$V_e = \frac{aC}{p} - \frac{ae}{\sqrt{c^2p^2 + a^4 - 2a^2cp\cos\alpha}}.$$

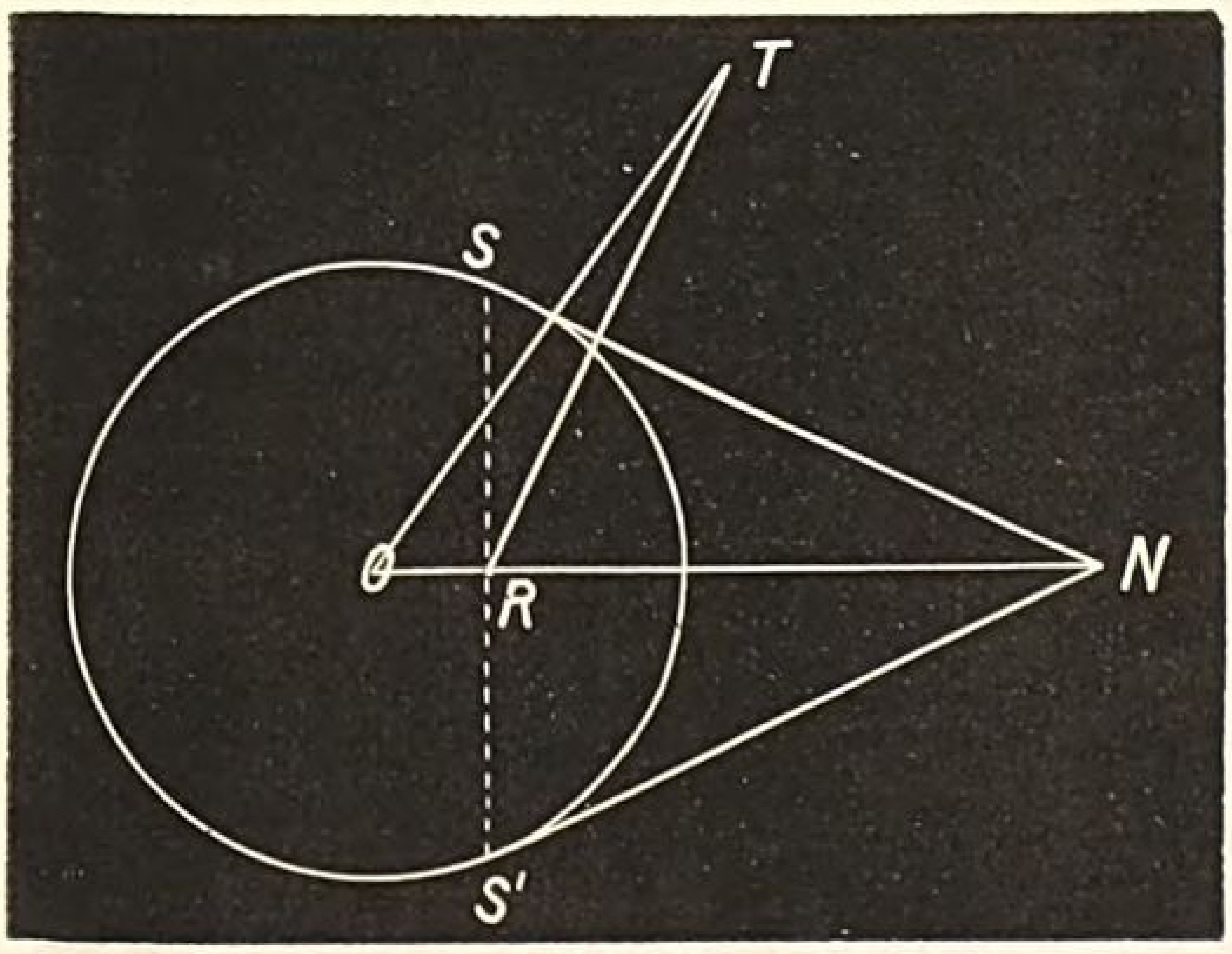


Fig. 109.

Setzt man für C den früher gefundenen Wert

$$C = \frac{e}{c}$$

und setzt abkürzungshalber:

$$\frac{a^2}{c} = b,$$

so ergibt sich:

$$V_e = \frac{1}{p}\frac{ea}{c} - \frac{1}{\sqrt{p^2 + b^2 - 2bp\cos\alpha}}\frac{ea}{c}.$$

Diese Formel drückt aus, dass das Potential der influencierten Kugel in einem äußeren Punkte T aus zwei Theilen besteht: der erste Theil enthält die Größe $\frac{ea}{c}$ im Zähler, p im Nenner; der zweite hat $-\frac{ea}{c}$ im Zähler und $\sqrt{p^2+b^2-2bp\cos\alpha}$ im Nenner.

Zeichnet man von N (Fig. 109) einen die Kugel tangierenden Kegel, so schneidet der Berührungskreis die Axe ON in R und es ist dann bekanntlich $OR = \frac{a^2}{c} = b$ und deshalb

der obige Wurzelausdruck dargestellt durch die Strecke RT. Es wirkt somit die Kugel nach außen so, als ob die positive (Influenzelektricität zweiter Art) $\frac{ea}{c}$ im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre, die negative Elektricität $-\frac{ea}{c}$ aber, oder die Influenzelektricität erster Art in einem Punkte R vereinigt wäre, welcher der influencierenden Elektricitätsmenge näher als das Centrum der Kugel liegt; dieser Punkt R, welcher in der früher angegebenen Weise leicht zu construieren ist, wurde von Thomson das elektrische Bild der Elektricitätsmenge e bezüglich der Kugeloberfläche genannt. Wir werden später ausführlich auf die „Methode der elektrischen Bilder“ zurückkommen.

248. Betrachten wir noch an dieser Stelle das äußere Potential eines elektrischen Systemes, das aus einem elektrischen Punkte N und der durch denselben auf einer abgeleiteten Kugel influencierten Elektricität besteht.

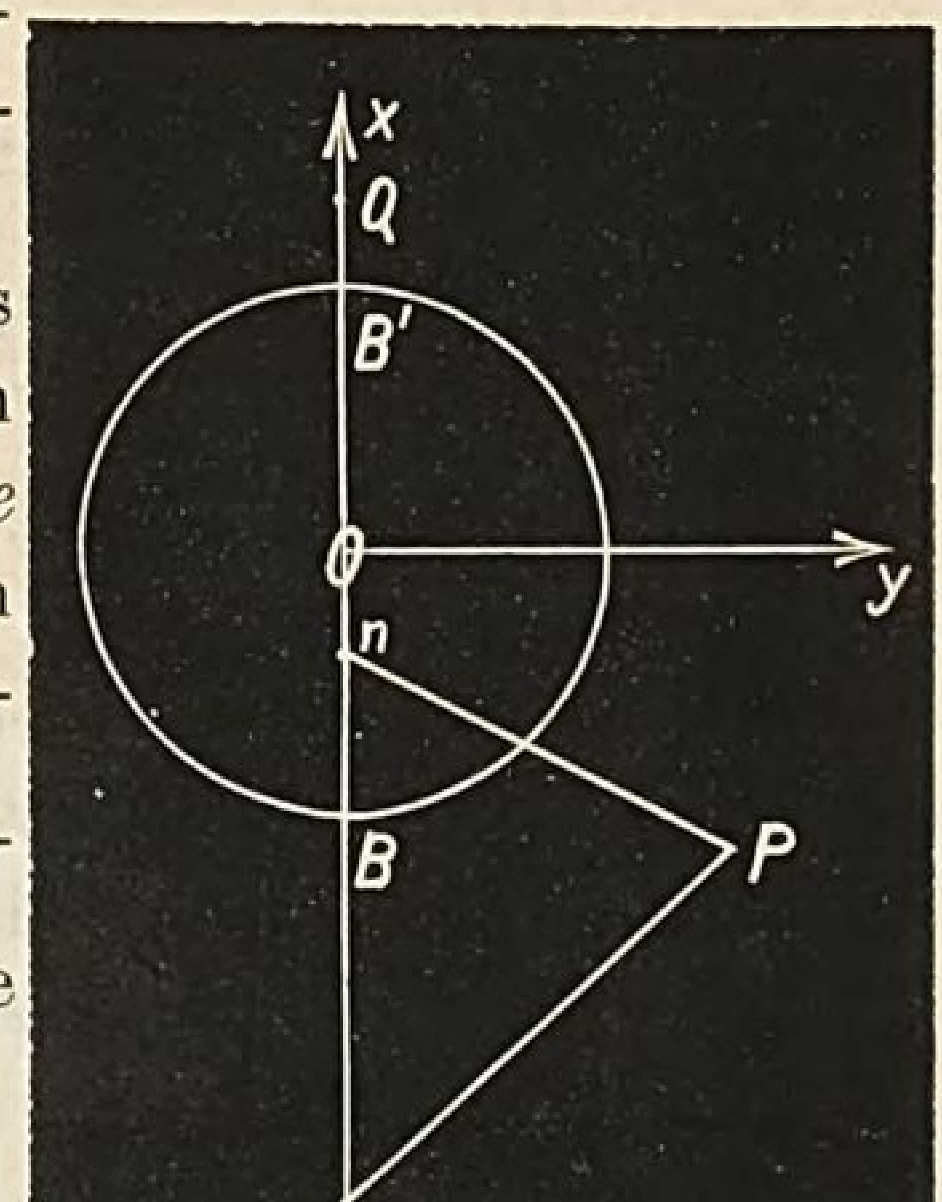


Fig. 110.

Nennen wir wie früher den Radius der Kugel a, die Entfernung der in N befindlichen Elektricitätsmenge e von O c, so hat man sich in dem elektrischen Bilde n von N die Elektricitätsmenge $-\frac{ea}{c}$ befindlich zu denken; das Potential in einem Punkte P ist sonach:

$$V=\frac{e}{NP}-\frac{ea}{c}\cdot\frac{1}{nP}=e\left(\frac{1}{r}-\frac{a}{r'c}\right),$$

wenn man $NP = r$, $nP = r'$ setzt. Zeichnet man das in der Figur angegebene Coordinatensystem, so ist, je nachdem P ober oder unter OY liegt,

$$r^2=(c\pm x)^2+y^2$$

und

$$r'^2=\left(\frac{a^2}{c}\pm x\right)^2+y^2.$$

Da man nun den Ausdruck für V in folgender Weise schreiben kann:

$$V = e\frac{r'c - ar}{rr'c}$$

und da:

$$r'^2c^2 - a^2r^2 = (a^2 + cx)^2 + c^2y^2 - a^2(c + x)^2 - a^2y^2 =$$
$$= (c^2 - a^2)(x^2 + y^2 - a^2)$$

ist, so erkennt man, dass (wegen $c > a$) außerhalb der Kugel das Potential stets positiv ist; auf der Kugeloberfläche ist $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ und — wie es sein muss — das Potential Null.

Das Potential in Q, einem Punkte der oberhalb der Kugel in der X-Axe liegt, ist dargestellt durch:

$$V = e\left\{\frac{1}{x+c} - \frac{a}{c\left(x + \frac{a^2}{c}\right)}\right\}.$$

Diese Größe erhält einen Maximalwert, wenn $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ ist und aus dieser Gleichung ergibt sich der zugehörige Wert von x zu:

$$x = a + (a + c)\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Die hier angestellte theoretische Betrachtung entspricht dem bekannten Experimente von Faraday (§. 110) bezüglich der Influenzwirkung einer Schellackstange auf eine darauf gestellte abgeleitete Metallkugel. Alle Ergebnisse der Faraday'schen Versuche erweisen sich als Consequenzen der vorstehenden Rechnung; die Annahme der Induction längs krummer Linien ist daher nicht nothwendig.

249. Im Folgenden werden wir noch die Influenz einer leitenden Hohlkugel durch eine punktförmige elektrische Masse e betrachten.

Seien die Halbmesser der äußeren und inneren Oberfläche der Kugelschale a und α, M (Fig. 111) ein in der Schale liegender Punkt, ferner $ON = c$, $MN = u$, $OM = r$, endlich $\sphericalangle NOM = \varphi$, so ist, wenn V_a und V_i die Potentiale der auf der inneren und äußeren Oberfläche influencierten Elektricität

im Punkte M bezeichnen, das elektrische Gleichgewicht in diesem Punkte ausgedrückt durch:

$$\frac{e}{u} + V_a + V_i = C,$$

wenn C eine Constante bedeutet.

Es ist nun:

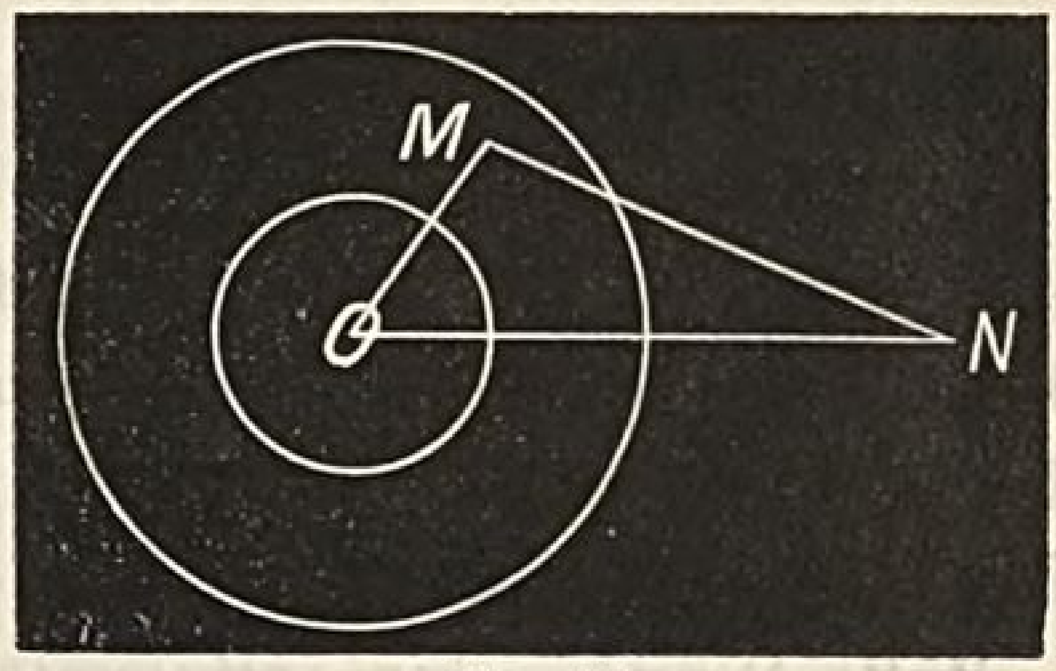


Fig. 111.

$$\frac{e}{u} = \frac{e}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2rc\cos\varphi}} = \frac{e}{c\sqrt{1 - \frac{2r}{c}\cos\varphi + \frac{r^2}{c^2}}}$$

oder, wenn wir diesen Ausdruck in eine Reihe entwickeln:

$$\frac{e}{u} = \frac{e}{c}\left\{Q_0 + Q_1\left(\frac{r}{c}\right) + Q_2\left(\frac{r}{c}\right)^2 + \ldots\right\}$$

Wie früher gezeigt wurde, lassen sich die Potentiale V_a und V_i durch Reihen von folgender Form ausdrücken:

$$V_i = \frac{1}{a}\left\{A_0 + A_1\left(\frac{r}{a}\right) + A_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$V_a = \frac{1}{r}\left\{A_0' + A_1'\left(\frac{\alpha}{r}\right) + A_2'\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

Die Summe dieser drei Reihen kann für jedes beliebige r nur dann dieselbe Constante C geben, wenn die Coefficienten der einzelnen Potenzen von r mit auf- und absteigenden Exponenten jeder für sich verschwindet. Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{e}{c}Q_0 + \frac{1}{a}A_0 = C,$$

$$\frac{e}{c^2}Q_1 + \frac{1}{a^2}A_1 = 0,$$

$$\frac{e}{c^3}Q_2 + \frac{1}{a^3}A_2 = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_0' = A_1' = A_2' = \ldots = 0.$$

Infolge der letzten Bedingungsgleichungen muss das Potential V_a überhaupt verschwinden; d. h. es ist auf der inneren Oberfläche der Kugelschale gar keine Elektricität vorhanden. Die Bedingung für das elektrische Gleichgewicht reduciert sich jetzt auf

$$V_i + \frac{e}{u} = C,$$

sie ist genau dieselbe, wie für eine Vollkugel und hieraus folgt, dass eine Kugelschale ebenso wie eine Vollkugel durch einen äußeren elektrischen Punkt *e* influenciert wird.

250. Würde der influencierende Punkt in dem von der Kugelschale eingeschlossenen Raume liegen, so wird man, wenn man die früheren Bezeichnungen beibehält, erhalten:

$$\frac{1}{a} A_0 = C$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0$$

$$eQ_0 + A'_0 = ecQ_1 + A'_1 \alpha = ec^2 Q_2 + A'_2 \alpha^2 = \ldots = 0$$

und es wird

$$V_i = C,$$

$$V_a = -\frac{e}{u}.$$

Die Gleichung $V_i = C$ lehrt, dass auf der äußeren Oberfläche der Kugelschale die positive Elektricität gleichförmig vertheilt sich befindet, denn nur dann kann ihr Potential in einem inneren Punkte constant sein. Die negative Elektricität ist auf der inneren Oberfläche derart vertheilt, dass ihre Dichte in jedem Punkte dieser Oberfläche umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung des betrachteten Punktes vom influencierenden elektrischen Massenpunkte ist (1).

(1) Eine elegante elementare Darstellung der Anziehung einer Kugelfläche, auf der die elektrische Dichte in einem Punkte derselben dem Cubus des Abstandes von einem gegebenen Punkte umgekehrt proportional ist, sehe man in: W. Thomson, Reprint of papers, pg. 60, art. 90; auch Thomson u. Tait, Handbuch der theoret. Physik, 2. Bd. pg. 18.

251. Von dem für die Kugeloberfläche gerechneten Influenzfalle ausgehend können wir leicht die durch einen außerhalb einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene gelegenen elektrischen Massenpunkt auf dieser Ebene hervorgerufene Influenzwirkung betrachten.

Die Ebene können wir als eine Kugelfläche mit unendlich großen Radius ansehen und wir brauchen die für die Kugel erhaltenen Formeln nur in der Weise umzuändern, dass man in ihnen $a = \infty$ setzen kann. War die Kugel abgeleitet, so befand sich auf ihr nur negative Elektricität (wenn der influencierende Punkt positive Elektricität hatte), deren Dichte durch:

$$\rho = -\frac{e}{4\pi}\frac{c^2 - a^2}{au^3}$$

dargestellt war; diese negative Elektricität wirkt nach außen so, als ob sie im elektrischen Bilde vereinigt wäre, dessen Abstand b vom Mittelpunkte der Kugel gegeben war durch

$$b = \frac{a^2}{c}.$$

Setzen wir die Entfernung des influencierenden elektrischen Punktes von der Kugeloberfläche m, jene des elektrischen Bildes von derselben Fläche n, beide Distanzen auf der Verbindungslinie ON (Fig. 109) gerechnet, so ist

$$c = a + m, \quad b = a - n$$

und deshalb:

$$\rho = -\frac{e}{4\pi}\frac{(a+m)^2 - a^2}{au^3}.$$

Setzt man in dieser Formel $a = \infty$, so erhält man die Dichte der Influenzelektricität erster Art auf einer zur Erde abgeleiteten unendlich großen leitenden ebenen Oberfläche

$$\rho = -\frac{em}{2\pi u^3}.$$

Die gesammte influencierte Elektricitätsmenge ist, wie man aus der für die Kugel erhaltenen Formel

$$E = -\frac{ea}{c}$$

ersieht, in unserem Falle:

$$E = -e,$$

also ebenso groß, wie die influencierende Elektricitätsmenge. Durch Substitution der Formeln $c = a + m$, $b = a - n$ in die Gleichung für die Position des elektrischen Bildes erhält man

$$m = n,$$

es befindet sich das elektrische Bild daher auf der von dem influencierenden Punkte auf die Ebene gefällten und verlängerten Senkrechten ebenso weit hinter der Ebene, wie der influencierende Punkt vor der Ebene([1]).

252. Der Fall, dass eine isolierte Kugel der Influenzwirkung einer Anzahl verschiedener elektrischer Punkte unterworfen ist, lässt sich immer auf den früheren zurückführen; man hat nur das Princip der Superposition elektrischer Kräfte in Anwendung zu bringen([2]). Thomson kam bei der Berechnung dieses Falles zu dem folgenden wichtigen Resultate: Die gegenseitige Wirkung zwischen einem sphärischen Conductor und einem gegebenen elektrisierten Körper besteht aus einer einzigen Kraft, die in einer Geraden wirkt, welche durch das Centrum der Kugel geht.

253. Unter den Problemen, welche die Influenz zweier oder mehrerer Leiter betreffen, ist jenes der Influenz zweier Kugeln das einzige, welches in vollständiger Weise und zwar auf verschiedene Art gelöst wurde. Poisson war der erste, welcher die Vertheilung der Elektricität auf zwei einander influencierenden Kugeln rechnete. Wir werden seine Behandlung des Problemes an späterer Stelle genau kennen lernen. Früher soll dieses Problem in einer physikalisch und analytisch einfacheren Weise behandelt werden. Die nachfolgende Methode wurde von Murphy([3]) und W. Thomson([4]) angegeben;

([1]) Thomson, l. c. pg. 73. (Electrical influence on a plane conducting surface of infinit extente.)

([2]) Thomson, l. c. pg. 77. (Insulated sphere subject to the influence of a body of any form electrified in any given manner).

([3]) Murphy, electricity, Cambridge. 1833, pg. 93.

([4]) Thomson, l. c. pg. 87.

wir wollen nach dieser Methode die Berechnung der gegenseitigen Influenzwirkung zweier leitenden Kugeln wenigstens in ihren Grundzügen angeben.

Wir denken uns ursprünglich nur die isolierte Kugel vom Radius a mit dem Mittelpunkte A mit einer Elektricitätsmenge e geladen. Die letztere wird sich gleichförmig auf ihr vertheilen und ihre Wirkung nach außen ist dieselbe, als ob sie im Mittelpunkte A vereinigt wäre. Wird die leitende, zur Erde abgeleitete Kugel (mit dem Radius b und dem Mittelpunkte B) in die Nähe gebracht, so dass $AB = c$ ist, so wird die zweite Kugel durch Influenz elektrisch und zwar nach dem Früheren derart, dass die Dichte der Elektricität in jedem Punkte dem Cubus der Distanz desselben von A umgekehrt proportional ist. Die influencierte Elektricitätsmenge ist

$$e_1 = -e\frac{b}{c};$$

sie wirkt auf die Kugel A zurück, als wäre sie in einem Punkte B_1 vereinigt, der durch die Gleichung:

$$BB_1 = \frac{b^2}{c}$$

bestimmt ist. Die Kugel A erhält nun eine neue Elektricitätsmenge

$$e_2 = -e_1 . \frac{a}{AB_1},$$

welche wieder auf B wirkt, als wäre sie in A_2 concentriert. Dieser Punkt ist durch die Gleichung

$$AA_2 = \frac{a^2}{A_2B}$$

bestimmt. Es erhält nun wieder die Kugel B eine Elektricitätsmenge:

$$e_3 = -e_2\frac{b}{A_2B},$$

welche wieder auf A zurückwirkt und in dieser Kugel die Elektricitätsmenge

$$e_4 = -e_3\frac{a}{AB_3}$$

influenciert u. s. w. Die Elektricitätsmengen, die mit geraden Indices bezeichnet sind, beziehen sich auf die Kugel A, die anderen auf die Kugel B.

Es ist

$$AB_1 = AB - BB_1 = c - \frac{b^2}{c} = c - \frac{b^2}{A_0B}$$

$$A_2B = AB - AA_2 = c - \frac{a^2}{AB_1}$$

$$AB_3 = AB - BB_3 = c - \frac{b^2}{A_2B}$$

und allgemein:

$$A_{2n}B = c - \frac{a^2}{AB_{2n-1}}$$

$$AB_{2n+1} = c - \frac{b^2}{A_{2n}B}.$$

Macht man folgende Substitutionen:

$$AB_{2n-1} = \frac{Z_{2n-1}}{N_{2n-1}}, \quad A_{2n}B = \frac{Z_{2n}}{N_{2n}}, \quad AB_{2n+1} = \frac{Z_{2n+1}}{N_{2n+1}},$$

so erhält man:

$$\frac{Z_{2n}}{N_{2n}} = \frac{cZ_{2n-1} - a^2 N_{2n-1}}{Z_{2n-1}} \text{ und } \frac{Z_{2n+1}}{N_{2n+1}} = \frac{cZ_{2n} - b^2 N_{2n}}{Z_{2n}}$$

und hieraus schließen wir:

$$N_{2n} = Z_{2n-1}, \quad N_{2n+1} = Z_{2n},$$

$$Z_{2n} = cZ_{2n-1} - a^2 N_{2n-1},$$

$$Z_{2n+1} = cZ_{2n} - b^2 N_{2n}$$

und man hat demzufolge:

$$Z_{2n} = cN_{2n} - a^2 Z_{2n-2},$$

$$N_{2n} = cZ_{2n-2} - b^2 N_{2n-2}.$$

Es ist nun unsere Aufgabe diese recurrenten Reihen aufzulösen. Multiplicieren wir die letzte Gleichung mit dem noch unbestimmt gelassenen Factor k und addieren sie zur ersten, so ist:

$$Z_{2n} + kN_{2n} = cN_{2n} + (kc - a^2) Z_{2n-2} - kb^2 N_{2n-2}$$

oder:

$$Z_{2n} + (k - c) N_{2n} = (kc - a^2) \left\{ Z_{2n-2} - \frac{kb^2}{kc - a^2} N_{2n-2} \right\}.$$

Wählt man nun k so, dass

$$k - c = -\frac{kb^2}{kc - a^2}$$

wird und setzt noch:

$$kc - a^2 = \lambda$$
$$Z_{2n} + (k - c) N_{2n} = \varphi(2n),$$

so erhält man nachstehende Reihe von Functionalgleichungen:

$$\varphi(2n) = \lambda \varphi(2n - 2)$$
$$\varphi(2n - 2) = \lambda \varphi(2n - 4)$$
$$\varphi(2n - 4) = \lambda \varphi(2n - 6)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi(2) = \lambda \varphi(0)$$

und hieraus:

$$\varphi(2n) = \lambda^n \varphi(0) = \lambda^n k,$$

da

$$\varphi(0) = Z_0 + (k - c) N_0 = k \quad \text{ist.}$$

Die oben aufgestellte Gleichung, durch welche k bestimmt ist, ist quadratisch und gibt das Wurzelsystem:

$$k = \frac{1}{2c} \left\{ c^2 + a^2 - b^2 \pm \sqrt{(c^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2} \right\}.$$

Es gelten daher auch für λ zwei reelle Werte, bestimmt durch:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ c^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{(c^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2} \right\}.$$

Diese beiden Werte von λ, die wir mit λ_1 und λ_2 bezeichnen wollen, haben eine geometrische Bedeutung; denn bezeichnet man die äußere und innere Tangente zu den beiden Kugeln T und t, so ist

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} (T + t)^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} (T - t)^2.$$

Wir bekommen nun mit Rücksicht auf die zwei Werte von k und λ die nachstehenden Gleichungen:

$$Z_{2n} + (\lambda_1 - c) N_{2n} = k_1 \lambda_1^n$$
$$Z_{2n} + (\lambda_2 - c) N_{2n} = k_2 \lambda_2^n$$

und hieraus folgt:

$$Z_{2n} = \frac{1}{k_1 - k_2} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$
$$N_{2n} = \frac{1}{k_1 - k_2} (\lambda_1^n k_1 - \lambda_2^n k_2),$$

wenn $k_1 k_2 = a^2$ berücksichtigt wurde.

Man kann demnach die Elektricitätsmengen e_{2n} und e_{2n+1} darstellen durch:

$$e_{2n} = e \frac{a^n b^n (k_1 - k_2)}{\lambda_1^n k_1 - \lambda_2^n k_2}$$
$$e_{2n+1} = - e \frac{a^n b^{n+1} (k_1 - k_2)}{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}.$$

Wenn q_a und q_b die gesammten Elektricitätsmengen, welche nach der Influenzwirkung auf A und B vorhanden sind, bedeuten, so ist:

$$q_a = \sum_o^\infty e_{2n}\,; \quad q_b = \sum_o^\infty e_{2n+1}.$$

Würde die Kugel B nicht, wie wir es jetzt vorausgesetzt haben, mit der Erde in leitender Verbindung stehen, sondern isoliert und mit der Elektricitätsmenge E geladen sein, so kommen auf die beiden Kugeln noch die influencierten Elektricitätsmengen

$$Q_a = \sum_o E_{2n+1}, \quad Q_b = \sum_o^\infty E_{2n}$$

E_{2n} und E_{2n+1} sind durch ähnliche Ausdrücke wie e_{2n} und e_{2n+1} bestimmt; es wechselt nur a mit b die Rolle. Die jetzigen Werte von k, die wir mit k' und k'' bezeichnen wollen, sind aus nachfolgender Gleichung bestimmt:

$$k^2 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{c} k + b^2 = 0.$$

Die Werte von λ_1 und λ_2 erfahren keine Änderungen. Man hat nach diesen Bemerkungen:

$$E_{2n} = E\frac{a^n b^n (k' - k'')}{\lambda_1^n k' - \lambda_2^n k''}, \quad E_{2n+1} = -E\frac{a^{n+1} b^n (k' - k'')}{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}.$$

Die Gesammtladungen der beiden isoliert angenommenen Kugeln sind daher:

$$M_a = q_a + Q_a$$
$$M_b = q_b + Q_b.$$

254. Als speciellen Fall wollen wir jenen betrachten, in welchem eine kleine Kugel eine große berührt. Es ist dieses Problem bei experimentellen Untersuchungen von großer Wichtigkeit.

Wir haben in diesem Falle

$$c = a + b, \; k_1 = k_2 = a, \; k' = k'' = b, \; \lambda_1 = \lambda_2 = ab.$$

Bestimmen wir die gesammte Elektricitätsmenge auf der kleinen Kugel B, so ist:

$$M_b = q_b + Q_b = \sum_0^\infty e_{2n+1} + \sum_0^\infty E_{2n}.$$

Man kann nun die für e_{2n+1} und E_{2n} aufgestellten Formeln nicht ohne Weiteres brauchen, weil sie die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ annehmen.

Man erhält nach Behandlung dieser Ausdrücke in bekannter Weise:

$$e_{2n+1} = -e\frac{b}{(n+1)c}, \quad E_{2n} = E\frac{a}{a+nc}$$

und somit:

$$M_b = -eb\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{3c} + \ldots\right) + E\left(1 + \frac{a}{a+c} + \frac{a}{a+2c} + \ldots\right).$$

Weil sich die Kugeln berühren, so müssen die ursprünglich auf den Kugeln vorhandenen Elektricitätsmengen auf innere und Oberflächenpunkte dasselbe Potential ausüben; nennen wir dasselbe ω, so ist:

$$\frac{e}{a} = \frac{E}{b} = \omega$$

oder

$$e = a\omega\,, \quad E = b\omega$$

und jetzt:

$$M_b = \frac{b^2}{c}\,\omega\left\{1 + \frac{a}{2(a+c)} + \frac{a}{3(a+2c)} + \ldots\right\}.$$

Ist B sehr klein gegen A, wie es z. B. bei einer Probekugel der Fall ist, so hat man approximativ $a = c$ und deshalb

$$M_b = \frac{b^2\omega}{c}\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\right\}$$

oder

$$M_b = \frac{b^2}{c}\frac{\pi^2}{6}\,\omega.$$

Wie diese Formel lehrt, ist die auf der Kugel B nach der Berührung befindliche Elektricitätsmenge ihrer Oberfläche proportional. Eine analoge Berechnung der auf der Oberfläche der großen Kugel befindlichen Elektricitätsmenge hätte uns zur Formel

$$M_a = c\omega$$

geführt. Bezeichnet man daher die mittleren Dichten auf den beiden Kugeln ρ_a und ρ_b, so ist

$$\frac{M_a}{M_b} = \frac{\rho_a c^2}{\rho_b b^2} = \frac{6c^2}{b^2\pi^2}$$

und deshalb

$$\rho_b : \rho_a = \pi^2 : 6 = 1{\cdot}6449.$$

Es verhalten sich deshalb die mittleren Dichten auf der großen und kleinen Kugel ungefähr wie 3 : 5, während Coulomb durch den Versuch 3 : 6 fand.

Wenn wir die Dichte der Elektricität auf beiden Kugeln kennen wollen, so ist hiezu eine Kenntnis der Potentialwerte nöthig.

Die ursprünglich auf A enthaltene Elektricität e wirkt nach außen so, als ob sie im Mittelpunkte A vereinigt wäre, die influencierten Elektricitätsmengen e_{2n} und E_{2n} hat man sich

in den Punkten A_{2n} und A_{2n+1} vereinigt zu denken, was ihre Wirkung nach außen anbelangt. Es ist daher das Potential dieser Kugel in einem äußeren Punkte M ausgedrückt durch die Formel:

$$V_a = \sum_o^\infty \frac{e_{2n}}{A_{2n}M} + \sum_o^\infty \frac{E_{2n}}{A_{2n+1}M}.$$

Bezeichnet man mit u die Entfernung des betreffenden Punktes M vom Mittelpunkte A, φ den Winkel, den die Linien u und AA_{2n} miteinander bilden, dann hat man, wenn man noch abkürzungshalber

$$\sqrt{u^2 - 2uAA_{2n}\operatorname{Cos}\varphi + AA_{2n}^2} = R_{2n}$$

$$\sqrt{u^2 - 2uAA_{2n+1}\operatorname{Cos}\varphi + AA_{2n+1}^2} = R_{2n+1}$$

setzt:

$$V_a = \sum_o^\infty \frac{e_{2n}}{R_{2n}} + \sum_o^\infty \frac{E_{2n}}{R_{2n+1}}.$$

Die Dichte der Elektricität auf der Kugel A ist durch die Formel:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a}(V_a)_0 + 2\left(\frac{\partial V_a}{\partial u}\right)_0\right]$$

bestimmt, wo $\frac{\partial V_a}{\partial u}$ eine Differentiation nach der Normale u bedeutet und die Werte von V_a und $\frac{\partial V_a}{\partial u}$ für die Oberfläche der Kugel, d. i. für $u = a$ zu nehmen sind; wir haben das letztere durch den beigegebenen Index 0 angedeutet. Durch einfache Rechnung erhält man:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left[\sum_o^\infty \frac{e_{2n}(a^2 - AA_{2n}^2)}{r_{2n}^3} + \sum_o^\infty \frac{E_{2n}(a^2 - AA_{2n+1}^2)}{r_{2n+1}^3}\right],$$

wenn man abkürzungshalber setzt:

$$r_{2n} = \sqrt{a^2 - 2aAA_{2n}\cos\varphi + AA_{2n}^2}$$

$$r_{2n+1} = \sqrt{a^2 - 2aAA_{2n+1}\cos\varphi + AA_{2n+1}^2}.$$

In analoger Weise ist das Potential der zweiten Kugel im Punkte M ausgedrückt durch

$$V_b = \sum_o^\infty \frac{e_{2n+1}}{R'_{2n+1}} + \sum_o^\infty \frac{E_{2n}}{R_{2n}},$$

wenn $MB = u_1$ und

$$\sqrt{u_1^2 - 2u_1 BB_{2n} \cos\varphi_1 + BB_{2n}^2} = R_{2n}'$$

$$\sqrt{u_1^2 - 2u_1 BB_{2n+1} \cos\varphi_1 + BB_{2n+1}^2} = R_{2n+1}'$$

gesetzt wird; $\sphericalangle\ \varphi_1$ wird gebildet von u_1 und BB_{2n}.

Die elektrische Dichte dieser Kugel ist dargestellt durch den nachstehenden Ausdruck:

$$\rho' = \frac{1}{4\pi}\left[\sum_o^\infty \frac{e_{2n+1}(b^2 - BB_{2n+1}^2)}{r'^3_{2n+1}} + \sum_o^\infty \frac{E_{2n}(b^2 - BB_{2n}^2)}{r'^3_{2n}}\right];$$

hiebei ist:

$$r'_{2n+1} = \sqrt{b^2 - 2b\, BB_{2n+1} \cos\varphi_1 + BB_{2n+1}^2}$$

$$r'_{2n} = \sqrt{b^2 - 2b\, BB_{2n} \cos\varphi_1 + BB_{2n}^2}.$$

Es gelten außerdem noch folgende leicht zu erweisende Gleichungen:

$$AA_{2n} = \frac{a^2(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1^n k_1 - \lambda_2^n k_2}$$

$$AA_{2n+1} = \frac{a^2(\lambda_1^n k' - \lambda_2^n k'')}{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}$$

$$BB_{2n} = \frac{b^2(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\lambda_1^n k' - \lambda_2^n k''}$$

$$BB_{2n+1} = \frac{b^2(\lambda_1^n k_1 - \lambda_2^n k_2)}{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}.$$

In ganz ähnlicher Weise hätte die Bestimmung der inneren Potentiale vorgenommen werden können; hat man die hiefür geltenden Formeln aufgestellt, so kann man die Elektricitätsmengen, welche auf den beiden Kugeln befindlich sind, rechnen; denn nach einem früheren Satze ist die auf einer Kugel vorhandene Elektricitätsmenge gleich dem Potential dieser Elek-

tricitätsmenge im Mittelpunkte der Kugel multipliciert mit dem Radius derselben (1).

255. Die oben für die elektrischen Dichten auf den beiden Kugeln aufgestellten allgemeinen Gleichungen stellen unendliche Reihen vor, die in jedem speciellen Falle meist nur näherungsweise berechnet werden können.

Berühren die beiden Kugeln A und B einander, so sind die Potentiale derselben in einem Punkte, der in der Centrallinie liegt:

$$V_a = \sum_{o}^{\infty} \frac{e_{2n}}{u - AA_{2n}} + \sum_{o}^{\infty} \frac{E_{2n+1}}{u - AA_{2n+1}}$$

$$V_b = \sum_{o}^{\infty} \frac{e_{2n+1}}{u - BB_{2n+1}} + \sum_{o}^{\infty} \frac{E_{2n}}{u - BB_{2n}}.$$

Für einander berührende Kugeln hat man folgende Gleichungen:

$$k_1 = k_2 = a$$
$$k' = k'' = b$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = ab$$
$$c = a + b$$

Es sind ferner die ursprünglich auf den Kugeln vorhandenen Elektricitätsmengen e und E durch die Beziehungen $e = a\omega$, $E = b\omega$, wo ω den gemeinschaftlichen Potentialwert auf den Kugeln bedeutet, gegeben.

Unter Berücksichtigung dieser Formeln erhält man:

$$V_a = ab\omega \sum_{o}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(u-a)\,nc + ub} - \frac{1}{(u-a)\,nc + uc - a^2} \right\}.$$

Die Summation dieser unendlichen Reihen lässt sich in diesem Falle auf eine Integration (2) zurückführen und man erhält dann:

$$V_a = ab\omega \int_0^1 \frac{z^{bu-1} - z^{cu-a^2-1}}{1 - z^{(u-a)c}} dz$$

(1) Die diesbezügliche Rechnung findet man in Grinwis, l. c. pg. 192.

(2) Über den hierbei einzuschlagenden Weg sehe man Grinwis l. c. pg. 188 u. f.

und daraus bestimmt man den Wert des Potentiales im Berührungspunkte

$$V_a = \frac{a\omega}{c}.$$

In ähnlicher Weise gilt für das Potential der zweiten Kugel in demselben Punkte

$$V_b = \frac{b\omega}{c}.$$

Die elektrische Dichte im Berührungspunkte erhält man unter Zuhilfenahme der früher abgeleiteten Gleichung:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a}\left(V_a\right)_o + 2\left(\frac{\partial V_a}{\partial u}\right)_o\right]$$

der Null gleich; es ist dieses Resultat vorauszusehen, denn der Berührungspunkt der beiden Kugeln ist als innerer Punkt der Gesammtmasse der beiden Kugeln zu betrachten.

Handelt es sich um die Bestimmung der elektrischen Dichte in den anderen Punkten der Oberflächen der beiden Kugeln, so muss man die früher allgemein angegebenen Formeln für ρ und ρ' benützen; die Rechnung kann dann nur näherungsweise geführt werden; doch besitzen die unendlichen Reihen, welche hierbei in Anwendung kommen, die Eigenschaft starker Convergenz.

256. Berechnung der Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden isolierten Kugeln nach Poisson.

Poisson[1] hat sich, wie schon oben angedeutet wurde, zuerst mit dieser Frage beschäftigt und den Fall zweier leitenden Kugeln behandelt.

Wir können nicht alle Rechnungen von Poisson entwickeln, sondern werden uns darauf beschränken, den allgemeinen Gang der Rechnung anzuzeigen, um hauptsächlich die Bedeutung der Tabellen, welche wir aus seinem „Memoire“ bringen werden, verständlich zu machen.

Seien A und B (Fig. 112) zwei leitende Kugeln, deren Mittelpunkte O und O_1 in einer Entfernung c sich befinden

[1] Mémoires de l'Institut 1811, I. partie, pg. 1.

und deren Radien a und b sind; diese Kugeln seien bezüglich mit den Elektricitätsmengen E_a und E_b geladen. Die Elektricität befindet sich auf der Oberfläche dieser Kugeln und vertheilt sich in der Weise, dass das Potential im Innern jeder der Kugeln constant ist; es sei $4\pi h$ der Wert des Potentiales in der Kugel A und $4\pi g$ der Wert desselben in der Kugel B.

Da das System bezüglich der Centrallinie symmetrisch ist, so wird die Vertheilung der Elektricität ebenfalls symmetrisch bezüglich derselben Geraden sich gestalten. Man zeigt überdies, dass das Potential eines Rotationskörpers in allen seinen Punkten bekannt ist, wenn es auf der Axe bestimmt ist; es wird daher genügen zu schreiben, dass das Potential in jeder der Kugeln auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser constant ist.

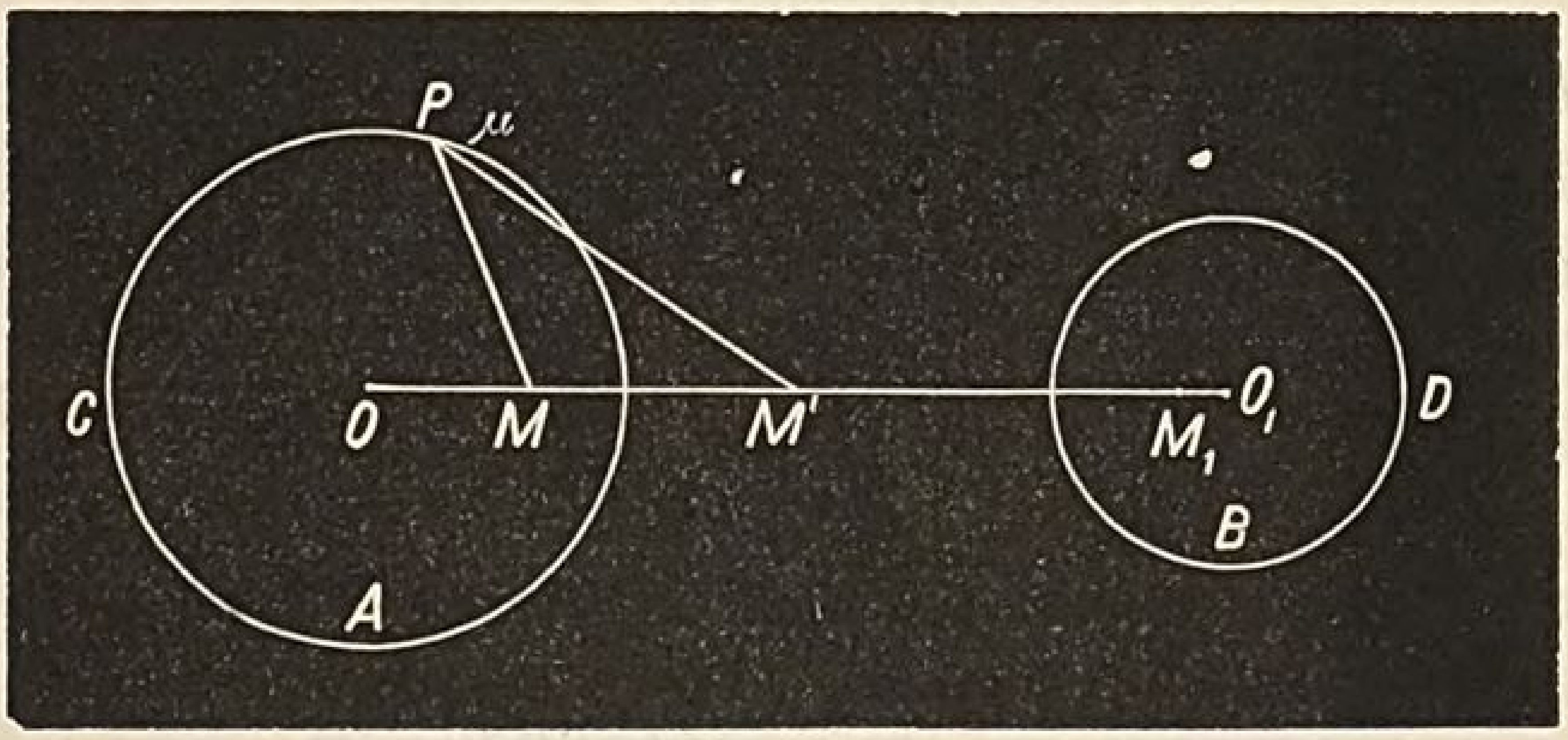


Fig. 112.

Sei x die Entfernung eines Punktes der Axe vom Centrum O der ersten Kugel, bezeichnen wir ferner mit $4\pi\varphi(x)$ das Potential der Elektricitätsschichte E_a, welche auf dieser Kugel ausgebreitet ist, in einem inneren Punkte und mit $4\pi\varphi_1(x)$ das Potential derselben Schichte in einem äußeren Punkte; setzen wir in derselben Weise $4\pi F(c-x)$ das innere Potential und $4\pi F_1(c-x)$ das äußere Potential der Elektricitätsschichte E_b, welche auf der zweiten Kugel ausgebreitet ist.

Betrachtet man nun einen Punkt M, der im Innern der ersten Kugel A gelegen ist, so wird man daher haben:

$$(1) \qquad \varphi(x) + F_1(c-x) = h$$

und für einen inneren Punkt M_1 der Kugel B wird man in derselben Weise, wenn man mit x_1 seine Entfernung vom Punkte O bezeichnet, haben:

$$(2) \qquad \varphi_1(x_1) + F(c - x_1) = g;$$

die vier in diesen Gleichungen vorkommenden Functionen können auf zwei reduciert werden.

Wir betrachten zu diesem Behufe den Punkt M', welcher bezüglich der Kugel A zum Punkte M conjugiert ist, d. h. für welchen man hat:

$$OM.OM' = a^2 \text{ oder}$$
$$x.x' = a^2.$$

Verbindet man irgendeinen Punkt dieser Kugel P mit den Punkten M und M', so wird man haben:

$$\frac{PM'}{PM} = \frac{x'}{a} = \frac{a}{x}$$

Bezeichnet man mit μ die elektrische Dichte im Punkte P und mit $d\sigma$ ein Element der Oberfläche, so ist das Potential im Punkte M, welches von der Elektricitätsschichte E_a herrührt:

$$4\pi\varphi(x) = \int \frac{\mu . d\sigma}{PM}.$$

Das Potential dieser Schichte in M' wird ebenso

$$4\pi\varphi_1(x') = \int \frac{\mu . d\sigma}{PM'}$$

sein. Man hat somit:

$$\int \frac{\mu . d\sigma}{PM'} = \int \frac{PM}{PM'} . \frac{\mu . d\sigma}{PM} = \frac{a}{x'} \int \frac{\mu . d\sigma}{PM} = \frac{x}{a} \int \frac{\mu . d\sigma}{PM}.$$

Man erhält daraus die Relationen:

$$(3) \qquad \varphi_1(x') = \frac{a}{x'} \varphi\left(\frac{a^2}{x'}\right),$$

$$(4) \qquad \varphi(x) = \frac{a}{x} \varphi_1\left(\frac{a^2}{x}\right).$$

Wir werden die erste Gleichung (3) benützen, um die Function φ_1 zu eliminieren, und eine zu (4) analoge Gleichung, angewendet auf die Kugel B, wird die Elimination von F gestatten; man wird dann haben:

$$F(c-x_1)=\frac{b}{c-x_1}F_1\left(\frac{b^2}{c-x_1}\right).$$

Die Gleichung (2) geht alsdann über in:

$$(2)' \qquad \frac{a}{x_1}\varphi\left(\frac{a^2}{x_1}\right)+\frac{b}{c-x_1}F_1\left(\frac{b^2}{c-x_1}\right)=g.$$

Man kann endlich die Function F_1 entfernen, wenn man diese letztere Gleichung auf den Punkt M_1 anwendet, der zum Punkt M bezüglich der Kugel B conjugiert ist; man wird dann haben:

$$(c-x)(c-x_1)=b^2$$

oder
$$x_1=c-\frac{b^2}{c-x}=\frac{c(c-x)-b^2}{c-x}.$$

Ersetzt man x_1 durch diesen Wert in der Gleichung (2′), so resultiert:

$$\frac{a}{c-\frac{b^2}{c-x}}\varphi\left(\frac{a^2}{c-\frac{b^2}{c-x}}\right)+\frac{c-x}{b}F_1(c-x)=g.$$

Trägt man endlich diesen Wert von $F_1(c-x)$ in die Gleichung (1) ein, so bekommt man:

$$(5) \qquad \varphi(x)-\frac{ab}{c(c-x)-b^2}\varphi\left(\frac{a^2}{c-\frac{b^2}{c-x}}\right)=h-g\frac{b}{c-x}.$$

Dies ist schließlich die Gleichung, welche man auflösen muss, um das Potential der Schichte E_a auf einen beliebigen inneren Punkt zu finden; die Bestimmung aller anderen Größen wird sich in der Folge aus jener ergeben.

257. Fall zweier in Contact befindlichen Kugeln. Poisson erforscht zuerst den Fall, wo die beiden Kugeln sich berühren. Wenn man der Einfachheit halber den Radius der großen Kugel A als Einheit annimmt, wird man haben:

$$a=1,$$
$$c=1+b.$$

Die Gleichung (5) wird dann werden:

$$(6)\qquad \varphi(x)-\frac{b}{b+(1+b)(1-x)}\varphi\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right)=$$

$$=h-\frac{gb}{1+b-x}.$$

Um diese Gleichung zu lösen, sucht Poisson einzeln die Lösungen, welche für die Fälle gelten, wo die zweite Seite der Gleichung succesiv gleich Null, h und $-\frac{gb}{1+b-x}$ ist, und er erhält durch Addition dieser drei Lösungen jene, welche der vollständigen Gleichung genügt.

Abstrahiert man von der zweiten Seite der Gleichung, so genügt man der Gleichung (6), indem man setzt:

$$\varphi(x)=\frac{\mathrm{P}}{1-x},$$

wo P eine Constante oder allgemeiner eine Function von x ist, welche sich gleich bleibt, wenn man in ihr statt x... $\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}$ setzt.

Poisson zeigt nicht den Weg an, welchen er einschlug, um die anderen Fälle zu erledigen; er sagt nur, dass er der Gleichung (6), in welcher man das erste Glied h des zweiten Theiles beibehält, durch ein bestimmtes Integral von der Form

$$\varphi(x)=\frac{h'}{1-x}\int_0^1\frac{t^{\frac{m}{1-x}+n}-1}{1-t}dt$$

zu genügen versuchte; h', m und n sind zu bestimmende Constante. Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichung, so findet man:

$$\varphi(x)=\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1\frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}dt.$$

Ebenso erhält man, wenn man allein das zweite Glied $\frac{-gb}{1+b-x}$ des zweiten Theiles der Gleichung (6) berücksichtigt, durch ein Integral von derselben Form die Lösung:

$$\varphi(x) = -\frac{bg}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}\,dt,$$

so dass das allgemeine Integral der Gleichung (6) ist:

$$\varphi(x) = \frac{P}{1-x} + \frac{b}{(1+b)(1-x)}\left(h\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}\,dt - \right.$$

$$\left. -g\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}\,dt\right).$$

Das erste Glied $\frac{P}{1-x}$ ist für das elektrische Problem nicht brauchbar, weil es für $x=1$ unendlich wird und das Potential der Elektricitätsschichte E_a auf der Oberfläche der Kugel nicht unendlich sein kann. Wenn andererseits die beiden Kugeln einander berühren, so ist das Potential dasselbe auf jeder von ihnen und daher $g=h$. Der innerhalb der Klammern befindliche Ausdruck kann dann vereinfacht werden und es wird schließlich:

$$\varphi(x) = \frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}}-1\right)t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}\,dt.$$

258. Um die Elektricitätsmenge zu erhalten, welche auf der ersten Kugel ausgebreitet ist, genügt es $x=o$ zu setzen, woraus man, wenn man mit A die mittlere Dichte auf dieser Oberfläche bezeichnet, erhält:

$$4\pi\varphi(0) = \frac{E_a}{1} = 4\pi A\,;$$

man hat daher:

$$A = \varphi(0) = \frac{bh}{1+b} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} dt.$$

In derselben Weise hat man für die andere Kugel

$$B = \frac{h}{b(1+b)} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} dt.$$

Die Ladungen der beiden Kugeln sind daher:

$$E_a = 4\pi A = 4\pi h \frac{b}{1+b} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} dt,$$

$$E_b = 4\pi b^2 B = 4\pi h \frac{b}{1+b} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} dt.$$

Die gesammte auf dem Systeme der beiden Kugeln befindliche Elektricitätsmenge ist:

$$E_{ab} = E_a + E_b = 4\pi h \frac{b}{1+b} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} + t^{-\frac{b}{1+b}} - 2}{1-t} dt,$$

so dass die elektrische Capacität C des so gebildeten Conductors durch die Formel:

$$C = \frac{b}{1+b} \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} + t^{-\frac{b}{1+b}} - 2}{1-t} dt$$

gegeben ist.

259. Das Verhältnis der mittleren Dichten auf der kleinen und auf der großen Kugel ist:

$$\beta = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{1}{b^2} \frac{\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} dt}{\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} dt}$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der bestimmten Integrale von dieser Form hat man:

$$\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}} - 1}{1-t} dt - \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} dt = \pi.\cot \frac{\pi}{1+b},$$

woraus man erhält:

$$\mathrm{E}_b - \mathrm{E}_a = 4\pi h \frac{b}{1+b} \pi\cot \frac{\pi}{1+b} = \mathrm{V} \frac{b}{1+b} \pi\cot \frac{\pi}{1+b},$$

$$\beta = \frac{1}{b^2} + \frac{\pi\cot \frac{\pi}{1+b}}{b^2 \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t} dt}.$$

Poisson hat die Werte des Bruches β für eine gewisse Anzahl Fälle gerechnet, welche den Experimenten Coulomb's (74) entsprechen; die Resultate der Theorie sind vollständig im Einklange mit jenen der Beobachtung.

Sowohl das Experiment als auch die Rechnung lehren, dass die mittlere elektrische Dichte immer am größten auf der kleineren der beiden Kugeln ist, obwohl die Gesammtladung dieser Kugel immer die kleinere ist; dass ferner das Verhältnis β sich in demselben Maße vergrößert, als der Radius b sich verkleinert. Wenn man den Ausdruck β nach den Potenzen von $\frac{b}{1+b}$ entwickelt, erkennt man, dass dieser Ausdruck zur Grenze das Integral

$$\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{t}}{1-t} dt,$$

welches gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist, hat. Die Grenze von β ist somit

$$\beta = \frac{\pi^2}{6} = 1{\cdot}644936.$$

Ist der Halbmesser b sehr klein, so kann man das Verhältnis β durch eine sehr convergente Reihe ausdrücken, deren erste Glieder sind:

$$\beta = \frac{1}{(1+b)^2}\left[\frac{\pi^2}{6} + 1{\cdot}20206 \frac{b}{1+b} + \frac{\pi^4}{36}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2\right];$$

setzt man z. B. voraus, dass $b = \frac{1}{99}$ wäre, so findet man $\beta = 1{\cdot}6342$, welche Größe noch ein wenig unter der Grenze $\frac{\pi^2}{6}$ liegt.

260. Berechnung der Dichte in jedem Punkte. Die Rechnungen, welche vorhergehen, geben das Potential der beiden Elektricitätsschichten in irgendeinem Punkte des gemeinschaftlichen Durchmessers an und gestatten nicht weiter, die Dichte in jedem Punkte zu bestimmen. Zu diesem Behufe betrachten wir eine Kugel vom Radius r (Fig. 113), die bezüglich der Axe OX in symmetrischer Weise elektrisiert wurde. Sei y die Ordinate eines Punktes P der Oberfläche und ds ein Element des durch P gehenden Meridianes. Die Elektricitätsmenge, welche sich auf der Zone befindet, die durch Rotation des Elementes ds um die Axe OX gebildet wird, ist

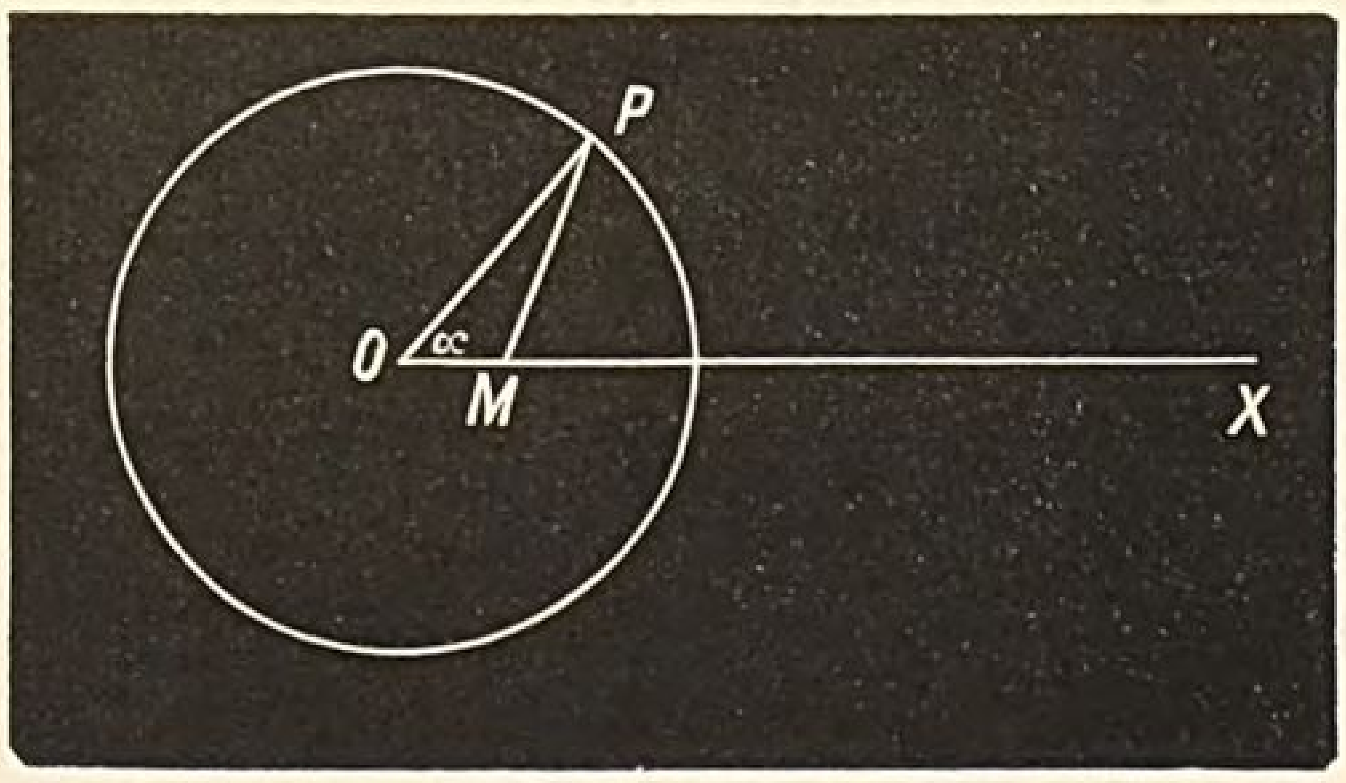


Fig. 113.

$$2\pi\mu y ds$$

und das Potential im Punkte M, herrührend von der ganzen Elektricitätsschichte, ist:

$$V_M = \int \frac{2\pi\mu y ds}{PM}.$$

Sei α die Distanz OM und θ der Cosinus des Winkels POM, so hat man:

$$PM = \sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha\theta}.$$

Da außerdem μ, y und s Functionen des Winkels POM oder seines Cosinus θ sind, so kann man schreiben:

$$V_M = \int_{-1}^{+1} \frac{f(\theta)d\theta}{(r^2 + \alpha^2 - 2\alpha r\theta)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{r} \int_{-1}^{+1} \left[1 - 2\frac{\alpha}{r}\theta + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} f(\theta)d\theta.$$

Die Entwickelung des Klammerausdruckes nach Potenzen von $\frac{\alpha}{r}$ liefert eine Reihe, deren Coefficienten bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. Man hat nämlich allgemein für zwei Variable x *und* z

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + X_3 z^3 + \ldots$$

Die Coefficienten X_1, X_2, ... sind bekannte Functionen von x, welche folgenden Bedingungen genügen. Das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'} dx$$

ist immer gleich Null, wenn die Indices n und n' verschieden sind. Wenn diese Indices im Gegentheile gleich sind, so hat man:

$$\int_{-1}^{+1} X^2_n dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Man kann daher, wenn man diese Art der Entwickelung auf den unter dem Integralzeichen in dem Werte von V_M stehenden Ausdruck anwendet, schreiben:

$$\left[1-2\frac{\alpha}{r}\theta+\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1+P_1\frac{\alpha}{r}+P_2\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2+\dots$$

in welcher Formel die Coefficienten P_1, P_2 nichts anderes sind, als die Functionen X_1, X_2 ..., in welchen man x durch θ ersetzt.

Andererseits kann eine beliebige Function $f(x)$ mittelst der Functionen X unter der Form:

$$f(x)=A_0+A_1X_1+A_2X_2+\dots$$

entwickelt werden, wobei die Coefficienten A_o, A_1 ... constant sind. Man kann dann schreiben:

$$f(\theta)=A_0+A_1P_1+A_2P_2+\dots$$

und das Potential im Punkte M wird:

$$V_M=\frac{1}{r}\int_{-1}^{+1}\left[1+P_1\frac{\alpha}{r}+P_2\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2+\dots\right](A_0+A_1P_1+A_2P_2+\dots)d\theta.$$

Wegen der früher bezeichneten Eigenschaften der Functionen X_n oder P_n bleibt einfach übrig:

$$V_M=\frac{1}{r}\left[2+\frac{2}{3}A_1\frac{\alpha}{r}+\frac{2}{5}A_2\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2+\dots+\frac{2}{2n+1}A_n\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n+\dots\right],$$

d. h. $$4\pi\varphi(\alpha)=\frac{1}{r}\left[2+\frac{2}{3}A_1\frac{\alpha}{r}+\dots+\frac{2}{2n+1}A_n\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n+\dots\right].$$

Da die Function $\varphi(\alpha)$ bekannt ist, kann man die Coefficienten A_1 A_2 ... rechnen, wodurch die Function $f(\theta)$ bestimmt wird.

Man hat früher gesetzt:

$$2\pi\mu y ds=f(\theta)d\theta$$

und nun kann man y und ds als Function von θ ausdrücken, und es wird diese Gleichung den Wert von μ liefern.

261. Dies ist das Princip der von Poisson angewandten Methode, um die Dichte in irgendeinem Punkte zu rechnen.

Wenn der Punkt, um den es sich handelt, auf der Symmetrieaxe gelegen ist, so ist diese Rechnung unnütz; denn man kennt das Potential auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser. Es genügt die Derivierte des Potentiales auf der Oberfläche im Verhältnisse zur nach außen gerichteten Normale zu nehmen und die allgemeine Relation

$$-\frac{dV}{dn} = 4\pi\mu$$

in Anwendung zu bringen. Man verificiert auf diese Weise durch die Formeln das schon früher angegebene Resultat, dass die elektrische Dichte im Berührungspunkte der beiden Kugeln Null ist, eine Eigenschaft, welche von Coulomb constatiert wurde, und welche überdies für den Contact von irgend zwei Oberflächen gilt (57).

Man kann in derselben Weise die Dichten rechnen, welche in zwei Punkten herrschen, die dem Berührungspunkte diametral entgegengesetzt sind. Für den Punkt C der großen Kugel hat das Potential einen Wert, der durch die Formel:

$$4\pi[\varphi_1(x) + F_1(c - x)]$$

ausgedrückt ist; man nimmt die Derivierte dieser Function nach x und man wird, wenn man dann $x = -1$ setzt und Y die Dichte in diesem Punkte setzt, haben:

$$\frac{d}{dx}[\varphi_1(x) + F_1(c - x)]_{x=-1} = Y.$$

Die Dichte Z im diametral entgegengesetzten Punkte D auf der kleinen Kugel wird man in derselben Weise erhalten.

Sind die beiden Kugeln einander gleich, so ist die mittlere Dichte auf jeder derselben:

$$A = B = \frac{h}{2}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}} - 1}{1 - t}\,dt = h \log 2 = \frac{V}{4\pi}\log 2.$$

Die Gesammtladung des ganzen Systemes der beiden Kugeln ist

$$E_{ab} = 2 \times 4\pi A = V.2 \log 2$$

so dass die elektrische Capacität der beiden Kugeln, die im Contacte sind, gleich ist $2log2$.

Das Verhältnis der Maximaldichte zur mittleren Dichte ist

$$\frac{Y}{A} = 1{\cdot}322.$$

Wenn die beiden Kugeln nicht gleich sind, so ist das Verhältnis der Maximaldichte auf der kleinen Kugel zur mittleren Dichte auf der großen gegeben durch:

$$\gamma = \frac{Z}{A} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(t^{-\frac{b}{1+b}} - 1\right) t^{-\frac{1}{2(1+b)}}}{1-t} \log\frac{1}{t}\,dt}{4b^2(1+b)\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}} - 1}{1-t}\,dt}.$$

Poisson hat den Wert dieses Bruches für gewisse einfache Werte von b gerechnet, um seine Resultate mit jenen zu vergleichen, welche Coulomb auf experimentellem Wege gefunden hat; wir haben die Tafel, welche diese Vergleichung enthält, oben gegeben. (76.)

Je mehr der Radius b abnimmt, desto mehr convergiert das Verhältnis γ gegen eine Grenze, welche von b unabhängig ist und die durch die Formel:

$$\lim(\gamma) = 4{\cdot}20721$$

ausgedrückt wird. Wir haben auch (77) die Resultate der Rechnung mitgetheilt, welche von Poisson unternommen wurde, um die Dichten in verschiedenen Punkten der beiden in Berührung befindlichen Kugeln zu bestimmen, und zwar in den Fällen, welche den Coulomb'schen Versuchen entsprechen.

262. Untersuchungen von Plana. Elektrische Capacität zweier sich berührenden Kugeln. Plana[1] hat diese Rechnungen von Poisson wieder aufgenommen, indem er sie weiter entwickelte und hat die Werte der Hauptintegrale,

(1) Mémoires de l'Académie des sciences de Turin, série II, t. VII, p. 71.

welche wir nur im Vorübergehen angezeigt haben, bestimmt. Wir entnehmen seiner Arbeit die folgende Tafel, welche sich auf den Fall der beiden sich berührenden Kugeln bezieht. Der Halbmesser a der großen Kugel ist gleich der Einheit vorausgesetzt, dem Radius b der kleinen Kugel wurden verschiedene Werte ertheilt, welche in der ersten Colonne angegeben sind. Die beiden folgenden Colonnen geben die Ladungen E_a und E_b der beiden Kugeln, wenn das gemeinschaftliche Potential gleich der Einheit ist; die Summe C dieser beiden Ladungen repräsentiert die elektrische Capacität des aus den beiden Kugeln gebildeten Conductors; man kann mittelst der vorhergehenden Zahlen das Verhältnis β der mittleren Dichten auf beiden Kugeln rechnen. Die beiden letzten Colonnen endlich geben die Maximaldichten Y und Z auf der großen und kleinen Kugel, an den beiden Enden des gemeinschaftlichen Durchmessers, multipliciert mit dem Factor 4π. Man wird in der Abhandlung von Plana die Zahlen finden, welche allen anderen Werten von b, die durch einfache Brüche dargestellt sind und innerhalb der von uns gewählten Werte liegen, entsprechen; wendet man aber irgendeine Interpolationsmethode an, so wird man leicht die Werte dieser verschiedenen Größen in allen sich darbietenden Fällen rechnen können.

Hat man es mit einem von der Einheit verschiedenen Potential zu thun, so genügt es, die Ladungen und die Dichten mit dem neuen Potentialwerte zu multiplicieren.

Ist der Radius der größeren Kugel nicht gleich 1, so reicht es hin, in der Tabelle das System der beiden Kugeln dem vorausgesetzten Systeme ähnlich zu wählen, die Ladungen mit dem Ähnlichkeitsverhältnisse des zweiten zum ersten Systeme zu multiplicieren und die Dichten durch eben dasselbe Verhältnis zu dividieren; dann wird man jene Zahlen, welche der Gruppe der beiden betrachteten Kugeln entsprechen, erhalten.

Halbmesser der grossen Kugel $a = 1$.

Halbmesser der kleinen Kugel b	Elektricitätsmenge auf der grossen Kugel E_a	Elektricitätsmenge auf der kleinen Kugel E_b	Elektrische Capacität $C = E_a + E_b$	Verhältnis der mittleren Dichten $\beta = \frac{B}{A}$	Dichtenmaxima auf der grossen Kugel $4\pi Y$	Dichtenmaxima auf der kleinen Kugel $4\pi Z$
1	0·69315	0·69315	1·38629	1	0·91588	0·91588
0·9	0·72108	0·59777	1·31885	1·02344	0·92939	1.00074
0·8	0·75116	0·50496	1·25612	1·05037	0·94239	1·04332
0·7	0·78267	0·41459	1·19726	1·08107	0·95477	1·22401
0·6	0·81629	0·32831	1·14460	1·11721	0·96628	1·39407
0·5	0·85161	0·24700	1·09861	1·16017	0·97474	1·56260
0·4	0·88809	0·17228	1·06037	1·21241	0·98547	1·73751
0·3	0·92466	0·10632	1·03098	1·27757	0·99244	2·12645
0·2	0·95903	0·05214	1·01117	1·35906	0·99718	2·56949
0·1	0·98724	0·01458	1·00182	1·47666	0·99955	3·21145
0·05	0·99640	0·00387	1·00027	1·55038	0·99994	3·66106
0	1	0	1	1·64494	1·00000	4·20721

Der erste Wert von E_a, welcher den beiden gleichen Kugeln entspricht, ist gleich log. 2; der letzte Wert von β, der sich auf den Fall bezieht, wo eine der Kugeln unendlich klein ist, ist exact gleich $\frac{\pi^2}{6}$.

263. Fall, wo der eine der Radien sehr klein ist im Verhältnis zur Entfernung der beiden Kugeln. Weil die Lösung der Gleichung (5) (pag. 455) im allgemeinen Falle große Schwierigkeiten bereitet, hat Poisson[1] noch einen speciellen Fall untersucht, nämlich den, wo die Distanz der beiden Kugeln im Verhältnis zu dem einen der Radien sehr groß ist. Wenn man z. B. annimmt, dass das Verhältnis $\frac{b}{c-a}$ sehr klein ist, so kann man bei der Entwicklung der Function φ die Potenzen von $\frac{b}{c}$ und $\frac{b}{c-a}$, welche höher als die zweite sind, vernachlässigen.

Bezeichnet man mit u und u' jene Winkel, welche die Centrallinie (Fig. 114) mit den Radien OP und O'P', die zu den Punkten P und P' der beiden Kugeln gezogen sind,

(1) Mémoires de l'Institut, 1811, I. partie p. 84.

bildet, mit A und B die mittleren Dichten auf den beiden Kugeln, so findet man, dass die Dichten μ und μ' in den beiden Punkten P und P' durch die folgenden Formeln ausgedrückt werden.

$$\mu = A + \frac{b^2}{ac} B - \frac{b^2(c^2 - a^2)B}{a(c^2 - 2ca\cos u + a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mu' = B - \frac{3a^2 \cos u'}{c^2} A + \frac{5a^2 b}{2c^3}(1 - 3\cos^2 u')A \text{ (}^1\text{)}.$$

Bis zu diesem Grade der Annäherung gelten für die Potentiale V_a und V_b die Werte:

$$V_a = \frac{E_a}{a} + \frac{E_b}{c},$$

$$V_b = \frac{E_b}{b} + \frac{E_a}{c} - \frac{a^3}{c^2(c^2 - a^2)} E_b.$$

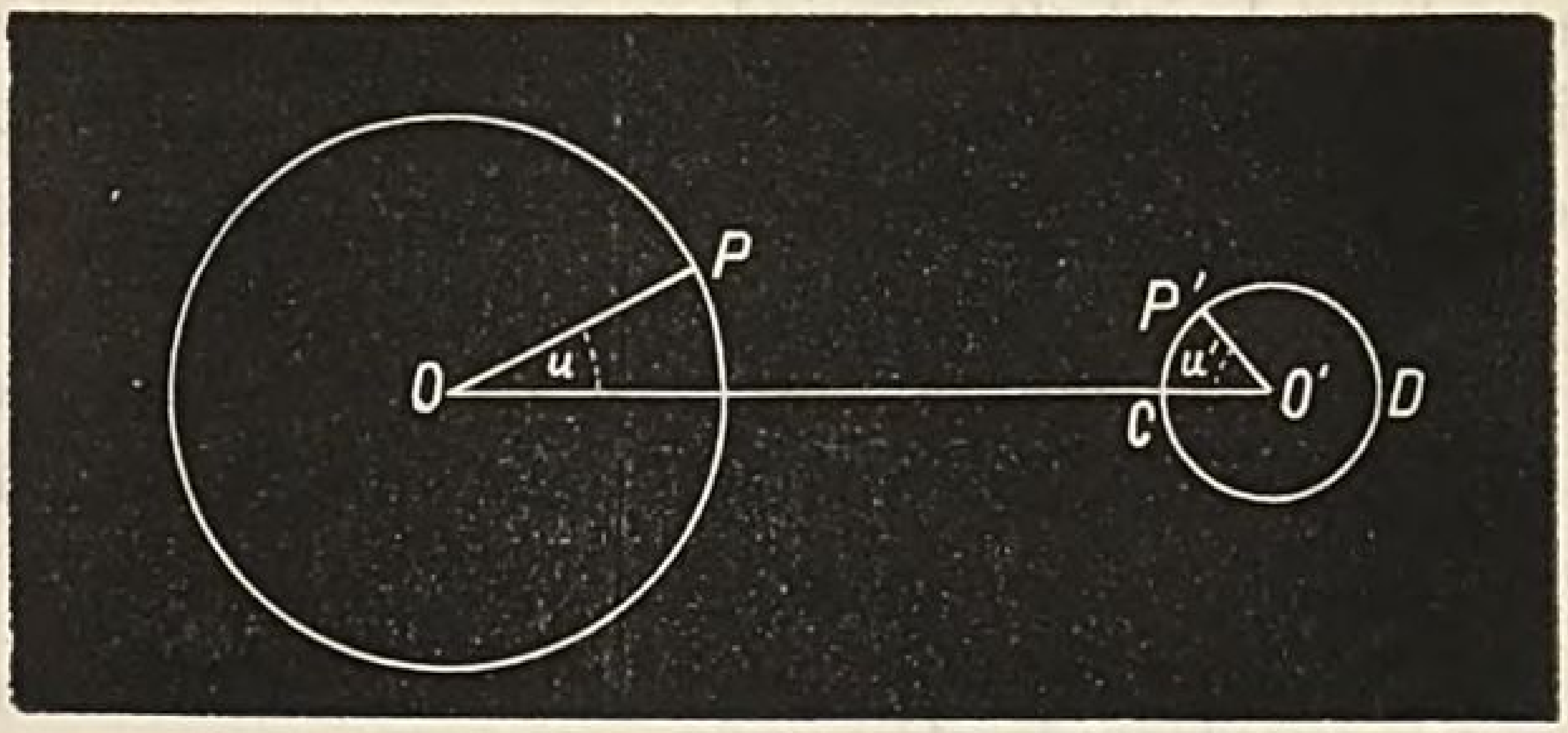


Fig. 114.

264. Setzt man voraus, dass die Kugel mit dem Radius b ursprünglich im neutralen Zustande gewesen wäre, so wird man $B = o$ haben und:

$$\mu' = -\frac{3a^2}{c^2} A \left[\cos u' + \frac{3\cos^2 u' - 1}{2} \cdot \frac{5b}{3c}\right].$$

In den beiden Punkten C und D der kleinen Kugel, welche auf der Centrallinie gelegen sind, werden die Dichten dann vom entgegengesetzten Zeichen sein und ihr Verhältnis gleich

(1) **Plana** findet, dass dieser von **Poisson** entwickelte Ausdruck nicht exact ist und er schlägt vor, ihn durch eine andere Formel zu ersetzen, die bei weitem weniger einfach ist.

$\left(1+\frac{5b}{3c}\right):\left(1-\frac{5b}{3c}\right)$ werden. Die Punkte, in welchen die Dichte Null ist, wird man erhalten, wenn man die Größe, welche innerhalb der Klammern steht, Null setzt, was mit demselben Grade der Annäherung liefert:

$$\operatorname{Cos} u' = \frac{5b}{3c}.$$

Da diese Größe sehr klein ist, so sieht man, dass die neutrale Linie nahezu die Schnittlinie der Kugel (mit dem Radius b) und einer Ebene ist, welche durch das Centrum der Kugel geht und auf der Geraden OO′, welche die beiden Centren verbindet, perpendiculär ist, ein Resultat, das man leicht voraussehen konnte.

Ist die Kugel mit dem Radius b urprünglich geladen, so erkennt man aus dem Werte von μ', dass die Vertheilung auf dieser Kugel erhalten wird, wenn man eine homogene Elektricitätsschichte von der Dichte B jener hinzufügt, welche auf dieser im neutralen Zustande gedachten Kugel durch Influenz von Seite der anderen hervorgerufen würde.

Wenn endlich die Kugel mit dem Radius b in leitende Verbindung mit der Erde gesetzt wird, so wird ihr Potential Null und es kommt:

$$E_b = -E_a \frac{1}{\frac{c}{b} - \frac{a^3}{c(c^2-a^2)}},$$

$$V_a = E_a \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{c^2}{b} - \frac{a^3}{c^2-a^2}}\right] = E_b c \left[\frac{1}{c^2-a^2} - \frac{1}{ba}\right].$$

265. Wenden wir noch diese Resultate auf den Fall einer Kugel mit dem unendlich kleinen Radius b an, welche zuerst mit einer anderen Kugel vom endlichen Radius a in Contact gesetzt und dann in eine bestimmte Entfernung von dieser gebracht wird. Man hat dann:

$$\frac{B}{A} = \frac{\pi^2}{6};$$

die Dichte, welche in jenem Punkte der kleinen Kugel herrscht, welcher der großen Kugel am nächsten gelegen ist, ist

$$A\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{3a^2}{c^2}\right).$$

Diese Dichte wird Null, wenn die Entfernung der Mittelpunkte derart gewählt ist, dass man hat:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{3a^2}{c^2} \quad \text{oder} \quad c=\frac{3\sqrt{2}}{\pi}a;$$

die Entfernung der Mittelpunkte ist dann:

$$c-a=\left(\frac{3\sqrt{2}}{\pi}-1\right)a.$$

Wenn die ganze Ladung positiv ist, wird in dem betrachteten Punkte die Elektricität negativ sein für Werte von c, welche kleiner als der vorstehende sind und sie wird für größere Werte positiv werden. Wenn man die kleine Kugel von der großen entfernt, so wird die elektrische Dichte im Punkte der kleinen Kugel, welcher ursprünglich in Berührung war, Null, dann aber negativ; die elektrische Dichte nimmt hierauf für eine bestimmte Entfernung den Nullwert an, von da an bleibt sie immer positiv. Dieselbe Erscheinung zeigt sich jedesmal, wenn die beiden ungleichen Kugeln ursprünglich im Contacte waren; wir kommen weiter unten darauf zurück.

266. Allgemeiner Fall. In einer zweiten Abhandlung(¹) hat Poisson endlich den allgemeinen Fall zweier Kugeln behandelt, welche durch irgendeinen Zwischenraum getrennt waren. Er hat zwei Auflösungen der Gleichung (5) gegeben, die eine in Reihenform, die andere in der Form eines bestimmten Integrales. Die Angabe dieser Resultate würde uns viel zu weit ablenken; es ist zu bedauern, dass die Poisson'schen Formeln nicht in Tabellen gebracht wurden, denn sie könnten Anlass zu interessanten Anwendungen auf die Experimente geben. Poisson brachte die Formeln in einem speciellen Falle zur Anwendung, in dem nämlich, in welchem

(¹) Mémoires de l'Institut, IIᵉ partie, p. 163.

die beiden Kugeln Radien besitzen, welche sich wie 1 : 3 verhalten und welche um eine Distanz von einander abstehen, die gleich dem kleineren der beiden Radien ist. Man hat sodann:

$$a = 1$$
$$b = 3$$
$$c = 5$$

Die Dichten μ und μ' in den Punkten P und P', die auf den Kugeln mit den Radien a und b in Winkeldistanzen u und u' von der Centrallinie liegen, sind gegeben durch Ausdrücke von der nachstehenden Form:

$$\mu = \mathrm{M}h - \mathrm{N}g$$
$$\mu' = \mathrm{N}'g - \mathrm{M}'h,$$

in welchen M und N Functionen des Winkels u, M' und N' Functionen des Winkels u' sind. Die folgenden Tafeln geben die Werte dieser verschiedenen Coefficienten für eine bestimmte Anzahl von Werten der Winkel u und u'.

u	M	N
0	1·6637	1·5595
$\frac{\pi}{8}$	1·5735	1·4215
$\frac{\pi}{4}$	1·4032	1·1343
$3\frac{\pi}{8}$	1·2684	0·8613
$\frac{\pi}{2}$	1·1850	0·6605
$5\frac{\pi}{8}$	1·1374	0·5288
$3\frac{\pi}{4}$	1·1110	0·4486
$7\frac{\pi}{8}$	1·0979	0·4058
π	1·0938	0·3923

u'	M'	N'
0	0·9525	0·8803
$\frac{\pi}{8}$	0·6142	0·4304
$\frac{\pi}{4}$	0·4215	0·1444
$3\frac{\pi}{8}$	0·3677	0·0612
$\frac{\pi}{2}$	0·3526	0·0328
$5\frac{\pi}{8}$	0·3457	0·0212
$3\frac{\pi}{4}$	0·3425	0·0158
$7\frac{\pi}{8}$	0·3411	0·0134
π	0·3407	0·0127

267. Man kann in derselben Weise die Werte von h und g bestimmen und zwar aus den gesammten Elektricitätsmengen, welche sich auf den beiden Kugeln vorfinden.

Bezeichnet man mit A die mittlere Dichte auf der kleinen Kugel und mit B die mittlere Dichte auf der großen Kugel, so wird man haben:

$$A = h.1{\cdot}2367 - g.0{\cdot}7516,$$
$$B = g.0{\cdot}3858 - h.0{\cdot}0835;$$

woraus man schließt, dass:

$$h = A.0{\cdot}9311 + B.1{\cdot}8139,$$
$$g = B.2{\cdot}9846 + A.0{\cdot}2015$$

ist.

Wenn man diese Werte in die Ausdrücke von μ und μ' substituiert, wird man erhalten:

$$\mu = \alpha A + \beta B$$
$$\mu' = \beta' B + \alpha' A.$$

Die folgende Tafel gibt die Werte der Coefficienten α, β, α' und β' für die früher gewählten Winkel.

u oder *u'*	α	β	β'	α'
0	1·2348	— 1·6369	1·2461	— 0·6277
$\frac{\pi}{8}$	1·1786	— 1·3887	1·0524	— 0·2769
$\frac{\pi}{4}$	1·0779	— 0·8402	0·9961	— 0·0495
$3\frac{\pi}{8}$	1·0074	— 0·2709	0·9924	+ 0·0176
$\frac{\pi}{2}$	0·9703	+ 0·2782	0·9928	+ 0·0405
$5\frac{\pi}{8}$	0·9524	+ 0·4847	0·9933	+ 0·0499
$3\frac{\pi}{4}$	0·9441	+ 0·6765	0·9937	+ 0·0543
$7\frac{\pi}{8}$	0·9405	+ 0·7822	0·9938	+ 0·0563
π	0·9393	+ 0·8131	0·9938	+ 0·0569

Diese Tafeln zeigen in deutlicher Weise das Vertheilungsgesetz der Fluida auf den beiden Kugeln. Man kann den Größen A und B irgendwelche Werte geben; wenn der eine von ihnen Null ist, so erhält man die Vertheilung der Elektri-

cität, welche durch die Influenzwirkung einer elektrisierten Kugel auf einer anderen, ursprünglich im neutralen Zustande befindlichen Kugel hervorgerufen wurde. Wenn die eine der Kugeln mit dem Erdboden verbunden wurde, so ist ihr Potential Null und die vorhergehenden Tabellen geben die entsprechende Vertheilung. Man kann noch $h = g$ machen; die Kugeln werden dann dasselbe Potential haben; dieser Fall kann in der Weise realisiert werden, dass man die beiden Kugeln durch einen leitenden Draht verbindet, welcher so dünn ist, dass die Ladung dieses Drahtes keinen merklichen Einfluss auf die Vertheilung der Elektricität nimmt. Die vorhergehenden Formeln gestatten, die elektrische Capacität dieses speciellen Conductors zu bestimmen.

268. Werden die beiden Kugeln ursprünglich miteinander in Berührung gebracht, sodann in eine Entfernung gestellt, welche gleich dem Radius der kleineren ist, wie wir früher angenommen haben, so hat man:

$$\frac{A}{B} = 1{\cdot}2541.$$

Benützt man diese Beziehung in den vorhergehenden Formeln, so kann man die Potentiale und die elektrischen Dichten als Functionen der Ladung der einen oder der anderen der beiden Kugeln ausdrücken. Man findet in der Art, dass in jenem Punkte der kleinen Kugel, welcher der größten Kugel am nächsten liegt, die Dichte negativ und ungefähr $\frac{7}{100}$ der mittleren Dichte ist. Coulomb hat gefunden, dass wenn zwei elektrisierte Kugeln, deren Radien sich wie 11 : 4 verhalten, zuerst miteinander in Berührung gebracht, sodann getrennt werden, die kleine Kugel Zeichen von entgegengesetzter Elektricität aufweist, bis die Entfernung der beiden Oberflächen gleich dem kleineren Radius wird. Dieses Resultat ist mit jenem in Übereinstimmung, welches die Rechnung liefert.

269. Poisson hat in eingehender Weise jenen Fall untersucht, welcher stattfindet, wenn die Entfernung der einander am nächsten gelegenen Punkte der beiden Kugeln sehr klein ist. Wenn das Verhältnis der gesammten Elektricitäten, mit welchen die beiden Kugeln geladen sind, nicht jenem gleich ist, welches sich beim Contacte herstellt, so wächst die Dichte

der elektrischen Schichte in den am meisten benachbarten Punkten auf beiden Kugeln in dem Maße, als die beiden Kugeln sich dem Contacte nähern; dasselbe gilt auch von der Spannung, welche das elektrische Fluidum auf die zwischen diesen beiden Körpern liegende Luft ausübt und es existiert, wie gering auch immer die gesammten Elektricitätsmengen sein mögen, immer eine hinlänglich kleine Entfernung, für welche der elektrische Druck (die elektrische Spannung) die Luftentfernung übertrifft und für welche das Fluidum in der Form eines Funkens oder in anderer Weise sich entfernt.

Die elektrischen Schichten, welche auf den beiden benachbartesten Oberflächenelementen sich vorfinden, sind entgegengesetzter Art und äußern das Bestreben, auf den beiden Kugeln gleich zu werden. Der Gang der Erscheinung ist überdies leicht vorauszusehen.

270. Elektrische Dichten in jenen Punkten zweier benachbarten Kugeln, die einander am nächsten liegen. — Tafeln von Plana. Plana hat Tafeln gerechnet, die es ermöglichen, durch einfache Formeln die Dichten zu bestimmen, welche zwei am nächsten liegende Punkte in dem Falle sehr kleiner Distanzen besitzen; wir werden sie hier wiedergeben, weil sie sich vom Nutzen dann erweisen können, wenn man auf experimentellem Wege das Gesetz der Schlagweiten zwischen zwei Kugeln bestimmen will. Nennt man y_1 und z_1 die elektrischen Dichten in den einander benachbartesten Punkten der Kugeln mit den Radien a und b, A und B die mittleren Dichten und Δ die kleinste Entfernung der beiden Oberflächen, so hat man, unter dem Symbol log. die gemeinen Logarithmen verstanden:

$$y_1 = A \frac{R}{P + \log \frac{\Delta}{b}},$$

$$z_1 = B \frac{R'}{P + \log \frac{b}{\Delta}}.$$

Die Werte der Coefficienten P, R und R′ sind durch die nachstehende Tafel für eine gewisse Anzahl von Werten des Verhältnisses $\frac{b}{a}$ der beiden Radien gegeben.

$\frac{b}{a}$	P	R	R'
0·9	1·12294	0·04492	0·04597
0·8	1·13726	0·09561	0·10043
0·7	1·14364	0·14237	0·15392
0·6	1·14059	0·21691	0·24234
0·5	1·12523	0·32040	0·37173
0·4	1·09480	0·32743	0·39698
0·3	1·04733	0·45613	0·58274
0·2	0·98091	0·55983	0·76085
0·1	0·90234	0·65849	0·97237
0·05	0·85138	0·73130	1·13380

Wenn die Radien a und b einander gleich sind, so hat man einfach:

$$y_1 = -z_1 = (A - B) \frac{M\left(\frac{a}{\Delta} + Q\right)}{N + \log \frac{a}{\Delta}},$$

in welchem Ausdrucke die Coefficienten folgende Werte haben:

$$M = 0{\cdot}868589$$
$$N = 1{\cdot}103423$$
$$Q = 0{\cdot}439888.$$

271. Sind die beiden Kugeln ungleich und entfernt man sie immer mehr, nachdem man sie zuerst in Berührung gesetzt hat, so laden sich die beiden ursprünglich in Berührung befindlichen Punkte mit Elektricitäten verschiedener Art und jener von diesen beiden Punkten, welcher der kleineren Kugel angehört, besitzt eine der gesammten Elektricität entgegengesetzte Elektricität.

Wenn man die Distanz vergrößert, so vergrößert sich zuerst die elektrische Dichte in diesem Punkte, wird ein Maximum, nimmt dann immer mehr und mehr ab und wird dann Null und nimmt hierauf einen Wert an, der dasselbe Zeichen wie in allen anderen Punkten der Conductoren besitzt. Plana hat noch eine Tafel gerechnet, welche für eine gewisse Anzahl von Fällen das Verhältnis der Distanz Δ der beiden Oberflächen zum Radius a der größeren der beiden Kugeln angibt, wenn

die Dichte auf der kleineren Kugel in jenem Punkte Null ist, welcher der anderen Kugel am nächsten liegt.

Wir entnehmen dieser Tafel folgende Resultate:

$\frac{b}{a}$	$\frac{\Delta}{a}$
1	0
0·9	0·18500
0·8	0·20500
0·7	0·35700
0·6	0·49547
0·5	0·53101
0·4	0·40418
0·3	0·36239
0·2	0·39960
0·1	0·39382
0·05	0·37400
0·0101	0·35703
0	0·35048

272. Elektrische Vertheilung unter mehreren Kugeln. Plana[1] hat auch versucht, mittelst der Rechnung annäherungsweise den Fall zu behandeln, in welchem mehrere gleiche Kugeln auf einer und derselben geraden Linie in Contact gebracht wurden.

Für drei Kugeln fand er, dass das Verhältnis der mittleren Dichten der ersten und der zweiten 1·4424 ist; das Experiment von Coulomb hat hiefür den Wert 1·34 geliefert.

Für den Fall von sechs Kugeln hat Coulomb gefunden:

$$\frac{A_1}{A_3} = 1{\cdot}56, \quad \frac{A_2}{A_3} = 1{\cdot}053$$

Die Rechnungen von Plana würden für das erste Verhältnis die Zahl 1·5063, für das zweite die Zahl 1·0615 geben.

In dem Falle von 12 gleichen Kugeln liefert der Calcül:

$$\frac{A_1}{A_6} = 1{\cdot}6352, \frac{A_1}{A_2} = 1{\cdot}5079.$$

Coulomb hat dafür gefunden

$$\frac{A_1}{A_6} = 1{\cdot}70, \quad \frac{A_1}{A_2} = 1{\cdot}50.$$

(1) Loc. cit. p. 319.

Wenn endlich zwei gleiche Kugeln mit einer anderen vom 4fachen Radius in Contact gebracht werden, so muss nach der Rechnung das Verhältnis der mittleren Dichten der beiden gleichen Kugeln 2·552 sein; Coulomb hat hiefür 2·54 gefunden.

Sind 4 gleiche Kugeln in Berührung mit einer anderen vom 4fachen Radius, so muss nach der Rechnung das Verhältnis der mittleren Dichten der ersten und der vierten gleich 3·124 sein; das Experiment hat den Wert 3·40 gegeben.

Der Fehler in dem letzten Fall ist bei $\frac{1}{10}$; man sieht aber, dass die Theorie und das Experiment im allgemeinen in genügender Weise miteinander übereinstimmen.

273. Rechnungen von Roche, auf den Fall zweier gleichen Kugeln sich beziehend.

Um diese Darstellung der nach der Poisson'schen Methode angestellten Berechnungen zu beschließen, wollen wir noch die von Roche(¹) für den Fall zweier gleichen Kugeln erhaltenen Resultate angeben.

Betrachten wir die vier auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser gelegenen Punkte; nennen wir y' und y_1 die Dichten in den zwei Punkten der Kugel A, z_1 und z' die Dichten in den beiden Punkten der Kugel B, so dass y_1 und z_1 sich auf Punkte beziehen, welche zwischen den beiden Mittelpunkten gelegen sind. Wenn man in den Poisson'schen Formeln(²) $a = b = 1$ setzt, erhält man leicht:

$$y_1 = \mathrm{M}h - \mathrm{N}g, \quad y' = \mathrm{M}'h - \mathrm{N}'g,$$
$$z_1 = \mathrm{M}g - \mathrm{N}h, \quad z' = \mathrm{M}'g - \mathrm{N}h,$$

wobei die Coefficienten M, N, M' und N' die Functionen der Centraldistanz c bezeichnen, deren Entwicklung in Reihenform folgende erste Glieder liefert:

$$\mathrm{M} = 1 + \frac{2}{c^2 - c - 1} + \frac{2c}{(c^2 - c - 1)^2} +$$
$$+ \frac{1}{(c^2 - 1)^2 - c^2 - (c^2 - 2)c} + \ldots$$

(¹) Mémoires de l'Académie de Montpellier, section des sciences T. II., p. 115.

(²) Zweite Abhandlung, p. 190.

$$N = \frac{1}{c-1} + \frac{2}{(c-1)^2} + \frac{1}{(c^2-2)c - c^2 + 1} + \dots$$

$$M' = 1 + \frac{1}{c^2+c-1} - \frac{2c}{(c^2+c-1)^2} + \frac{1}{(c^2-1)^2 - c^2 + (c^2-2)c} + \dots$$

$$N' = \frac{1}{c+1} - \frac{2}{(c+1)^2} + \frac{1}{(c^2-2)c + c^2 - 1} + \dots$$

Diese Reihen sind um so convergenter, je mehr c die Zahl 2 übertrifft.

Die mittleren Dichten A und B auf den beiden Kugeln sind mit den Größen h und g durch die Beziehungen

$$A = Ph - Qg,$$
$$B = Pg - Qh$$

verbunden; in diesen bezeichnen P und Q zwei neue Reihen:

$$P = 1 + \frac{1}{c^2-1} + \frac{1}{(c^2-1)^2 - c^2} - \dots$$

$$Q = \frac{1}{c} + \frac{1}{(c^2-2)c} + \dots$$

274. Wenn die Kugeln so weit voneinander entfernt werden, dass man Größen von der Ordnung $\frac{1}{c^3}$ vernachlässigen kann, so erhält man:

$$y_1 = A - \frac{3}{c^2} B, \quad y' = A + \frac{3}{c^2} B,$$

$$z_1 = B - \frac{3}{c^2} A, \quad z' = B + \frac{3}{c^2} A;$$

was vier Gleichungen vom ersten Grade zwischen sechs Größen, welche auf experimentellem Wege bestimmt werden können, liefert. Man erhält leicht auch die analogen Relationen für die Potentiale, denn für diesen Grad der Annäherung reducieren sich die Reihen P und Q auf:

$$P = 1 + \frac{1}{c^2 - 1} = \frac{c^2}{c^2 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c^2}} = 1 + \frac{1}{c^2}$$

$$Q = \frac{1}{c};$$

woraus man erhält:

$$A = h\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{g}{c},$$

$$B = g\left(1 + \frac{1}{c}\right) - \frac{h}{c}.$$

In dem speciellen Falle, in welchem man die Kugel B mit der Erde in leitende Verbindung setzt, wird die Größe g gleich Null und es bleibt einfach:

$$A = h\left(1 + \frac{1}{c^2}\right),$$

$$B = -\frac{h}{c}.$$

275. Sind die beiden Kugeln einander sehr nahe, so sind die Reihen M, M', N, N', P und Q nicht mehr hinreichend convergent, um von ihnen Gebrauch machen zu können. Bezeichnet man mit Δ die Entfernung der Kugeloberflächen und setzt man:

$$\Delta = c - 2 = \frac{\delta^2}{4},$$

so wird die Größe δ^2 sehr klein. Poisson(¹) hat die für die elektrischen Dichten gegebenen Ausdrücke als Functionen von δ^2 entwickelt, und es sind die Coefficienten dieser Entwicklung bestimmte Integrale.

Setzt man abkürzungshalber:

$$g' = \frac{h - g}{2},$$

so hat man:

$$y_1 = \frac{2g'}{\Delta} + \frac{2g'}{3} + R\delta^2,$$

(¹) Deuxieme mémoire, p. 248—270.

$$z_1 = -\frac{2g'}{\Delta} - \frac{2g'}{3} + R'\delta^2,$$

$$y' = h.\,1{\cdot}075 - g.\,0{\cdot}159 + S\delta^2$$

$$z' = g.\,1{\cdot}075 - h.\,0{\cdot}159 + S'\delta^2,$$

wobei die Coefficienten R und R′, S und S′ Reihen sind, die nach ganzen und positiven Potenzen von δ^2 geordnet sind. Man hat in derselben Weise, wenn man mit G, H, G′ und H′ neue Reihen bezeichnet,

$$A = -\frac{g'}{2}\log.\delta^2 + Gg + Hh,$$

$$B = \frac{g'}{2}\log.\delta^2 + G'g + H'h.$$

Setzt man die Entfernung der Kugeln so klein voraus, dass die Werte aller dieser Reihen vernachlässigt werden können, so bleibt einfach:

$$y' = h.\,1{\cdot}075 - g.\,0{\cdot}159,$$

$$z' = g.\,1{\cdot}075 - h.\,0{\cdot}159,$$

$$y_1 = -z_1 = (h-g)\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3}\right).$$

Bis zu diesem Grade der Annäherung sind die Dichten in den zwei einander am meisten benachbarten Punkten gleich und vom entgegengesetzten Zeichen.

Setzt man die Kugel B mit dem Erdboden in Verbindung, so hat man:

$$y' = h.\,1{\cdot}075,$$

$$z' = -h.\,0{\cdot}159,$$

$$y_1 = -z_1 = h\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3}\right);$$

und die mittlere Dichte der Kugel A ist nahezu:

$$A = -\frac{h}{4}\log.4\Delta.$$

Da die Dichte dieser Kugel, von der man voraussetzt, dass sie jeder äußeren Wirkung entzogen wird, für dasselbe

Potential gleich h würde, so ersieht man, dass die condensierende Kraft $\mathfrak{F}$ eines Condensators, der aus einem Systeme von zwei unter einander gleichen Kugeln, die einander sehr nahe stehen, gegeben ist durch:

$$\mathfrak{F} = \frac{A}{h} = -\frac{1}{4} \log. 4\Delta.$$

Da Roche eher die Dichten als die Potentiale betrachtete, hat er eine Tafel gerechnet, welche die Dichten in den zwei einander am nächsten gelegenen Punkten und die mittleren Dichten enthält, indem er annimmt, dass der eine der entferntesten Punkte die Dichte Null, der andere eine gegebene Dichte habe.

Indem er $y' = E$ und $z' = o$ setzte, erhielt er auf diese Weise:

Δ	y_1	z_1	A	B
0·1	8·4 E	— 8·4 E	"	"
0·5	2·0	— 1·9	1·14 E	— 0·33 E
0·6	1·7	— 1·5	"	"
0·7	1·5	— 1·2	"	"
0·8	1·4	— 1·1	"	"
0·9	1·36	— 1·0	"	"
1	1·31	— 0·9	1·06	— 0·22
2	1·08	— 0·5	"	"
3	1·03	— 0·3	"	"
4	1·01	— 0·17	1·005	— 0·06

276. Um die Wirkung zu bestimmen, welche die beiden elektrisierten Kugeln aufeinander ausüben, muss man in jedem Punkte den Druck ausrechnen, welcher von der auf der einen Kugel ausgebreiteten Elektricitätsschichte gegen die Luft ausgeübt wird und die Summe der in die Centrallinie fallenden Componenten dieser Drücke bilden. Roche hat, auf die Aufforderung von Marie Davy hin, nur den Unterschied der Drücke bestimmt, welche in zwei auf der Centrallinie gelegenen Punkten herrschen, und man kann annehmen, dass diese Differenz — wenigstens angenähert — der resultierenden elektrischen Kraft proportional ist. Da der Druck in jedem Punkte dem Quadrate der elektrischen Dichte proportional ist, so

erkennt man, dass es genügt, nach den vorhergehenden Formeln die Differenz:

$$y'^2 - y_1^2 = (y' + y_1)(y' - y_1)$$

zu bestimmen. Setzt man voraus, die beiden Kugeln wären ursprünglich in Contact gewesen, so werden die Potentiale gleich sein, wenn man sie trennt und wenn man den gemeinschaftlichen Factor $g = h$ gleich der Einheit nimmt, werden die Ausdrücke für die Dichten:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{c-1} + \frac{1}{c^2 - c - 1} - \frac{2}{(c-1)^2} + \ldots$$

$$y' = 1 - \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c^2 + c - 1} + \frac{2}{(c+1)^2} + \ldots$$

woraus man weiter erhält:

$$y' + y_1 = 2 - \frac{2c(c^2+3)}{(c^2-1)^2} + \frac{2(c^2-1)}{(c^2-1)^2 - c^2} + \ldots$$

$$y' - y_1 = \frac{2(3c^2+1)}{(c^2-1)^2} - \frac{2c}{(c^2-1)^2 - c^2} + \ldots$$

Wenn die Entfernung der Mittelpunkte so groß ist, dass man die Rechnung auf diese ersten Glieder beschränken kann, erhält man:

$$y'^2 - y_1^2 =$$

$$= 4\left[1 - \frac{c(c^2+3)}{(c^2-1)^2} + \frac{c^2-1}{(c^2-1)^2 - c^2}\right]\left[\frac{3c^2+1}{(c^2-1)^2} - \frac{c}{(c^2-1)^2 - c^2}\right].$$

Diese Gleichung kann durch die nachstehende ersetzt werden:

$$y'^2 - y_1^2 = 4\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{3}{c^2} - \frac{1}{c^3}\right),$$

wenn man die Rechnung auf die Glieder der dritten Potenz des Verhältnisses $\frac{1}{c}$ beschränkt.

Die zweite Seite der vorigen Gleichung reduciert sich schließlich auf $\frac{12}{c^2}$, wenn die Entfernung der Mittelpunkte groß genug ist, um alle Potenzen, welche höher als die zweite sind, vernachlässigen zu können.

Roche war so freundlich, uns die folgende Tafel mitzutheilen, in welcher er für eine gewisse Anzahl von Werten der Mittelpunktsentfernung die elektrischen Dichten der beiden entferntesten Punkte und den Unterschied ihrer Quadrate, welcher nahezu die elektrische Kraft darstellt, gerechnet hat; wir haben der Tafel noch eine andere Columne hinzugefügt, welche das Product dieser Differenz der Quadrate und das Quadrat der Entfernung der Mittelpunkte angibt. Die Zahlen der letzten Columne würden gleich sein, wenn die elektrische Kraft genau dem Unterschiede der in den beiden betrachteten Punkten herrschenden Drücke und umgekehrt dem Quadrate der Entfernung der Mittelpunkte proportional wäre.

c	y_1	y'	$y'^2-y_1^2$	$(y'^2-y_1^2)c^2$
2·5	0·112	0·900	0·797	4·98
3	0·386	0·902	0·665	5·98
4	0·582	0·905	0·480	7·68
5	0·707	0·909	0·326	8·15
6	0·773	0·913	0·236	8·50
7	0·807	0·917	0·190	9·31
8	0·837	0·920	0·146	9·34
9	0·858	0·924	0·118	9·56
10	0·870	0·928	0·101	10·10
11	0·884	0·930	0·083	10·04
12	0·892	0·934	0·077	11·08
13	0·902	0·938	0·066	11·15
14	0·911	0·941	0·056	10·98
15	0·919	0·945	0·048	10·80
16	0·926	0·948	0·041	10·50
17	0·930	0·950	0·038	10·99
18	0·935	0·953	0·034	11·02
19	0·940	0·956	0·030	10·83
20	0·945	0·959	0·027	10·80
21	0·949	0·962	0·025	11·02
22	0·954	0·966	0·023	11·13
40	0·974	0·9776	0·007	11·40

Die Zahlen dieser Tafel variieren in keiner vollständig continuierlichen Weise, weil Roche die Berechnung nicht soweit geführt hat, dass man die Richtigkeit der dritten Decimalstelle in den Werten für die Dichte verbürgen könnte. Wenn man aber diese Resultate auf carriertes Papier aufträgt und die Curven entwirft, welche dieselben so genau als möglich dar-

stellen, so kann man aus diesen krummen Linien noch viel genähertere Werte ableiten, besonders wenn man im Auge behält, dass für eine große Distanz der beiden Kugeln alle beiden Dichten gleich der Einheit sind und das Product $(y'^2 - y_1^2)\, c^2$ gleich 12 ist; man erhält auf diese Weise:

c	y_1	y'	$y'^2-y_1^2$	$(y'^2-y_1^2)\, c^2$
2·5	0·112	0·900	0·797	4·98
3	0·386	0·902	0·665	5·98
4	0·582	0·905	0·478	7·60
5	0·707	0·909	0·326	8·15
6	0·771	0·913	0·240	8·70
7	0·808	0·917	0·188	9·15
8	0·837	0·920	0·146	9·34
9	0·856	0·924	0·120	9·75
10	0·870	0·927	0·100	10·00
15	0·919	0·945	0·048	10·70
20	0·944	0·958	0·027	11·05
25	0·957	0·967	0·019	11·35
30	0·965	0·972	0·013	11·50
35	0·970	0·975	0·010	11·60
40	0·974	0·977	0·007	11·70
∞	1	1	0	12

Wie unvollkommen auch die Zahlen dieser Tafel sein mögen, sie zeigen doch deutlich die Art und Weise, wie die abstoßende Kraft zwischen zwei gleichen, auf dasselbe Potential gebrachten Kugeln mit der Entfernung ihrer Mittelpunkte variiert.

Ändert sich das Potential, so ändert sich die Kraft für eine bestimmte Distanz proportional dem Quadrate des Potentiales. Es ist daher unrichtig, diese Resultate auf den Fall zweier isolierten Kugeln, die zuerst in Berührung, dann in verschiedene Distanzen gebracht wurden (32), anzuwenden, wie es Marie Davy (1) gethan hat. Wenn die elektrischen Ladungen der Kugeln constant sind, so vermindert sich anfangs das Potential jeder von ihnen sehr schnell, dann aber in viel langsameren Verhältnisse, als ihre Distanz sich vergrößert, so dass die elektrische Kraft dann viel schneller abnimmt, was die Rechnungen von Roche nicht anzeigen.

(1) Mémoires de l'Académie de Montpellier, section des sciences. T. II, pag. 150.

Das Gesetz des Quadrates der Entfernung ist daher für zwei Kugeln, deren Ladungen constant sind, wie es bei den Experimenten von Coulomb der Fall war, der Wahrheit näher, als wenn die beiden Kugeln auf ein constantes Potential gebracht wären.

Elektrische Bilder.

277. Wie wir gesehen haben (216), führt die Methode von Murphy die numerische Berechnung des elektrischen Zustandes verschiedener ihrer gegenseitigen Influenzwirkung unterworfenen Conductoren auf ein anderes einfacheres Problem zurück; die vollständige Lösung bietet aber oft der Rechnung unübersteigbare Schwierigkeiten dar. Thomson (¹) hat mittelst geometrischer Betrachtungen direct eine gewisse Anzahl von Specialfällen behandelt und ist hiebei zu Resultaten von seltener Eleganz gelangt.

278. Niveauflächen, welche zwei elektrischen Punkten entsprechen. Betrachten wir z. B. zwei Punkte A und A′ (Fig. 115), welche in einem unbegrenzten isolierenden Medium liegen und die Elektricitätsmengen respective e und e' besitzen. Bezeichnet man mit r und r' die Entfernungen irgend eines Punktes P von den beiden Punkten A und A′, so ist das Potential V der beiden Elektricitätsmengen in diesem Punkte

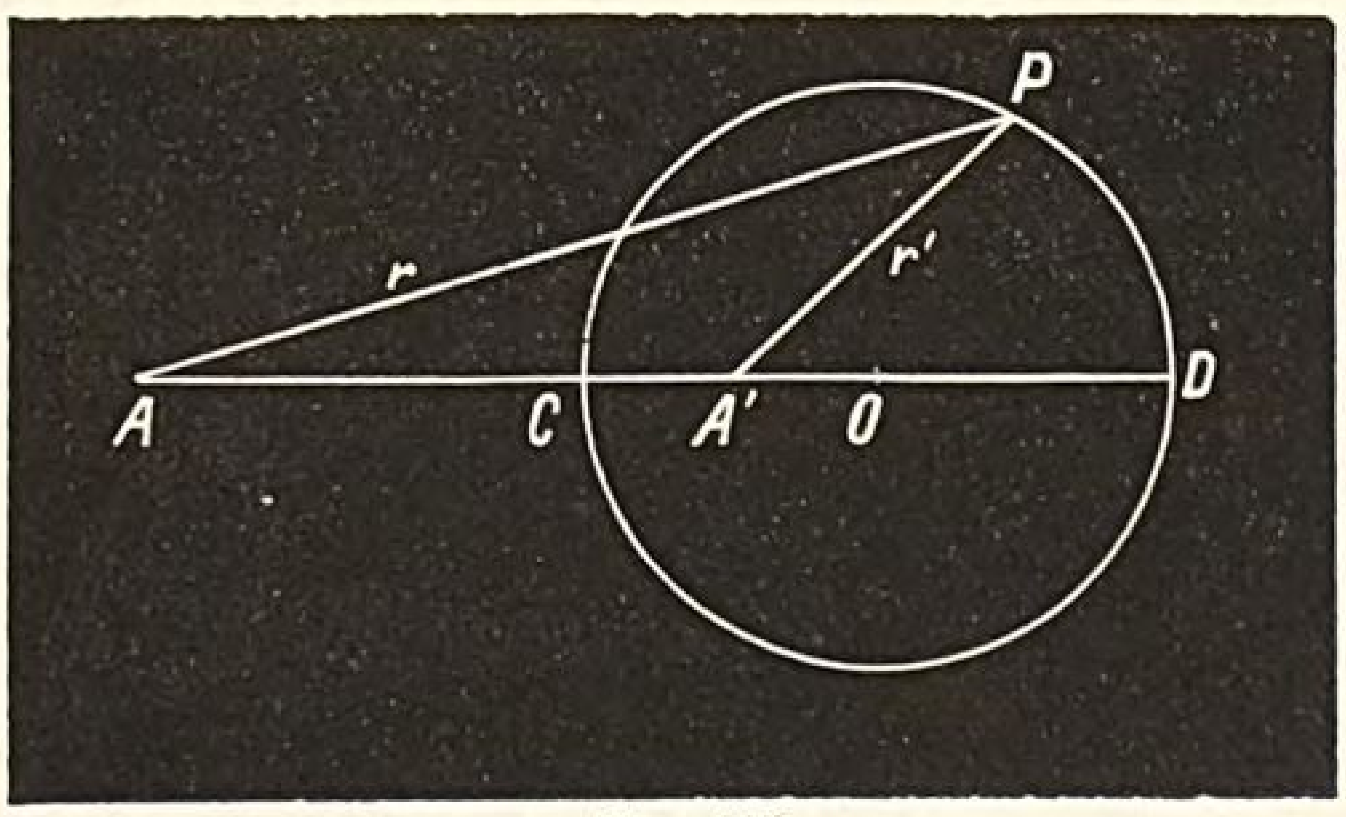


Fig. 115.

$$V = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'}.$$

Die Niveauflächen sind durch diese Gleichung dargestellt, in welcher man dem V verschiedene Werte ertheilt. Die

(¹) Reprint of papers, p. 52 u. d. f. — J. C. Maxwell, A Treatise of Electricity and Magnetism, vol. I., p. 191 u. d. f.

Niveaufläche, welche dem Potential Null entspricht, hat die Gleichung

$$0 = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'}.$$

Diese Fläche liegt ganz in der Unendlichkeit, wenn die beiden Elektricitätsmengen e und e' gleichbezeichnet sind; sind sie aber vom entgegengesetzten Zeichen, so ist die Oberfläche eine Kugel, da das Verhältnis der Entfernung eines Punktes P von den beiden festen Punkten A und A′ constant ist; diese Kugel umgibt jenen der beiden Punkte, welcher die kleinere Elektricitätsmenge besitzt.

279. Nehmen wir nun zur Festsetzung der Ideen an, dass die Elektricitätsmenge e' negativ und dem absoluten Werte nach kleiner als die Elektricitätsmenge e sei und setzen wir

$$\text{(1)} \qquad \frac{AP}{A'P} = \frac{r}{r'} = \frac{e}{-e'} = K.$$

Die beiden Punkte A und A′ sind gegenseitig conjugiert bezüglich der Kugeloberfläche, d. h. man hat, wenn man mit R den Radius der Kugel bezeichnet, deren Centrum in O ist:

$$AO . A'O = R^2.$$

Man kann leicht diese Eigenschaft verificieren. Denn seien C und D jene Punkte, in welchen die Gerade AO die Kugeloberfläche trifft, so hat man nach Gleichung (1)

$$K = \frac{AC}{A'C} = \frac{AD}{A'D} = \frac{AD - AC}{A'D - A'C} = \frac{R}{A'O} = \frac{AC + R}{A'C + A'O} = \frac{AO}{R};$$

hieraus erhält man:

$$K = \frac{R}{A'O} = \frac{AO}{R},$$

und

$$AO . A'O = R^2.$$

Die Lage des Mittelpunktes der Kugel und der Radius R sind durch die Distanz AA′ der beiden Punkte und das Verhältnis K der Elektricitätsmengen bestimmt. Denn man hat

$$K^2 = \frac{R}{A'O} \cdot \frac{AO}{R} = \frac{AO}{A'O}.$$

Man erhält daraus:

$$K^2 - 1 = \frac{AO - A'O}{A'O} = \frac{AA'}{A'O}$$

und demzufolge:

$$A'O = AA' . \frac{1}{K^2 - 1},$$

$$AO = AA' . \frac{K^2}{K^2 - 1}.$$

Diese beiden Gleichungen geben auch:

$$R^2 = AO . A'O = \overline{AA'}^2 \frac{K^2}{(K^2 - 1)^2},$$

oder

$$R = AA' \frac{K}{K^2 - 1}.$$

Wenn man mit d und d' die Entfernungen AO und A'O bezeichnet, so hat man schließlich die folgenden Beziehungen, von denen wir häufigen Gebrauch machen werden:

$$e' = -e . \frac{1}{K},$$

$$K = \frac{R}{d'} = \frac{d}{R},$$

$$K^2 = \frac{d}{d'},$$

$$d' = AA' \frac{1}{K^2 - 1},$$

$$d = AA' \frac{K^2}{K^2 - 1},$$

$$AA' = \frac{d^2 - R^2}{d} = \frac{R^2 - d'^2}{d'}.$$

280. Elektrisierung einer nicht isolierten Kugel unter dem Einflusse eines äusseren Punktes. Da die sphärische Oberfläche, welche man ins Auge fasste, auf dem Potential Null sich befindet, kann man sie durch eine dünne Metall-

schichte ersetzen, welche mit der Erde in Verbindung ist; diese Schichte wird nicht elektrisiert sein und das Potential wird in keinem Punkte sich ändern, sei es innerhalb oder außerhalb der Kugel. Denken wir uns nun die elektrische Masse e' weg, während die metallische Oberfläche in Verbindung mit dem Erdboden bleibt, so wird das Potential dann im ganzen Innern der Kugel Null sein (178); da es auf der Oberfläche Null bleibt, so wird kein Wechsel in der Vertheilung des Potentiales im Außenraume eintreten. Es bildet sich dann auf der Kugeloberfläche eine Elektricitätsschichte, deren gesammte Menge e' ist (177). Man kennt somit die gesammte, auf einer Kugel, die mit dem Erdboden in Verbindung ist, durch die Influenzwirkung von Seite eines äußeren elektrisierten Punktes entwickelte Elektricitätsmenge. Da die elektrische Kraft im Inneren der Kugel Null ist und da sie sich im Außenraume nicht geändert hat, so übt diese Elektricitätsschichte auf jeden inneren Punkt eine Wirkung aus, die jener gleich und vom entgegengesetzten Zeichen ist, welche von der in A befindlichen Elektricitätsmenge e herrührt.

Die betrachtete Schichte wirkt daher auf alle äußeren Punkte so, wie es eine gleiche Elektricitätsmenge e', die im Punkte A' concentriert wäre, thun würde, auf alle innere Punkte so, wie die entgegengesetzte Elektricitätsmenge — Ke', die sich im Punkte A vorfindet.

Thomson nennt, wie schon früher bemerkt wurde, den Punkt A' das elektrische Bild des Punktes A bezüglich der Kugel. Denn es besteht eine gewisse Analogie zwischen den Eigenschaften dieser Punkte und jener der virtuellen optischen Bilder. Das virtuelle Bild A' eines leuchtenden Punktes A bezüglich eines Spiegels oder einer Linse ist ein solcher Punkt, dass, wenn in ihm sich eine Lichtquelle befinden würde, die letztere Strahlen aussenden würde, welche mit denen identisch sind, die der Spiegel oder die Linse mittelst Reflexion oder Brechung in den Bildpunkt senden. Ebenso ruft die in A' concentrierte Elektricitätsmenge e' außerhalb der Kugel dieselben Kräfte hervor, wie die mit der Erde in Ver-

bindung stehende und unter dem Einflusse einer in A befindlichen Elektricitätsmenge elektrisierte Kugeloberfläche. Eine Elektricitätsmenge e, in A befindlich, übt dagegen im Inneren der Kugel dieselbe Wirkung aus, wie die auf dieser Kugel durch Influenz von Seite der betrachteten Elektricitätsmenge entwickelte elektrische Schichte.

281. Dichte dieser Elektricitätsschichte in jedem Punkte. Man kann außerdem das Gesetz der Vertheilung der Elektricitätsschichte auf der Kugeloberfläche bestimmen. Betrachten wir zu diesem Behufe die Wirkung, welche auf eine positiv elektrische Masse, die gleich der Einheit ist und sich in einem Punkte P befindet, der zwar außerhalb, aber ganz nahe der Kugeloberfläche liegt, ausgeübt wird. Diese Kraft F kann als die Resultierende zweier anderen Kräfte betrachtet werden, von denen die eine repulsive f vom Punkte A ausgeht und gleich $\frac{e}{r^2}$ ist, während die andere attractive f' von A′ ausgeht und gleich $\frac{-e'}{r'^2}$ ist. Die Resultierende F ist normal zu der Oberfläche der Kugel, da diese eine Niveaufläche ist; man könnte dies ohne Schwierigkeit beweisen. Wenn man das Kräftenparallelogramm ins Auge fasst und mit a und a' die Winkel PAO und PA′O bezeichnet, so hat man die Beziehungen:

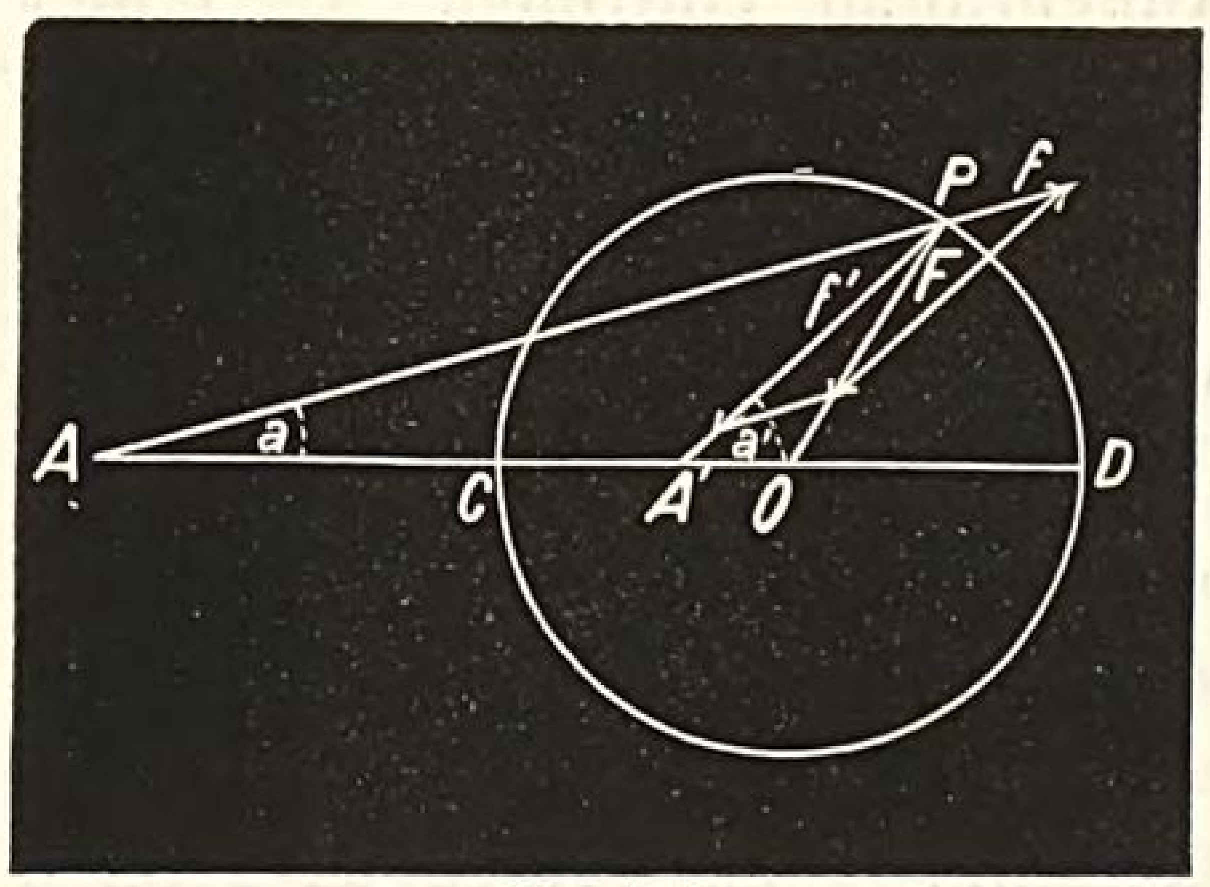


Fig. 116.

$$\frac{f}{\sin a} = \frac{f'}{\sin a'} = \frac{\mathrm{F}}{\sin(a'-a)}.$$

Aus dem Dreiecke APA′ erhält man:

$$\frac{r'}{\sin a} = \frac{r}{\sin a'} = \frac{\mathrm{AA'}}{\sin(a'-a)}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{AA'}} = \frac{f'}{r} = \frac{f}{r'}$$

oder

$$F = \frac{AA'}{r'} f = \frac{AA'}{r'} \cdot \frac{e}{r^2} = AA' \cdot \frac{r}{r'} \cdot \frac{e}{r^3} = AA' . K . \frac{e}{r^3}.$$

Wir können nun die Elektricitätsmenge e', welche im Punkte A' gelegen ist, durch die ihr äquivalente sphärische Schichte ersetzen. Bezeichnet man mit μ die Dichte dieser Schichte im Punkte P, so ist, wie wir gesehen haben, die in einem benachbarten außerhalb gelegenen Punkte wirksame elektrische Kraft gleich $4\pi\mu$, wobei die Kraft auswärts genommen ist; man hat daher $-4\pi\mu = AA'. K. \frac{e}{r^3}$, woraus

$$\mu = -\frac{AA'}{4\pi} . K . \frac{e}{r^3} = \frac{AA'}{4\pi} \cdot \frac{1}{K} \frac{e'}{r'^3}$$

folgt. Ersetzt man AA' und K durch ihre als Functionen von d ausgedrückten Werte, so erhält man

$$\mu = -\frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \frac{e}{r^3} = \frac{R^2 - d'^2}{4\pi R} \frac{e'}{r'^3}.$$

Diese Formel befindet sich in Übereinstimmung mit einer früher (246) angestellten Betrachtung.

Die elektrische Dichte in einem Punkte P einer leitenden Kugeloberfläche, die mit dem Erdboden verbunden ist und unter der influencierenden Wirkung eines Punktes A steht, ist also umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung dieses Punktes vom Punkte A oder vom Punkte A', der dem ersteren bezüglich der Kugeloberfläche conjugirt ist.

Poisson hat dieses Theorem als speciellen Fall jenes Problemes dargestellt, welches sich auf die gegenseitige Influenz zweier leitenden Kugeln bezieht, die elektrisiert sind. Thomson ist zu demselben Resultate durch sehr einfache geometrische Betrachtungen gekommen, ohne von dem Begriffe des Potentiales und der Niveauflächen auszugehen.

282. Elektrisierung einer isolierten Kugel unter dem Einflusse eines äusseren elektrisierten Punktes.

Man kann aus dem Früheren die Influenzwirkung eines

elektrisierten Punktes auf eine leitende Kugel, deren gesammte Ladung oder deren Potential man kennt, ableiten.

Bezeichnen wir mit e_1 die Elektricitätsmenge des influencierenden Punktes, mit d_1 seine Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel. Wäre die Kugel in Verbindung mit der Erde, so würde auf ihr eine Elektricitätsschichte entstehen mit der Gesammtmenge:

$$e' = -e_1 \cdot \frac{1}{K} = -e_1 \frac{R}{d_1},$$

und deren Dichte in einem Punkte P, der in der Distanz r_1 vom influencierenden Punkte sich befindet, wäre durch die Formel:

$$\mu_1 = -\frac{d_1^2 - R^2}{4\pi R} \frac{e_1}{r_1^3}$$

dargestellt. Diese Schichte und der influencierende Punkt rufen im Inneren der Kugel ein Potential Null hervor. Heben wir die Verbindung mit der Erde auf und fügen wir auf die Oberfläche eine homogene Schichte von der Masse m hinzu; das Gleichgewicht wird noch fortbestehen, da das Potential im Innern der Kugel noch constant sein wird. Die Gesammtladung der Kugel ist dann:

$$M = m - e_1 \frac{R}{d_1}.$$

Ist die Menge M gegeben, so erhält man daraus:

$$m = M + e_1 \frac{R}{d_1},$$

und die elektrische Dichte im Punkte P wird sein:

$$\mu = \frac{m}{4\pi R^2} + \mu_1 = \frac{M}{4\pi R^2} + \frac{e_1}{4\pi R}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}\right).$$

Da das Potential V_1 im Inneren der Kugel einzig und allein durch die hinzugefügte Schichte m hervorgerufen wird, da es zuvor Null war, so wird man haben:

$$V_1 = \frac{m}{R} = \frac{M}{R} + \frac{e_1}{d_1}.$$

War die Kugel anfänglich isoliert und im neutralen Zustande, so ist $M = 0$ und man wird dann erhalten:

$$\mu = \frac{e_1}{4\pi R}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}\right),$$

$$V_1 = \frac{e_1}{d_1}.$$

Wenn an Stelle der gesammten auf der Kugel ausgebreiteten Elektricitätsmenge M das Potential V_1 gegeben wäre, so würde man haben:

$$M = V_1 R - e_1 \frac{R}{d_1},$$

$$\mu = \frac{V_1}{4\pi R} + \mu_1 = \frac{1}{4\pi R}\left(V_1 - \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3} e_1\right).$$

283. Elektrisierung einer Kugel unter dem Einflusse mehrerer äusseren Punkte.

Nehmen wir endlich an, eine leitende Kugel werde der influenzierenden Wirkung einer gewissen Anzahl von Punkten unterworfen, welche die Elektricitätsladungen $e_1, e_2, e_3 \ldots$ besitzen und in den Entfernungen $d_1, d_2, d_3 \ldots$ vom Mittelpunkte der Kugel gelegen sind. Jeder dieser Punkte wird auf die nicht isolierte Kugel wirkend eine bestimmte Elektricitätsschichte hervorrufen und einen Gleichgewichtszustand liefern. Die Superposition aller dieser Gleichgewichtszustände wird einen weiteren Gleichgewichtszustand hervorrufen, und es wird auch das Gleichgewicht nicht gestört werden, wenn man auf die Kugel eine homogene Schichte von der Menge m hinzufügt.

Die gesammte Elektricitätsmenge ist sodann

$$M = m - e_1\frac{R}{d_1} - e_2\frac{R}{d_2} - e_3\frac{R}{d_3} - \ldots$$

Wenn diese Menge M gegeben ist, so erhält man daraus:

$$m = M + e_1\frac{R}{d_1} + e_2\frac{R}{d_2} + e_3\frac{R}{d_3} + \ldots$$

und die Dichte in einem Punkte P ist:

$$\mu = \frac{m}{4\pi R^2} + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$$

Das Potential der Kugel, welches allein von der Elektricitätsmenge m herrührt, wird durch die Formel

$$V = \frac{m}{R} = \frac{M}{R} + \frac{e_1}{d_1} + \frac{e_2}{d_2} + \frac{e_3}{d_3} + \cdots$$

ausgedrückt, und wenn dieses Potential gegeben ist, erhält man daraus die gesammte Elektricitätsmenge M und die Dichte μ in jedem Punkte.

Das Problem der Vertheilung der Elektricität auf einer leitenden Kugel unter dem Einflusse einer gewissen Anzahl elektrischer festen Massen ist daher vollständig gelöst.

284. Wirkung eines Punktes auf eine Kugel. In dem Falle, in welchem wir einen einzigen elektrisierten Punkt, der außerhalb der Kugel in A liegt, haben, ist die Wirkung der Schichte $-e_1\frac{R}{d_1}$ auf diesen Punkt A dieselbe, als wenn diese Schichte im Punkte A′ concentriert wäre. Diese Kraft ist attractiv und gleich:

$$\frac{e_1^2\frac{R}{d_1}}{AA'^2} = \frac{e_1^2 R d_1}{(d_1^2 - R^2)^2}.$$

Die Wirkung der hinzugefügten Schichte m, die positiv vorausgesetzt ist, ist dieselbe, als wenn die Schichte im Centrum der Kugel vereinigt wäre; sie ist repulsiv und gleich

$$\frac{e_1 m}{d_1^2} = \frac{e_1 M}{d_1^2} + \frac{e_1^2 R}{d_1^3} = \frac{e_1 V_1 R}{d_1^2}.$$

Die Resultante f dieser beiden Kräfte als attractiv aufgefasst, ist daher:

$$f = \frac{e_1^2 R}{d_1^3}\left[\left(\frac{d_1^2}{d_1^2 - R^2}\right)^2 - 1\right] - \frac{e_1 M}{d_1^2}$$

$$= \frac{e_1 R}{d_1}\left[e_1\frac{d_1^2}{(d_1^2 - R^2)^2} - \frac{V_1}{d}\right].$$

Die Wirkung des elektrisierten Punktes auf die Kugel ist dieser Kraft gleich und entgegengesetzt.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass die Wirkung eines elektrisierten Punktes auf eine leitende Kugel attractiv ist:

1. Wenn die Kugel nicht isoliert, das Potential also dann Null ist;

2. wenn die Kugel isoliert ist und ihre gesammte Ladung M Null ist;

3. wenn der anziehende Punkt der Kugel hinlänglich nahe ist, denn dann wird das Glied, welches im Nenner $d^2—R^2$ enthält, das größere.

Damit die Wirkung eine repulsive sei, muss entweder das Potential positiv und größer als $\frac{e_1}{d_1}\left(\frac{d_1^2}{d_1^2-R^2}\right)^2$ oder die Ladung M der Kugel von demselben Zeichen wie die in dem äußeren Punkte befindliche Elektricitätsmenge e_1 sein und größer als:

$$R\frac{e_1}{d_1}\left[\left(\frac{d_1^2}{d_1^2-R^2}\right)^2-1\right].$$

Wenn die Kraft Null ist, so ist das Gleichgewicht labil.

Wenn endlich die Kugel der influencierenden Wirkung einer gewissen Anzahl fester elektrisierter Punkte unterworfen wird, so kann man die Wirkung eines jeden Punktes auf die Kugel bestimmen und demzufolge auch die Resultierende aller dieser Wirkungen.

285. Gleichgewicht einer unbegrenzten leitenden Platte unter der influencierenden Wirkung eines elektrisierten Punktes. Wenn die beiden Elektricitätsmengen e und e', welche wir oben betrachtet haben, gleich und entgegengesetzt bezeichnet sind, so ist die Fläche, für die das Potential Null ist, eine Ebene CD (Fig. 117), welche auf der Geraden AA' senkrecht steht und dieselbe in ihrem Mittelpunkte trifft.

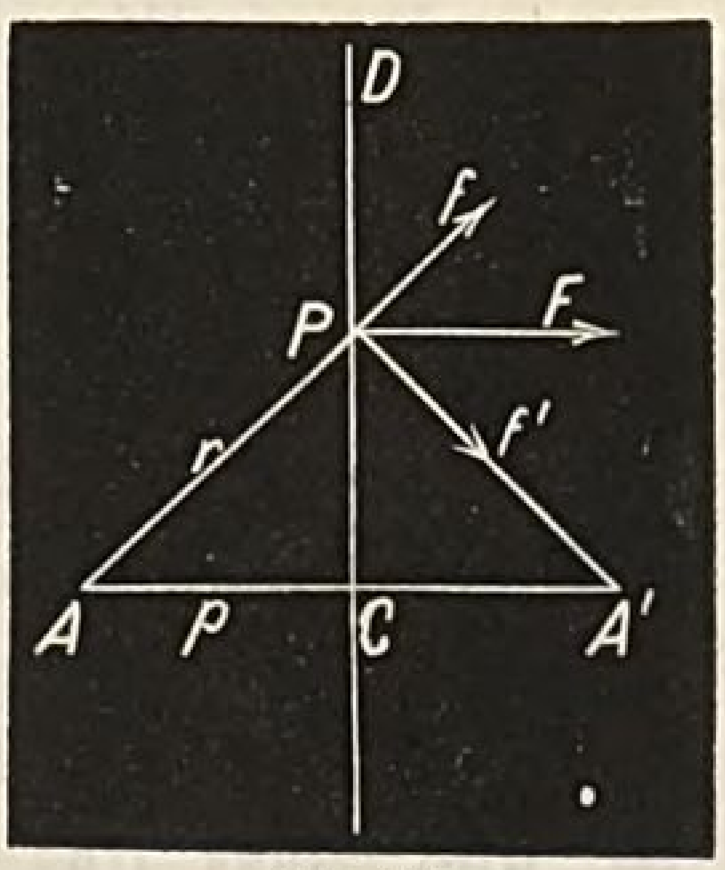


Fig. 117.

Ersetzt man CD durch eine Metallplatte, die mit der Erde in Verbindung steht und entfernt man die Elektricitätsmenge e', so wird sich die Platte mit einer negativen Elektricitätsschichte gleich e' laden und auf dem Potential Null bleiben.

Das Potential wird in allen Punkten jenes Raumes, der rechts von der Ebene CD liegt, Null sein, und man wird für

alle Punkte, welche links von dieser Ebene liegen, denselben früheren Wert erhalten.

Die elektrische Kraft F in einem Punkte P, der links von der Ebene CD und der Oberfläche derselben sehr nahe liegt, ist die Resultante der beiden Kräfte f und f', von denen eine jede gleich $\frac{e}{\mathrm{AP}^2}$ ist. Diese Resultierende ist normal zur Ebene und hat den Wert

$$\mathrm{F} = 2 \frac{e}{\mathrm{AP}^2} \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AP}} = 2\mathrm{AC}. \frac{e}{r^3}.$$

Ersetzt man den Punkt e' durch einen ebenen Leiter, so ist die elektrische Dichte μ auf dieser Ebene in der Nachbarschaft des Punktes P durch die Gleichung

$$-4\pi\mu = 2\mathrm{AC}. \frac{e}{r^3}$$

oder

$$\mu = -\frac{\mathrm{AC}}{2\pi} \frac{e}{r^3} = -\frac{p}{2\pi} \frac{e}{r^3}$$

gegeben. Diese Dichte ist daher der Distanz p des Punktes A von der Ebene direct proportional und steht im umgekehrten Verhältnisse zum Cubus der Entfernung des betrachteten Punktes P vom Punkte A. Auch dieses Resultat wurde bereits früher (§. 251.) auf anderem Wege gewonnen. Die Dichte in C ist

$$\mu_c = -\frac{1}{2\pi} \frac{e}{p^2}.$$

286. Da die Oberfläche der Ebene unendlich ist, welcher Umstand manche Zweifel über die Giltigkeit der Betrachtungen aufkommen lassen kann, so ist es nicht unnütz direct zu zeigen, dass — das erwiesene Dichtigkeitsgesetz als richtig vorausgesetzt — die Gesammtladung der Ebene gleich $-e$ ist und dass das Potential in allen Punkten des Raumes, welche rechts von der Ebene CD liegen, Null ist. Bezeichnen wir mit y die Distanz CP. Die Elektricitätsmenge, welche auf dem Ringe ausgebreitet ist, der zwischen den beiden mit den Radien y und $y+dy$ gezeichneten Kreisen liegt, ist

$$\mu.2\pi y dy = -\frac{p}{2\pi}\frac{e}{r^3}2\pi y dy = -pe\frac{ydy}{r^3}.$$

Aus der Gleichung

$$y^2 = r^2 + p^2$$

erhält man

$$ydy = rdr.$$

Die gesammte, auf der Ebene vorhandene Elektricitätsmenge ist daher:

$$-ep\int_o^\infty \frac{ydy}{r^3} = -ep\int_p^\infty \frac{dr}{r^2} = +ep\left(\frac{1}{r}\right)_p^\infty = -e$$

Das Potential in einem Punkte M (Fig. 118) ist, wenn man mit $d\sigma$ ein Element der Oberfläche in irgendeinem Punkte P der Ebene bezeichnet:

$$V_M = \frac{e}{MA} + \int \frac{\mu d\sigma}{MP}.$$

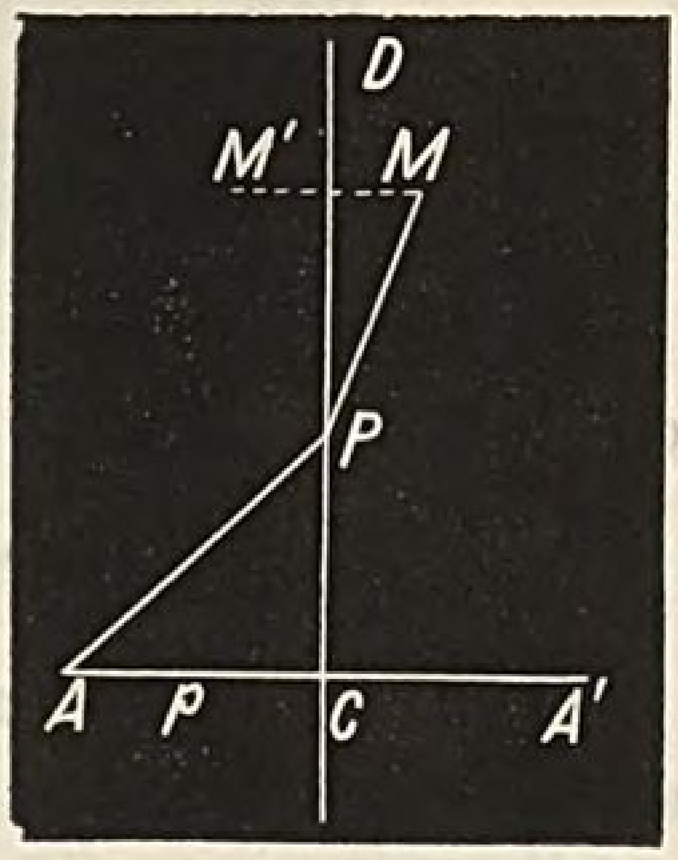


Fig. 118.

Das Potential im Punkte M', der symmetrisch zum ersten ist, ist

$$V_{M'} = \frac{e}{M'A} + \int \frac{\mu d\sigma}{M'P}.$$

Andererseits ist aber das Potential in M' dasselbe als wenn die Ebene entfernt worden wäre und durch eine Elektricitätsmenge gleich $-e$ ersetzt worden wäre, die im Punkte A' gelegen ist; man hat daher auch

$$V_{M'} = \frac{e}{M'A} - \frac{e}{M'A'}$$

Daraus resultiert, wenn man noch bemerkt, dass die Entfernungen MP und M'P gleich sind

$$\int \frac{\mu d\sigma}{M'P} = \int \frac{\mu d\sigma}{MP} = -\frac{e}{M'A'},$$

und demzufolge:

$$V_M = \frac{e}{MA} - \frac{e}{M'A'} = 0.$$

287. Transformation der Probleme der Elektricität. Die Methode der elektrischen Bilder gestattet aus einem gelösten Gleichgewichtsprobleme eine gewisse Anzahl von Lösungen abzuleiten, die sich auf die verschiedenen Fälle beziehen, welche man mit dem ersten durch einige sehr einfache geometrische Transformationen vereinen kann (1).

Seien z. B. zwei Punkte A und B (Fig. 119), A′ und B′ ihre Bilder bezüglich eines Kreises, dessen Radius R und

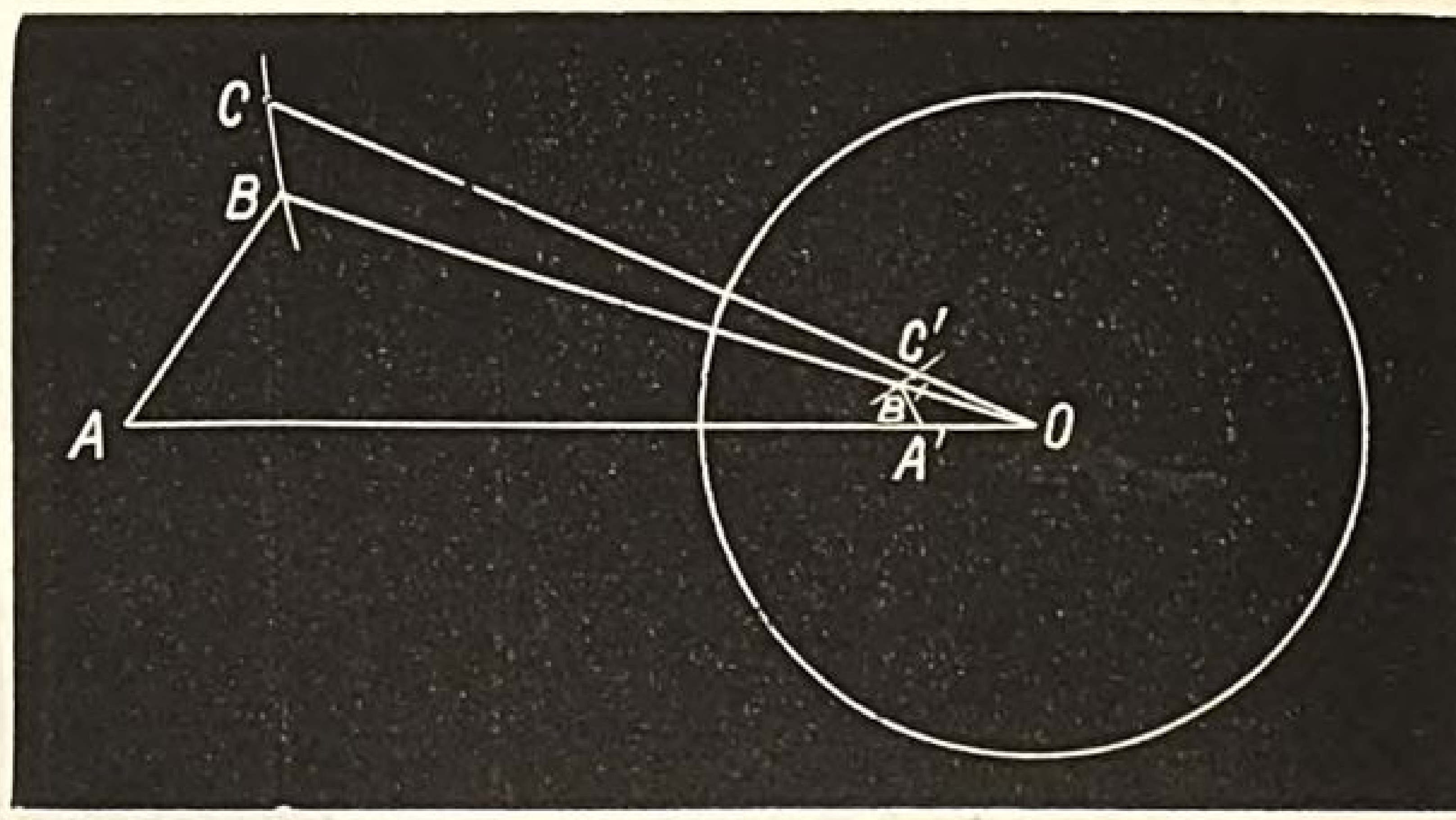


Fig. 119.

dessen Mittelpunkt in O ist, so hat man

$$(1) \qquad AO \times A'O = BO \times B'O = R^2.$$

Wenn eine Elektricitätsmenge e sich im Punkte B befindet, so wird das Potential im Punkte A sein

$$V = \frac{e}{AB}.$$

Diese Elektricitätsmenge e hat in der Kugel zum Bilde eine Menge e', welche in B′ liegt, und das Potential dieser Menge im Punkt A′ ist:

$$V' = \frac{e'}{A'B'}.$$

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke OAB und OA′B′ erhält man die Relation:

(1) Die im Folgenden öfters zur Anwendung kommende Methode ist unter dem Namen „Methode der reciproken Radien“ oder „Inversion“ bekannt.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{B'O}$$

und weiter, wenn man OB' durch seinen aus der Gleichung (1) erschlossenen Wert ersetzt,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO.BO}{R^2}.$$

Man hat überdies nach der Theorie der elektrischen Bilder (279)

$$\frac{-e'}{e} = \frac{B'O}{R} = \frac{R}{BO}.$$

Daraus resultiert:

$$\frac{V'}{V} = \frac{e'}{e}\frac{AB}{A'B'} = -\frac{AO}{R} = -\frac{R}{A'O}.$$

Es steht daher das von der im Punkte B befindlichen Elektricitätsmenge e herrührende Potential in A mit dem in A' herrschenden Potentiale, welches von dem im Punkte B' gelegenen Bilde e' herrührt, in einem constanten Verhältnisse, wo auch immer der Punkt B liegen möge. Dieses Verhältnis wird daher dasselbe sein für irgendein elektrisches System und dessen Bild. Wir können somit sagen: Das Verhältnis des Potentiales eines elektrischen Systemes auf einen Punkt zu dem Potentiale des Bildes des Systems auf das Bild des Punktes ist absolut genommen gleich dem Verhältnisse des Radius der abbildenden Kugel zur Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte dieser Kugel.

288. Ist das erste System ein im Gleichgewichte befindlicher Leiter, welcher den Punkt A enthält, so wird das Bild dieses Systemes, d. h. das dem ersten Systeme bezüglich der abbildenden Kugel conjugierte System, eine elektrisierte Oberfläche sein, welche den Punkt A' enthält, und wenn V das constante Potential des ersten Systemes ist, so wird das Potential V' im Punkte A' der conjugierten Figur ausgedrückt durch:

$$V' = -V.\frac{R}{A'O}.$$

Da das Potential umgekehrt proportional der Entfernung A'O ist, so wird diese Elektricitätsschichte nicht im Gleichgewichte sein; wenn man aber ins Inversionscentrum O eine Elektricitätsmenge gleich VR setzt, so wird das Potential im Punkte A' und in irgendeinem Punkte, der innerhalb der transformierten Oberfläche genommen wird, Null werden. Die erhaltene Elektricitätsschichte ist daher jene, welche ein nicht isolierter Conductor, der die Gestalt der transformierten Oberfläche hat, unter dem influencierenden Einfluße einer im Punkte O gelegenen Elektricitätsmenge annehmen würde.

289. Zwischen den Elementen dieser beiden conjugierten Oberflächen bestehen Relationen, welche einen einfachen Übergang von dem einen Systeme zum anderen ermöglichen.

Seien r und r' die Entfernungen BO und B'O, $d\sigma$ ein Element BC der Oberfläche des ersten Systemes und $d\sigma'$ das diesem conjugierte Element B'C', μ und μ' die correspondierenden Dichten, e und e' die Elektricitätsmengen auf diesen beiden Oberflächenelementen. Man hat:

$$\frac{e}{e'} = \frac{\mu d\sigma}{\mu' d\sigma'} = -\frac{r}{R} = -\frac{R}{r'}.$$

Die Ähnlichkeit der Pyramiden OBC, OC'B' liefert:

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{r^2}{r'^2};$$

daraus ergibt sich:

$$\frac{\mu}{\mu'} = -\frac{r\, r'^2}{R\, r^2} = -\frac{R^3}{r^3} = -\frac{r'^3}{R^3},$$

$$\mu' = -\mu\frac{r^3}{R^3} = -\mu\frac{R^3}{r'^3}.$$

Die Elektricitätsschichte $\Sigma\mu' d\sigma'$ ist jene, welche sich auf der transformierten leitenden und nicht isolierten Oberfläche S' unter dem Einflusse einer influencierenden Elektricitätsmenge VR, die sich im Punkte O befindet, entwickeln würde.

290. Die durch Inversion bezüglich einer Kugel conjugierten Figuren besitzen bemerkenswerte geometrische Eigenschaften

von denen wir die nachstehenden in Erinnerung bringen werden, welche man überdies leicht erweisen kann:

1. Die transformierte Figur einer Kugel ist eine andere Kugel und jene eines Kreises ein anderer Kreis, wenn nicht das Inversionscentrum auf der Oberfläche der Kugel oder der Peripherie des Kreises sich befindet; in diesem Falle hat die Oberfläche der Kugel zur conjugierten Fläche eine Ebene, und der Kreisperipherie ist eine gerade Linie conjugiert.

2. Der Winkel, den zwei Oberflächen oder zwei Linien an der Durchschnittsstelle bilden, wird durch Inversion nicht geändert; es ist das Bild dem Gegenstande in den kleinsten Theilen ähnlich.

3. Jede Kreisperipherie, welche durch einen Punkt A und den bezüglich einer Kugel conjugierten Punkt A′ geht, schneidet

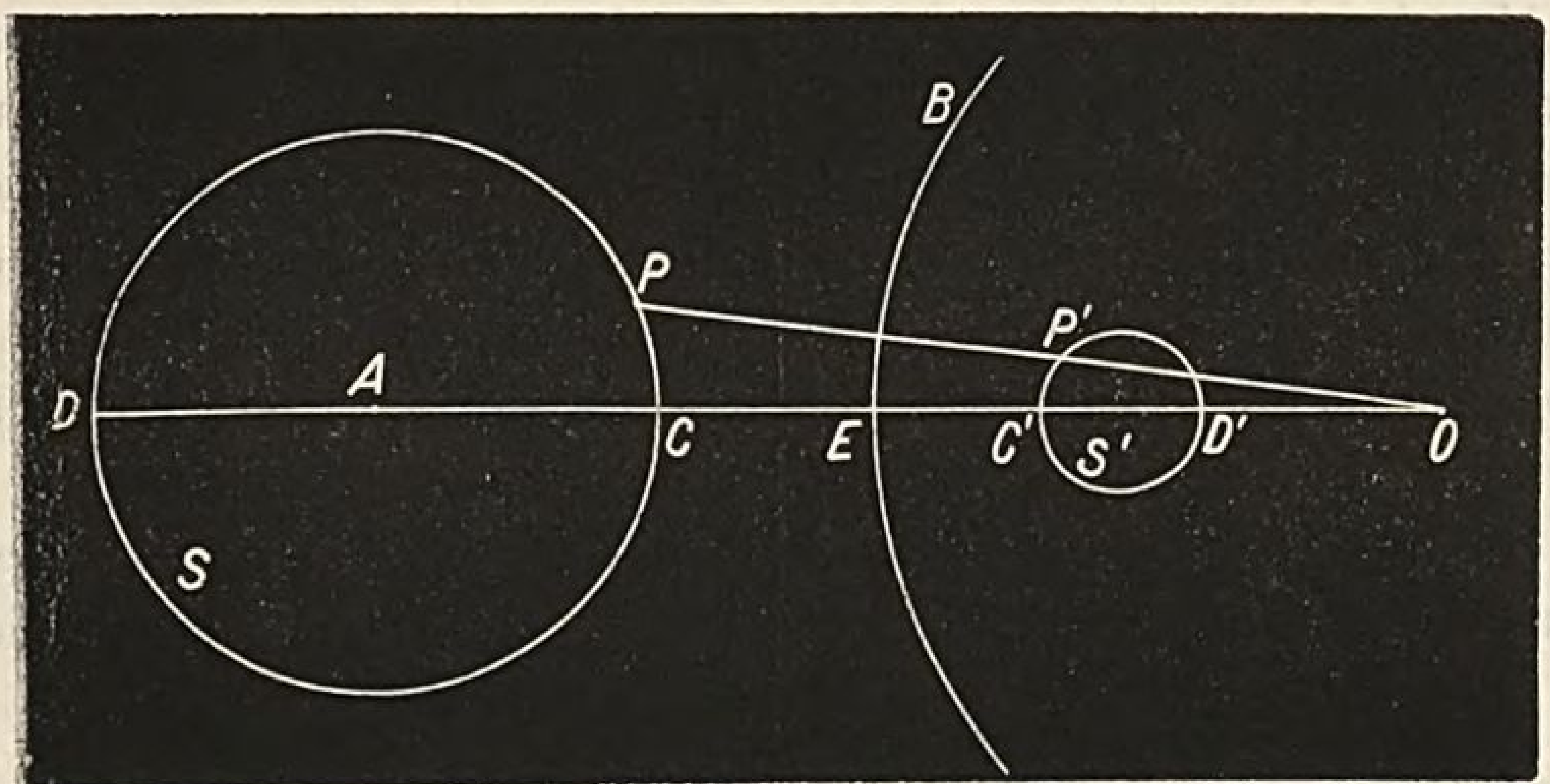


Fig. 120.

diese Kugel unter einem rechten Winkel; und umgekehrt, wenn eine Kreisperipherie eine Kugel unter einem rechten Winkel schneidet, sind alle die Punkte dieser Kreisperipherie zwei zu zwei conjugiert bezüglich der Kugel. (¹)

291. Als erste Anwendung dieser Methode der Figurentransformation wählen wir die Bestimmung der Vertheilung der Elektricität auf einer leitenden Kugel, die nicht isoliert ist, unter dem Einflusse eines elektrisierten Punktes.

Sei S (Fig. 120) eine Kugel vom Radius *a* und S′ eine

(¹) Bezüglich einiger anderen in dieser Theorie nützlichen Theoreme sehe man Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus (deutsch von Dr. B. Weinstein), 1. Band pg. 261.

Kugel vom Radius a', welche zur ersten bezüglich einer Kugel B vom Radius R conjugiert ist, deren Mittelpunkt in O ist, und bezeichnet man d und d' die Entfernungen des Punktes O von den Mittelpunkten der beiden ersten Kugeln, so hat man:

$$\frac{a}{a'} = \frac{d}{d'} = \frac{a+d}{a'+d'} = \frac{d-a}{d'-a'}.$$

Die Punkte C′ und D′ sind conjugiert zu den Punkten C und D, und deshalb hat man auch:

$$(d-a)(d'+a') = (d+a)(d'-a') = R^2,$$

woraus man erhält:

$$\frac{a}{a'} = \frac{d^2-a^2}{R^2} = \frac{R^2}{d'^2-a'^2}.$$

Man kann diese Proportionen in folgender Weise ausdrücken: Das Verhältnis der Entfernungen der Mittelpunkte einer Kugel und ihrer Abbildung vom Centrum der Inversion ist gleich dem Verhältnisse der Radien der Kugeln oder gleich dem Verhältnisse der Potenz der Inversionskugel zur Potenz der abzubildenden oder auch gleich dem Verhältnisse der Potenz der abgebildeten Kugel zur Potenz der Inversionskugel.

Nehmen wir nun an, dass eine Elektricitätsmenge e' gleichförmig auf der Oberfläche S′ vertheilt sei, so wird die Dichte μ' dieser Schichte sein:

$$\mu' = \frac{e'}{4\pi a'^2},$$

und das Potential im Innern wird constant und gleich

$$V' = \frac{e'}{a'}$$

sein. Das Potential im Punkte P der transformierten Schichte ist:

$$V = -V' \frac{R}{PO} = -\frac{e'}{a'} \cdot \frac{R}{PO}.$$

Bringen wir in den Punkt O eine Elektricitätsmenge

$$e = e' \frac{R}{a'},$$

so wird dann das Potential im Punkte P und auf der ganzen Oberfläche der Kugel S, ebensowie in deren Innerem Null werden. Die gefundene Schichte ist daher jene, welche sich auf der Kugel S bilden würde, wenn dieselbe — leitend und nicht isoliert vorausgesetzt — unter dem influencierenden Einflusse einer Elektricitätsmenge e, die im Punkte O gelegen ist, sich befinden würde.

Die Dichte im Punkte P ist

$$\mu = -\mu' \frac{R^3}{r^3} = -\frac{e'}{4\pi a'^2} \frac{R^3}{r^3} = -\frac{e}{4\pi a} \frac{d^2 - a^2}{r^3},$$

wenn man mit r die Entfernung PO bezeichnet. Die Gesammtladung x der Kugel S kann einfach aus der Bedingung bestimmt werden, dass das Potential im Punkte A Null ist, woraus man erhält

$$\frac{x}{a} + \frac{e}{d} = 0, \quad x = -e\frac{a}{d}.$$

Diese Ergebnisse sind mit denen identisch, welche früher gefunden wurden (281).

292. Systeme, gebildet aus einer begrenzten Zahl successiver Bilder. Wenn zwei leitende Ebenen OA und OB (Fig. 121) sich unter einem Winkel schneiden, der ein Theil von zwei Rechten ist, und wenn ein elektrisierter Punkt P zwischen diese beiden Ebenen gestellt wird, so wird derselben eine begrenzte Anzahl Bilder verursachen und man kann, wenn die Ebenen mit der Erde in Verbindung sind, die Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.

Nehmen wir als Zeichenebene eine Ebene, welche durch den Punkt P hindurchgeht und auf der Schnittlinie der beiden ersten Ebenen senkrecht steht. Sei $\frac{\pi}{n}$ der Winkel AOB (die Zeichnung ist für den Fall, wo $n = 3$ ist, entworfen), θ der Winkel POB und e die Ladung des Punktes P.

Der Punkt P wird bezüglich der Ebene OB ein Bild Q mit der Ladung $-e$ liefern; dieses wird bezüglich der Ebene OA ein Bild P_1 mit der Ladung $+e$ geben, welches wieder ein Bild Q_2 mit der Ladung $-e$ u. s. w. erzeugen wird. Ebenso

wird man, wenn man mit der Ebene OA beginnt, die aufeinander folgenden Bilder Q_1, P_2, Q_2 . . . erhalten. Diese Bilder sind an Zahl begrenzt, sie sind alle auf einer und derselben Kreisperipherie gelegen, welche zum Mittelpunkt den Punkt O hat; die Winkel POQ, QOP_2 zweier aufeinander folgenden Bilder vom entgegengesetzten Zeichen, sind abwechselnd gleich 2θ und $2\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)$ und die Winkel POP_1, Q_1OQ_2 zweier aufeinander folgenden Bilder von demselben Zeichen sind gleich $2\frac{\pi}{n}$.

Unter dem Einflusse des Punktes P und aller dieser Bild-

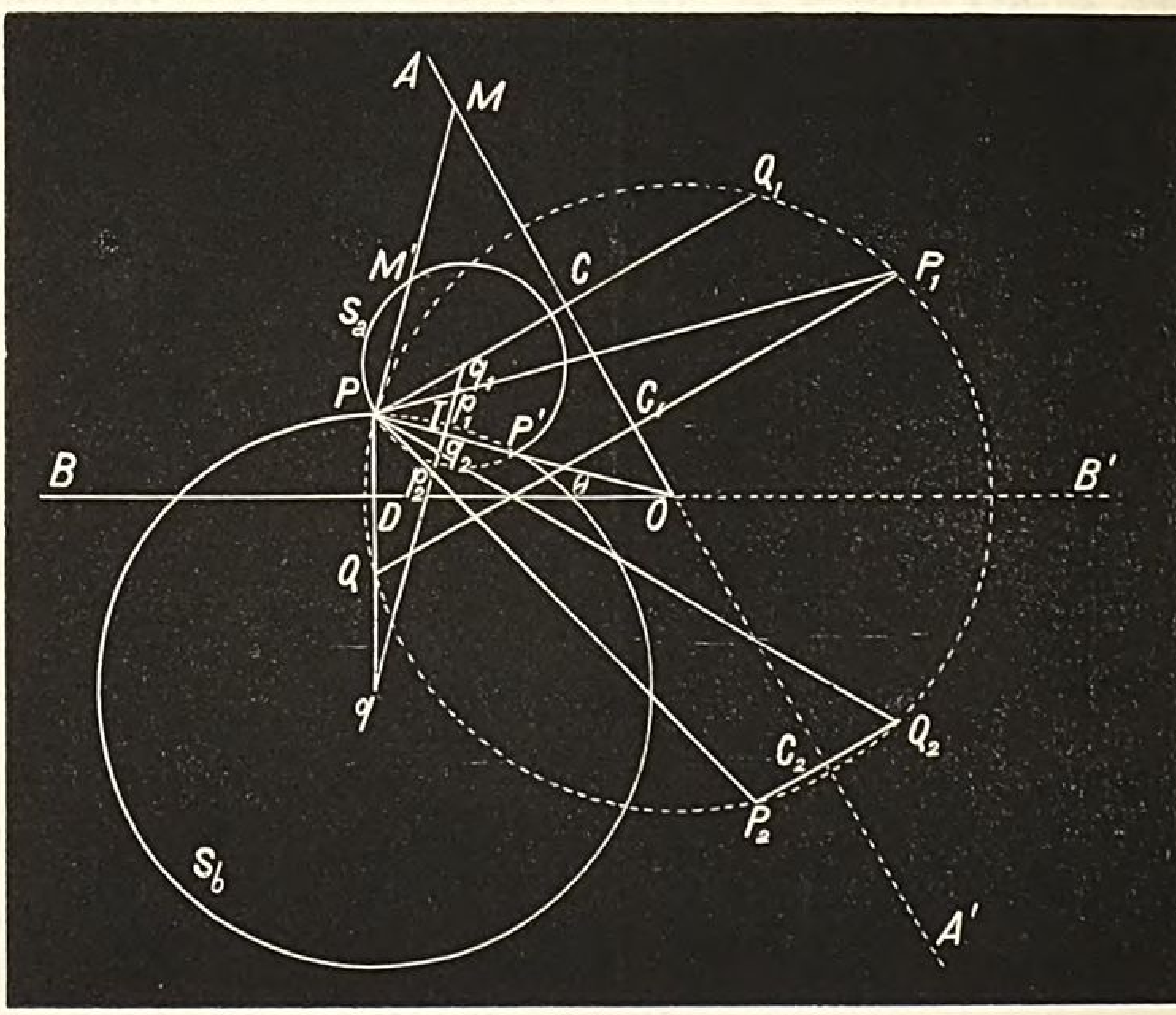


Fig. 121.

punkte ist das Potential auf den beiden Ebenen AA' und BB' Null. Ersetzt man die Bilder Q_1, P_1, Q_2 . . ., welche oberhalb der Ebene AA' gelegen sind, durch eine Elektricitätsschichte, welche auf dieser Ebene ausgebreitet und der Summe aller jener Elektricitätsmengen gleich ist, die den verschiedenen Bildern äquivalent sind, so wird das Potential auf der Ebene AA' noch Null sein, Null auch für alle ober der Ebene gelegenen Punkte

und es wird für die unterwärts befindlichen Punkte denselben Wert erhalten wie früher. Wenn man in eben derselben Weise auf die Ebene BB′ Elektricitätsschichten bringt, welche den Bildern Q, P_2, Q_2 . . . äquivalent sind, so wird das Potential auf der Ebene BB′ wieder Null sein und es wird dies auch unter dieser Ebene der Fall sein; für die Punkte oberhalb dieser Ebene erleidet das Potential keine Änderung. Endlich wird das System der auf den beiden Ebenen ausgebreiteten Elektricitätsschichten und der im Punkte P concentrierten Elektricitätsmenge im ganzen außerhalb des ebenen Winkels AOB gelegenen Raume ein Potential Null hervorbringen. Diese beiden Elektricitätsschichten repräsentieren daher die durch Influenzwirkung von Seite des elektrisierten Punktes P hervorgerufene Elektricitätsmenge, welche auf einem unendlichen, nicht isolierten, durch die Oberfläche AOB begrenzten Leiter sich bildet. Der bei der Behandlung dieses Falles eingeschlagene Weg ist nichts weiter als eine Anwendung der Methode von Murphy.

Diese Bilder gestatten die elektrische Dichte in irgendeinem Punkte M der einen der beiden Ebenen zu bestimmen und es ist klar, dass man in allen Punkten der Verlängerungen OA′ und OB′ der vorausgesetzten Ebenen die Dichte Null erhalten wird, da in dieser Gegend die elektrische Kraft durchwegs Null ist.

Die Dichte im Punkte M ist nach (285.)

$$\mu = -\frac{e}{2\pi}\left[\frac{Q_1C}{MQ_1^2} - \frac{P_1C_1}{MP_1^2} + \frac{Q_2C_2}{MQ_2^2} - \cdots\right]$$

Da das Potential im Punkte M Null ist, so ist das Potential V der elektrischen Schichten allein in diesem Punkte gleich und entgegengesetzt dem von der in P gelegenen Elektricitätsmenge herrührenden Potentiale.

Man hat daher:

$$V = -\frac{e}{MP}.$$

293. Betrachten wir nun die Oberflächen, welche den beiden Ebenen OA und OB bezüglich einer Inversionskugel conjugiert

sind; es sei R der Radius dieser Kugel, im Punkte P sei ihr Mittelpunkt. Es sind dies zwei sphärische Oberflächen S_a und S_b, welche durch den Punkt P hindurchgehen und sich in einem Kreise schneiden, dessen Ebene durch den Punkt P und die Schnittkante O der vorausgesetzten Ebenen bestimmt ist.

Diese beiden Oberflächen schneiden sich unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$, und die conjugierte Figur des Kreises, auf dessen Peripherie alle Bildpunkte gelegen sind, ist die Gerade qq_1, welche die Mittelpunkte der beiden Kugeln verbindet.

Das Potential in M' wird sein:

$$V' = - V . \frac{MP}{R} = \frac{e}{R}.$$

Dieses Potential ist constant und es wird demzufolge die transformierte Schichte, welche man auf der Oberfläche des Systemes der beiden Kugeln erhält, im Gleichgewichte sein.

Die Dichte im Punkte M' kann aus jener für den Punkt M mittelst der Relation (289) gerechnet werden; sie ist:

$$\mu' = - \mu \left(\frac{MP}{R}\right)^3 = - \mu \left(\frac{R}{M'P}\right)^3.$$

Da die Oberfläche des durch das Durchdringen der beiden Kugeln gebildeten Meniscus den Theilen OB' und OA' der vorausgesetzten Ebenen entspricht, auf welchen die elektrische Dichte Null herrscht, so ergibt sich hieraus, dass die Dichte auf der Oberfläche des Meniscus ebenfalls Null ist; dies muss sein, da das System der beiden angenommenen leitenden Kugeln im Gleichgewichte ist.

Es ist endlich die Dichte noch Null auf dem Schnittkreise PP' der beiden Kugeln, da dieser Kreis die conjugierte Figur der Schnittkante O der beiden Ebenen ist. Dies ist übrigens nur ein specieller Fall einer viel allgemeineren Regel. Jedesmal, wenn zwei Oberflächen eines Leiters, der unter der influencierenden Wirkung von irgendwelchen Elektricitätsmengen im Gleichgewichte ist, sich unter einem e i n w ä r t s g e h e n d e n Winkel schneiden, ist die Dichte im Schnittpunkte Null. In der That, da die leitende Oberfläche eine

Niveaufläche ist, so muss die elektrische Kraft in der Nachbarschaft dieses Punktes normal zur Niveaufläche und proportional der elektrischen Dichte in diesem Punkte sein. Da die Kraft nicht zwei Richtungen haben kann, muss sie Null sein, weshalb auch die Dichte Null ist.

294. Die Dichte μ' im Punkte M′ stellt sich unter keiner einfachen Form dar, wenn man sie aus der im Punkte M herrschenden Dichte μ rechnet; es wird sich empfehlen, sie in anderer Weise zu rechnen.

Die Elektricitätsschichten der Ebenen AO und BO können durch die elektrischen Bilder Q_1, P_1, Q_2 . . . Q, P_2, Q_2 . . . für die ganze in dem Winkel AOB befindliche Gegend ersetzt werden. Die Elektricitätsschichte der beiden Flächen S_a und S_b übt nach außen dieselbe Wirkung aus, wie die diesen Bildern conjugierten Punkte. Da diese Punkte auf der Centrallinie gelegen sind, so fallen sie mit den Schnittpunkten q_1, p_1, q_2 . . . q, p_2, q_2 . . . dieser Linie und der Geraden, welche den Punkt P mit den verschiedenen Bildpunkten verbinden, zusammen. Man bestimmt diese Punkte leicht, wenn man bemerkt, dass die Winkel $q_1 P q_2$, $p_1 P p_2$. . . durch die Geraden gebildet werden, welche den Punkt P mit zwei aufeinanderfolgenden Bildern von demselben Zeichen verbinden, und deshalb gleich $\frac{\pi}{n}$ sind und dass der Winkel $q_1 P p_1$ gleich θ ist.

Bezeichnet man mit den Buchstaben q_1, p_1, . . . die Elektricitätsmengen dieser verschiedenen Punkte, mit a und b die Radien der beiden Kugeln, mit α_1, α_2 . . . β_2 . . . die Entfernungen des Punktes P von den Punkten p_1, p_2 . . . q_2, so hat man (289)

$$q_1 = e\frac{a}{R} \qquad p_1 = -e\frac{\alpha_1}{R}$$

$$q_2 = e\frac{\beta_2}{R} \qquad p_2 = -e\frac{\alpha_2}{R}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$q = e\frac{b}{R}$$

Die in diesen verschiedenen Punkten befindlichen Elektricitätsmengen sind daher abwechselnd positiv und negativ und ihren Entfernungen vom Punkte P proportional.

Man hat außerdem:

$$PC = PO.\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right),$$

$$PD = PO.\mathrm{Sin}\,\theta$$

und demzufolge:

$$\frac{PD}{PC} = \frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)}.$$

Man hat andererseits wegen der Inversion:

$$PD.2b = PC.2a = R^2,$$

woraus man erhält:

$$\frac{PD}{PC} = \frac{a}{b};$$

daraus resultiert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{Sin}\theta}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)}$$

Es ist also die Lage und die Ladung der verschiedenen Punkte q_1, p_1, . . . vollkommen durch die Radien a und b der beiden Kugeln und durch den Schnittwinkel $\frac{\pi}{n}$ bestimmt.

Man wird schließlich die elektrische Dichte in einem auf der Kugel S_a gelegenen Punkte M′ erhalten, wenn man in diesem Punkte die verschiedenen Elektricitätsschichten superponiert, welche den Punkten q_1, p_1, q_2 . . ., die innerhalb dieser Kugel gelegen sind, äquivalent sind.

Man wird also haben:

für den im Mittelpunkte gelegenen Punkt q_1

$$\frac{e\frac{a}{R}}{4\pi a^2} = \frac{e}{4\pi a R},$$

für den Punkt p_1 (281)

$$\frac{a^2-\overline{p_1q_1}^2}{4\pi a}\cdot\frac{-e\frac{\alpha_1}{R}}{\overline{M'p_1}^3}=-\frac{e}{4\pi a R}\left(a^2-\overline{p_1q_1}^2\right)\frac{\alpha_1}{\overline{M'p_1}^3},$$

u. s. w.; daraus erhält man für die Dichte μ' in M'

$$\mu'=\frac{1}{4\pi a}\cdot\frac{e}{R}\left[1-\left(a^2-\overline{p_1q_1}^2\right)\frac{\alpha_1}{\overline{M'p'}^3}+\left(a^2-\overline{q_2q_1}^2\right)\frac{\beta_2}{\overline{M'q_2}^3}-\ldots\right].$$

In derselben Weise würde man die Dichte in einem Punkte der Kugeloberfläche S_b bestimmen.

295. Die Gesammtladung ist gleich der Summe der Ladungen der verschiedenen inneren Punkte. Diese gesammte Ladung ist daher:

$$\frac{e}{R}\left[a+\beta_2+\ldots+b-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots)\right].$$

Da das Potential gleich $\frac{e}{R}$ ist, so ergibt sich hieraus, dass die Ladung, welche im Stande ist, ein Potential gleich 1 hervorzurufen, d. h. die elektrische Capacität C des Systemes der beiden Kugeln, durch die nachstehende Gleichung gegeben ist:

$$C=a+\beta_2+\ldots+b-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots).$$

Fällt man vom Punkte P auf die Centrallinie ein Perpendikel PI, welches wir mit h bezeichnen wollen, so hat man:

$$h=a\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)=\beta_2\sin\left(2\frac{\pi}{n}-\theta\right)\ldots=b\,\mathrm{Sin}\,\theta=$$

$$=\alpha_1\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{n}=\alpha_2\,\mathrm{Sin}\,2\frac{\pi}{n}=\ldots$$

Man erhält daraus:

$$C=h\left[\frac{1}{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)}+\frac{1}{\mathrm{Sin}\left(2\frac{\pi}{n}-\theta\right)}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\theta}-\right.$$

$$-\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\operatorname{Sin}2\frac{\pi}{n}}+\ldots\right)\Bigg].$$

In dem Falle der Specialfigur, wo $n=3$ ist, hat man:

$$C=b\operatorname{Sin}\theta\left[\frac{1}{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}+\frac{1}{\operatorname{Sin}\theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{3}}\right],$$

wobei der Winkel θ durch die Gleichung:

$$\frac{\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{a}{b}$$

bestimmt ist.

296. Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden. Wenn die beiden Kugeln sich unter einem rechten Winkel schneiden, so reducieren sich die zwischen den beiden Mittelpunkten liegenden Bilder auf ein einziges, welches im Fußpunkte C (Fig. 122) des von P auf die Centrallinie gefällten Perpendikels gelegen ist. Die Dichte in einem Punkte M ist dann:

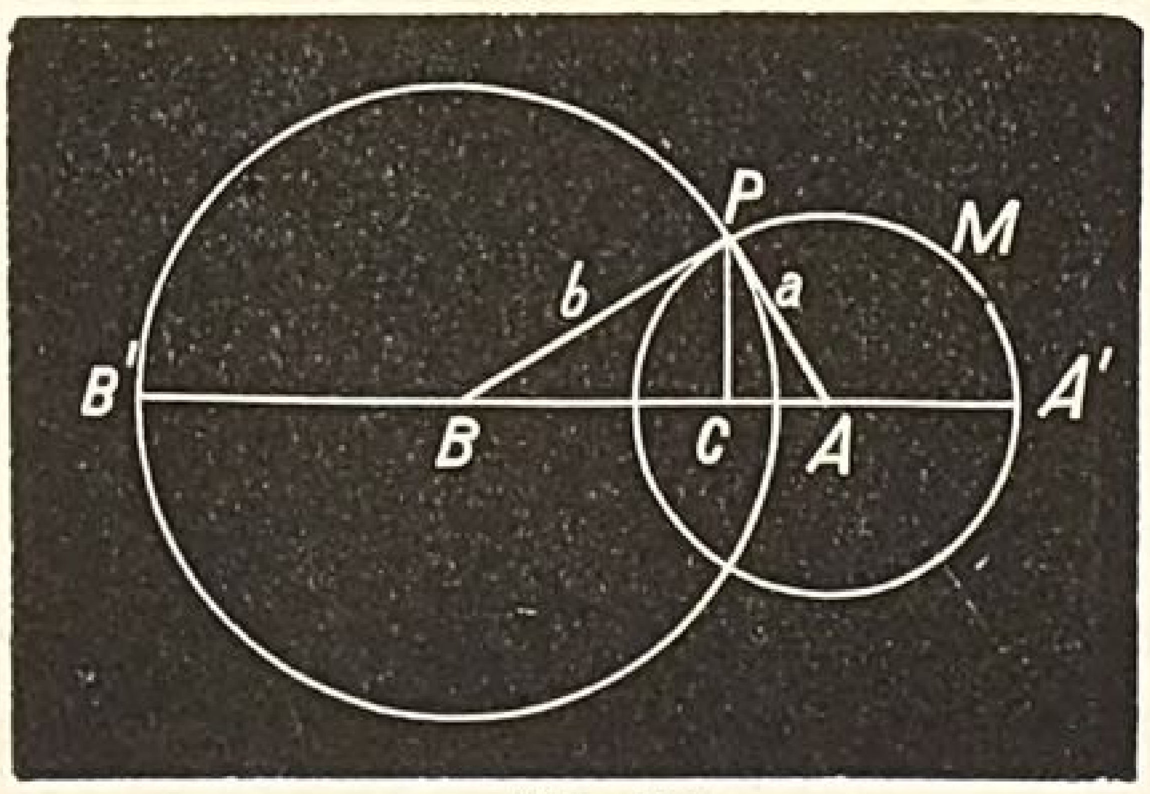


Fig. 122.

$$\mu=\frac{1}{4\pi a}\mathrm{V}\left[1-(a^2-\overline{\mathrm{AC}}^2)\frac{\mathrm{PC}}{\overline{\mathrm{MC}}}\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{V}}{4\pi a}\left[1-\left(\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{MC}}\right)^3\right].$$

In diesem Falle hat man für die Länge PC den Wert

$$\mathrm{PC}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Die elektrische Capacität ist sodann:

$$a + b - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Da die Punkte C und B bezüglich der Kugel vom Radius A conjugiert sind, so hat man:

$$\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}},$$

woraus man erhält:

$$\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{MB}} = \frac{b}{\mathrm{MB}}.$$

Substituiert man diesen Wert in dem Ausdrucke für die Dichte, so erhält man:

$$\mu = \frac{\mathrm{V}}{4\pi a}\left[1 - \left(\frac{b}{\mathrm{MB}}\right)^3\right].$$

Die Dichten an den beiden Enden des gemeinschaftlichen Durchmessers A'B' sind durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$\mu_{\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{V}}{4\pi a}\left[1 - \left(\frac{b}{\mathrm{A'B}}\right)^3\right],$$

$$\mu_{\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{V}}{4\pi b}\left[1 - \left(\frac{a}{\mathrm{B'A}}\right)^3\right].$$

Ist die Kugel vom Radius a sehr klein im Verhältnisse zur anderen, so wird man näherungsweise haben:

$$\mu_{\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{V}}{4\pi b}$$

und

$$\mu_{\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{V}}{4\pi a}\left[1 - \left(\frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right)^3\right] = \frac{\mathrm{V}}{4\pi a} \cdot \frac{3\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$$

$$= 3\,\frac{\mathrm{V}}{4\pi b} = 3\mu_{\mathrm{B}'}.$$

Die Dichte am Ende der kleinen Kugel ist daher die dreifache der Dichte am Ende der großen Kugel.

297. Diese Resultate können übrigens direct erhalten werden. Wenn man in die drei Punkte A, C und B, welche auf derselben Geraden gelegen sind, die Elektricitätsmengen a, $\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und b gibt, so ist das Potential in irgendeinem Punkte M

$$V = \frac{a}{MA} - \frac{ab}{MC\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{MB},$$

und die Oberfläche, für welche das Potential Null ist, ist gegeben durch die Gleichung:

$$0 = \frac{a}{MA} - \frac{ab}{MC\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{MB}.$$

Man wird leicht erkennen, dass diese Oberfläche aus zwei Kugeln gebildet ist, deren Centren in A und B sind und welche sich in einer Ebene schneiden, die durch den Punkt C geht.

298. Man kann auch die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln bestimmen, die nicht isoliert sind und sich unter einem rechten Winkel schneiden, wenn auf sie ein äußerer elektrisierter Punkt Q influencierend einwirkt.

Denn betrachten wir das den beiden vorhergehenden Kugeln mit den Radien a und b bezüglich einer Kugel mit dem Radius gleich Eins, welche ihren Mittelpunkt in irgendeinem Punkte Q hat, conjugierte System. Dieses conjugierte System wird wieder aus zwei Kugeln mit den Radien a' und b' gebildet, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden und deren Mittelpunkte auf den Geraden QA und QB gelegen sind.

Ist das Potential auf dem ersten Systeme AB gleich 1, so wird das Potential im Punkte M' des neuen Systemes gleich $-\frac{1}{QM'}$ (287) sein, so dass, wenn man in den Punkt Q eine Elektricitätsmenge gleich Eins setzt, das Potential auf der ganzen Oberfläche des neuen Systemes und im Innern dieser Oberfläche Null sein wird. Die Dichte in jedem Punkte wird

sich leicht aus jener Dichte ergeben, die im correspondierenden Punkte des ersten Systemes herrscht.

Ich wollte diese Lösung nur andeuten, ohne sie zu entwickeln; für analoge Probleme verweise ich den Leser auf die Abhandlungen von Thomson und auf das Werk von Maxwell, in welchem die Frage mit mehr Details behandelt wurde. Ich beschränke mich auf die Betrachtung der einfachsten Fälle, welche sich bei experimentellen Bestätigungen darbieten können.

299. Influenzwirkung eines elektrisierten Punktes auf zwei sphärische concentrische Oberflächen. Wenn ein Raum von zwei sphärischen Oberflächen begrenzt ist, welche sich nicht schneiden, so sind die aufeinanderfolgenden Bilder eines Punktes, welcher in diesem Raume gelegen ist, auswärts gelegen und bilden zwei unbegrenzte Reihen, auf welche die Methode der elektrischen Bilder anwendbar ist.

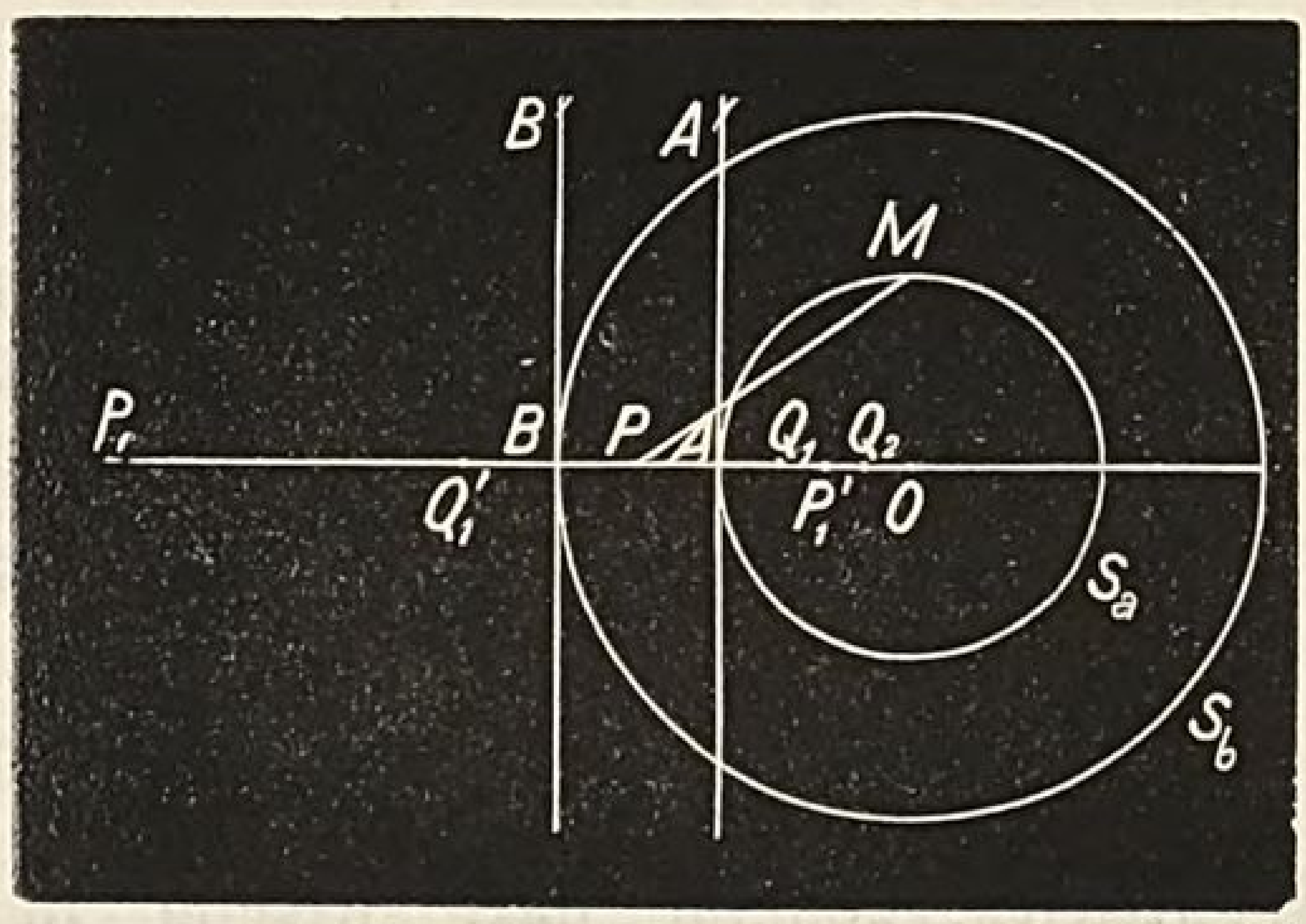


Fig. 123.

Andererseits kann man bei passender Wahl des Inversionscentrums, den Fall zweier Kugeln, welche sich nicht schneiden, auf den Fall zweier concentrischen Kugeln zurückführen; es ist daher nützlich mit diesem letzten Falle zu beginnen.(1)

Seien S_a und S_b (Fig. 123) zwei concentrische Kugelflächen, a und ae^{ϖ} die beiden Radien, wobei e die Basis der Neper'schen Logarithmen bezeichnet; P sei ein influencieren-

(1) Zwei Punkte werden bezüglich zweier Kugeln invers genannt, wenn sie Bilder von einander in den bezüglichen Kugeln sind. Es lässt sich leicht zeigen (Maxwell, deutsche Übersetzung pg. 261), dass die Bilder zweier sich nicht schneidenden Kugeln in Bezug auf einen der beiden inversen Punkte concentrische Kugeln sind. Würden also die vorausgesetzten Kugeln nicht concentrisch sein, so könnte man sie durch Inversion bezüglich einer ihrer inversen Punkte concentrisch machen.

der Punkt, und ae^u seine Entfernung vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte O.

Es sei Q_1 das Bild des Punktes P in der ersten Kugel S_a, P_1 jenes von Q_1 in der zweiten Kugel S_b, Q_2 das Bild von P_1 in der ersten Kugel und so weiter; dann wird man haben:

$$\begin{aligned} PO &= ae^u \\ PO.Q_1O &= a^2 \\ P_1O.Q_1O &= a^2e^{2\overline{\omega}} \\ &\vdots \\ P_{n-1}O.Q_nO &= a^2 \\ P_nO.Q_nO &= a^2e^{2\overline{\omega}} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man:

$$\begin{aligned} OP &= ae^u \\ OQ_1 &= ae^{-u} \\ OP_1 &= ae^{u+2\overline{\omega}} \\ OQ_2 &= ae^{-(u+2\overline{\omega})} \\ &\vdots \\ OP_n &= ae^{u+2n\overline{\omega}} \\ OQ_{n+1} &= ae^{-(u+2n\overline{\omega})} \end{aligned}$$

Stellt man durch die Buchstaben $P, P_1, P_2 \ldots Q_1, Q_2 \ldots$ die Elektricitätsmengen dar, welche in diesen verschiedenen Punkten sich befinden, so wird man haben (279)

$$Q_1 = -P\frac{a}{OP} = -Pe^{-u}$$

$$P_1 = -Q_1\frac{ae^{\overline{\omega}}}{OQ_1} = Pe^{-u}\frac{ae^{\overline{\omega}}}{ae^{-u}} = Pe^{\overline{\omega}}$$

$$Q_2 = -P_1\frac{a}{OP_1} = -Pe^{\overline{\omega}}\frac{a}{ae^{u+2\overline{\omega}}} = -Pe^{-(u+\overline{\omega})}$$

und man wird in dieser Weise successiv erhalten:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Pe^{-u} & P_1 &= Pe^{\overline{\omega}} \\ Q_2 &= -Pe^{-(u+\overline{\omega})} & P_2 &= Pe^{2\overline{\omega}} \\ &\vdots & &\vdots \\ Q_{n+1} &= -Pe^{-(u+n\overline{\omega})} & P_n &= Pe^{n\overline{\omega}} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun mit Q_1' das Bild des Punktes P in der zweiten Kugel, mit P_1' das Bild von Q_1' in der ersten, mit Q_2' jenes von P_1' in der zweiten u. s. w., so wird man in derselben Weise haben:

$$
\begin{aligned}
OP'_n &= a e^{u-2n\bar{\omega}}, \\
OQ'_n &= a e^{2n\bar{\omega}-u}, \\
P'_n &= P e^{-n\bar{\omega}}, \\
Q'_n &= -\, P e^{n\bar{\omega}-u}.
\end{aligned}
$$

Alle die positiven Bilder P'_n und die negativen Bilder Q_n sind im Innern der ersten Fläche S_a eingeschlossen; die Bilder P_n und Q'_n sind außerhalb der zweiten Oberfläche S_b gelegen.

300. Alle Bilder wie P'_n bilden eine geometrische fallende Reihe, deren erstes Glied $Pe^{-\bar{\omega}}$ und deren Exponent $e^{-\bar{\omega}}$ ist; ihre Summe ist

$$\sum P'_n = Pe^{-\bar{\omega}} \frac{1}{1-e^{-\bar{\omega}}} = \frac{P}{e^{\bar{\omega}}-1}.$$

Ebenso bilden die Bilder Q_n eine geometrische fallende Reihe, deren Summe ist:

$$\sum Q_n = -\, Pe^{-u} \frac{1}{1-e^{-\bar{\omega}}} = -\, Pe^{-u} \frac{e^{\bar{\omega}}}{e^{\bar{\omega}}-1}.$$

Die gesammte, im Inneren der kleinen Kugel S_a enthaltene Elektricitätsmenge ist daher:

$$M_A = \sum P'_n + \sum Q_n = P \frac{1}{e^{\bar{\omega}}-1} - Pe^{-u} \frac{e^{\bar{\omega}}}{e^{\bar{\omega}}-1} = -\frac{Pe^{\bar{\omega}-u}-1}{e^{\bar{\omega}}-1};$$

was die außerhalb der Kugeloberfläche S_a liegenden Punkte anbelangt, kann man alle diese Bilder ersetzen durch eine Elektricitätsschichte, deren elektrische Masse gleich ihrer Summe ist, und welche nach einem passenden Gesetze auf der Oberfläche S_a ausgebreitet ist.

Die Bilder P_n und Q'_n geben divergente Reihen und ihre Summe ist auch divergent; da aber das System des Punktes P und aller seiner Bilder ein Potential Null im Inneren der Kugel S_a und außerhalb der Kugel S_b gibt, so kann man das System der Bilder P_n und Q'_n durch eine auf der Ober-

fläche S_b ausgebreitete Elektricitätsschichte ersetzen, welche gleich und vom entgegengesetzten Zeichen ist mit der Summe der Elektricitätsmengen, welche diese Fläche einschließt (185). Die Ladung der Oberfläche S_b wird daher sein:

$$M_B = P\frac{e^{\bar{\omega}-u}-1}{e^{\bar{\omega}}-1} - P = P\frac{e^{\bar{\omega}-u}-e^{\bar{\omega}}}{e^{\bar{\omega}}-1} = -Pe^{\bar{\omega}}\frac{1-e^{-u}}{e^{\bar{\omega}}-1}.$$

Man kann diese Ladungen als Function der Radien der beiden Kugeln und der Entfernungen PA und PB ausdrücken; man hat nämlich:

$$M_A = -P\frac{\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OA}{OP}-1}{\frac{OB}{OA}-1} = -P\frac{OB-OP}{OB-OA}\cdot\frac{OA}{OP} =$$

$$= -P\frac{OA}{OP}\cdot\frac{PB}{AB},$$

$$M_B = -P\frac{OB}{OA}\cdot\frac{1-\frac{OA}{OP}}{\frac{OB}{OA}-1} = -P\frac{OP-OA}{OB-OA}\cdot\frac{OB}{OP} =$$

$$= -P\frac{OB}{OP}\cdot\frac{PA}{AB}.$$

301. Setzen wir voraus, dass die Radien der beiden Kugeln unendlich groß werden, dann werden die Kugeloberflächen ersetzt durch zwei parallele Ebenen AA′ und BB′, welche durch die Punkte A und B gehen und lothrecht zur Geraden AB stehen. Die auf diesen beiden Ebenen befindlichen Elektricitätsmengen werden sein:

$$M_A = -P.\frac{PB}{AB},$$

$$M_B = -P.\frac{PA}{AB}.$$

Diese beiden Elektricitätsmengen stehen daher im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen des influencierenden Punktes P von den beiden Ebenen; ihre Summe ist gleich

und entgegengesetzt der im Punkte P vorhandenen Elektricitätsmenge.

302. Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln, welche ausserhalb einander liegen. Um nun auf den Fall zweier Kugeln, welche außerhalb einander liegen, überzugehen, genügt es, das System der beiden vorhergehenden sphärischen Flächen bezüglich einer Inversionskugel zu transformieren, die ihr Centrum im Punkte P hat und deren Radius gleich der Einheit ist. Die Flächen S_a und S_b werden dann ersetzt durch die beiden Kugelflächen S_a' und S_b', welche außerhalb einander liegen. Das Potential der beiden Elektricitätsschichten M_A und M_B ist in einem Punkte M der einen der Oberflächen gleich $-\frac{P}{MP}$; das Potential im Punkte M', welcher dem Punkte M conjugiert ist, wird sein (287)

$$+\frac{P}{MP}\times\frac{MP}{1}=+P.$$

Das Potential wird daher constant sein und demzufolge werden die auf S_a' und S_b' erhaltenen Elektricitätsschichten sich im Gleichgewichte befinden.

303. Thomson[1] hat in vollständiger Weise den Fall der beiden leitenden außer einander liegenden Kugeln behandelt, indem er direct die Methode von Murphy in Anwendung bringt und die Eigenschaften der elektrischen Bilder benützt. Die Entwicklung der diesbezüglichen Rechnungen wurde bereits früher angezeigt; da aber die Untersuchung vom Belange ist, wollen wir noch die von Thomson veröffentlichen Tafeln wiederbringen.

Die Abstoßung F, welche sich zwischen den beiden leitenden Kugeln äußert, deren Potentiale gleich u und v sind, wird durch folgende Formel ausgedrückt:

$$F=2Buv-Au^2-A'v^2.$$

Die Elektricitätsmengen D und E, welche auf den Kugeln, deren Potentiale u und v sind, ausgebreitet sind, sind durch Gleichungen von der Form:

(1) Reprint of papers, p. 96 und 97.

$$D = Iu - Jv,$$
$$E = I'v - Ju$$

ausgedrückt. Wenn die beiden Kugeln gleiche Radien haben, so sind die Coefficienten A und A' einander gleich, ebenso auch die Coefficienten I und I'. Bezeichnet man mit r den Radius dieser Kugeln, so hat man dann:

$$F = 2Buv - A(u^2 + v^2),$$
$$D = (Iu - Jv)r,$$
$$E = (Iv - Ju)r.$$

Sollen die Kugeln nicht aufeinander wirken, so müssen die Potentiale u und v der Gleichung:

$$u^2 + v^2 - 2\frac{B}{A}uv = 0$$

genügen, woraus man erhält:

$$\frac{u}{v} = \rho = \frac{B}{A} - \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - 1}.$$

Die folgende Tafel gibt nach Thomson[1] die Werte der Coefficienten I, J, A, B und ρ für den Fall an, in welchem die Entfernung der Mittelpunkte cr ist, wobei c von 2, was der Berührung der Kugeln entspricht, bis 4 variiert.

[1] Reprint of papers, p. 96 und 97.

c	I	J	A	B	ρ
2·0	J + 0·693147	∞	∞	$A + \frac{1}{2}$ 0·073858	$1 - \sqrt{\frac{0{\cdot}073858}{A}}$
2·1	1·58396	0·88175	1·13844	1·17439	0·77828
2·2	1·43131	0·72378	0·52852	0·56350	0·69637
2·3	1·34827	0.63395	0·32917	0·36357	0·63553
2·4	1·29316	0·57202	0·23159	0·26464	0·58975
2·5	1·25324	0·52537	0·17432	0·20630	0·55888
2·6	1·22218	0·48819	0·13696	0·16787	0·51699
2·7	1·19755	0·45746	0·11082	0·14090	0·47805
2·8	1·17738	0·43140	0·09174	0·12073	0·46049
2·9	1·16056	0·40886	0·07720	0·10526	0·43667
3·0	1·14629	0·38908	0·06592	0·09299	0·41567
3·1	1·13404	0·37151	0·05693	0·08304	0·39672
3·2	1·12340	0·35571	0·04963	0·07481	0·37947
3·3	1·11410	0·34150	0·04363	0·06791	0·36376
3·4	1·10588	0·32852	0·03863	0·06203	0·34939
3·5	1·09859	0·31663	0·03441	0·05697	0·33615
3·6	1·09208	0·30569	0·03084	0·05257	0·32418
3·7	1·08623	0·29557	0·02755	0·04872	0·31263
3·8	1·08095	0·28617	0·02509	0·04531	0·30211
3·9	1·07617	0·27742	0·02278	0·04229	0·29233
4·0	1·07182	0·26924	0·02075	0·03958	0·28318

Die Coefficienten werden unendlich, wenn die beiden Kugeln in Berührung sind, die Differenz der Coefficienten aber — und nur diese kommt in dem Ausdrucke für die Kraft und die Elektricitätsmenge vor — behält, da die Potentiale u und v dann nothwendigerweise gleich sind, einen endlichen Wert. Wir werden überdies diesen Fall direct behandeln.

304. Anstatt die Potentiale u und v der beiden Kugeln zu kennen, kann man deren elektrische Ladungen D und E geben und sich die Aufgabe stellen, daraus die Werte der Potentiale und der elektrischen Kraft zu bestimmen. Wenn man die vorhergehenden Gleichungen bezüglich dieser Größen auflöst, so erhält man:

$$u = \left(\frac{I}{I^2 - J^2} D + \frac{J}{I^2 - J^2} E\right)\frac{1}{r},$$

$$v = \left(\frac{I}{I^2 - J^2} E + \frac{J}{I^2 - J^2} D\right)\frac{1}{r},$$

$$F=[2\beta DE-\alpha(D^2+E^2)]\frac{1}{r^2},$$

indem man setzt:

$$\alpha=\frac{A(I^2+J^2)-2BIJ}{(I^2-J^2)^2}$$

$$\beta=\frac{B(I^2+J^2)-2AIJ}{(I^2-J^2)^2}.$$

Soll die Wirkung Null sein, so muss das Verhältnis der Ladungen der Gleichung genügen:

$$2\beta DE-\alpha(D^2+E^2)=0,$$

aus welcher sich ergibt:

$$\frac{D}{E}=\frac{\beta}{\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2}-1}=\frac{I\rho-J}{I-J\rho}=\theta.$$

Die folgende Tabelle gibt die Werte der Coefficienten der verschiedenen Formeln an:

c	$\frac{I}{I^2-J^2}$	$\frac{J}{I^2-J^2}$	α	β	θ
2·0	$\frac{1}{2}\frac{1}{0{\cdot}693147}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{0{\cdot}693147}$	∞	$\alpha+\frac{1}{2}0{\cdot}153726$	$1-\sqrt{\frac{0{\cdot}153726}{\alpha}}$
2·1	0·91482	0·50926	0·15375	0·22668	0·39102
2·2	0·93869	0·47476	0·08263	0·15251	0·29435
2·3	0·95220	0·44782	0·05444	0·12186	0·23580
2·4	0·96142	0·42528	0·03955	0·10309	0·19944
2·5	0·96829	0·40599	0·02997	0·09038	0·16908
2·6	0·97354	0·38888	0·02342	0·08078	0·14476
2·7	0·97771	0·37348	0·01849	0·07341	0·12786
2·8	0·98105	0·35946	0·01500	0·06710	0·11318
2·9	0·98376	0·34658	0·01222	0·06186	0·09971
3·0	0·98598	0·33467	0·01010	0·05731	0·08877
3·1	0·98782	0·32361	0·00842	0·05333	0·07944
3·2	0·98934	0·31327	0·00708	0·04981	0·07139
3·3	0·99067	0·30366	0·00599	0·04666	0·06442
3·4	0·99178	0·29462	0·00510	0·04382	0·05839
3·5	0·99272	0·28612	0·00437	0·04126	0·05298
3·6	0·99351	0·27810	0·00378	0·03891	0·04868
3·7	0·99423	0·27054	0·00326	0·03679	0·04349
3·8	0·99484	0·26338	0·00283	0·03484	0·04061
3·9	0·99537	0·25659	0·00247	0·03305	0·03736
4·0	0·99583	0·25015	0·00216	0·03139	0·03444

Diese Tafeln sind dann belangreich, wenn man in den Messapparaten leitende Kugeln anwendet.

305. Wenn die Ladungen der beiden gleich vorausgesetzten Kugeln dieselben sind, so erhält man

$$D = E = rv\,(I - J),$$
$$F = 2\,(B - A)\,v^2,$$
$$rv = \frac{D}{I - J},$$
$$r^2 F = 2\,(\beta - \alpha)\,D^2.$$

Da diese Formeln nur bis $c = 4$ gerechnet wurden, ist es nützlich zu sehen, wie man sie für größere Entfernungen ersetzen kann.(¹)

Nehmen wir an, dass die Wirkung der beiden Kugeln ebenso sei, als ob ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären und dass das Potential einer jeden von ihnen demjenigen gleich wäre, welches man für den Mittelpunkt erhalten würde, wobei man die benachbarte Kugel durch eine gleiche, im Mittelpunkte gelegene Masse ersetzt, dann wird man bei verschiedenen Ladungen die Formeln

$$u = \frac{D}{r} + \frac{E}{cr},$$
$$v = \frac{E}{r} + \frac{D}{cr},$$
$$F = \frac{DE}{c^2 r^2} = \frac{c^2 - 1}{(c^2 + 1)^2}\,uv - \frac{c}{(c^2 - 1)^2}\,(u^2 + v^2)$$

erhalten. Sind die Ladungen gleich, so ist:

$$rv = D\,\frac{c + 1}{c},$$
$$r^2 F = \frac{D^2}{c^2},$$
$$F = \frac{v^2}{(c + 1)^2}.$$

Macht man $c = 4$, so liefern die oben angegebenen Tafeln von W. Thomson

(¹) Mascart und Joubert l. c. pg. 190.

$$I - J = 0{\cdot}80258,$$
$$2(\beta - \alpha) = 0{\cdot}05846,$$
$$2(B - A) = 0{\cdot}03766.$$

Die entsprechenden Werte in den Näherungsformeln sind:

$$\frac{c}{c+1} = \frac{4}{5} = 0{\cdot}80,$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{16} = 0{\cdot}0625,$$

$$\frac{1}{(c+1)^2} = \frac{1}{25} = 0{\cdot}04.$$

Wenn also die Entfernung der Oberflächen gleich dem Durchmesser der einen der Kugeln ist und die Ladungen gleich sind, so liefern die Näherungsformeln die Potentiale als Functionen der Elektricitätsmengen, den Wert der Kraft als Function derselben Größe und die Kraft als Function der Potentiale mit einem Grade der Annäherung, welcher für diese verschiedenen Größen bezüglich $\frac{1}{300}$, $\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{17}$ ist. Da die entsprechenden Fehler schon $\frac{1}{12}$ erreichen, wenn $c = 3{\cdot}8$ ist, so ersieht man, dass sie sich sehr schnell für größere Entfernungen verringern würden.

Man kann daher die von Coulomb in Anwendung gebrachte Methode zur Bestimmung der Wirkung zweier Elektricitätsmengen als vollkommen strenge betrachten.

Bei der Messung der Potentiale mit Zuhilfenahme der genäherten Formeln wird die Torsionswage von Coulomb sehr genaue Resultate liefern, wenn man nur Sorge trägt, dass die Entfernung der Kugeloberflächen merklich den Durchmesser der einen von ihnen überschreitet.

306. Vertheilung der Elektricität auf zwei im Contacte befindlichen Kugeln. Wir werden die Vertheilung der Elektricität auf zwei in Berührung stehenden Kugeln erhalten, wenn man das System zweier Ebenen bezüglich einer Inversionskugel transformiert, welche einen Radius gleich der Einheit hat und deren Mittelpunkt in einem Punkte P befindlich ist (Fig. 124). Betrachtet man einen Punkt P, geladen mit einer

Elektricitätsmenge gleich der Einheit, so ist das Potential in einem Punkte M, welches von den Elektricitätsschichten herrührt, die durch Influenz auf den Ebenen erzeugt wurden, gleich $-\frac{1}{\text{MP}}$ und das Potential des neuen Systemes wird gleich Eins sein.

Dieses transformierte System setzt sich aus zwei Kugelflächen S_a und S_b zusammen, die sich im Punkte P tangieren. Die

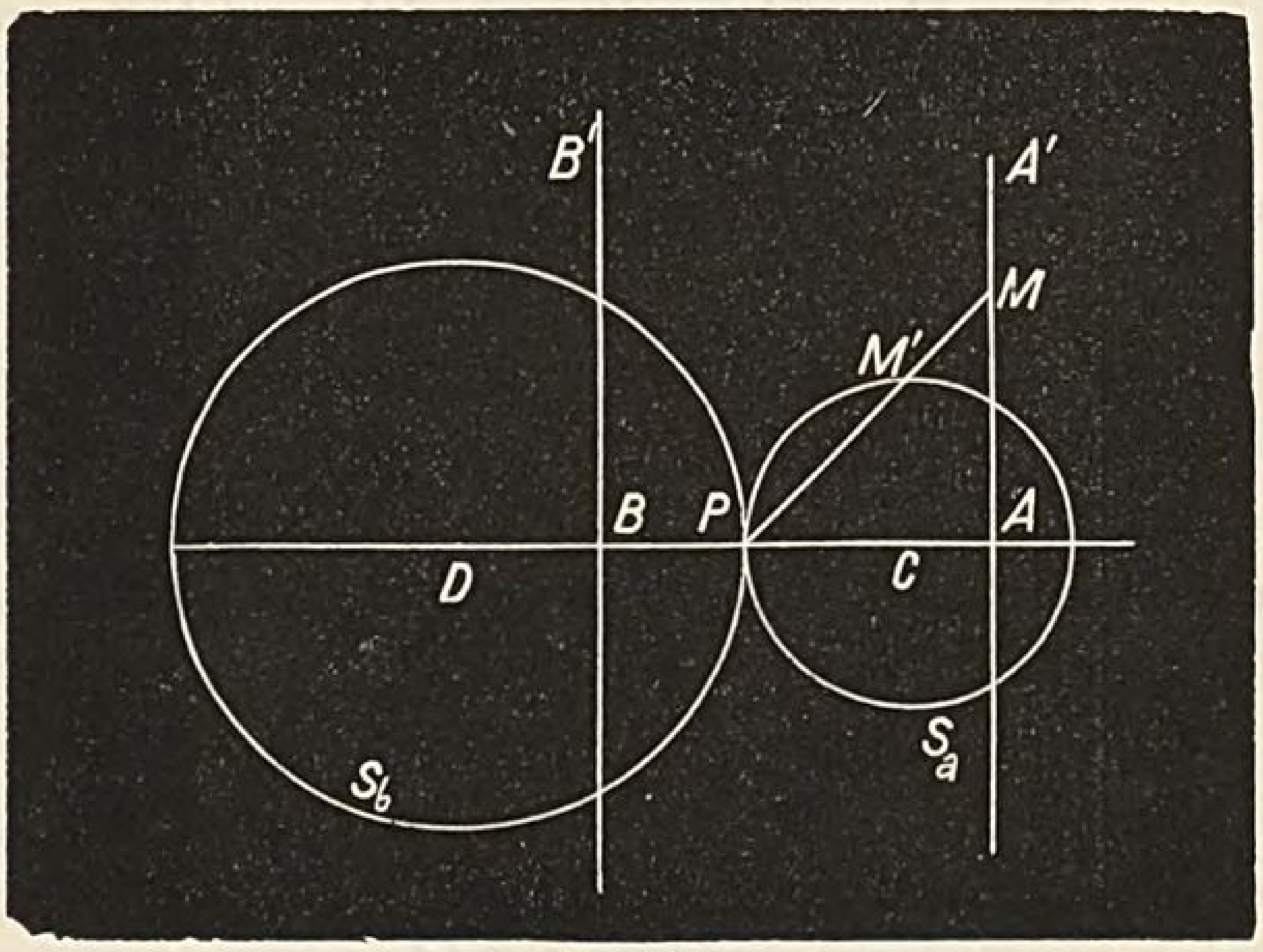


Fig. 124.

Radien *a* und *b* dieser beiden Kugeln sind durch die Gleichungen gegeben:

$$2a.\text{PA} = 2b.\text{PB} = 1,$$

woraus man schließt, dass

$$\text{PA} = \frac{1}{2a} \text{ und } \text{PB} = \frac{1}{2b} \text{ ist.}$$

Eine Elektricitätsmenge gleich der Einheit in den Punkt P gebracht ruft rechts von der Ebene AA' eine Reihe von negativen Bildern hervor, deren Ladungen gleich -1 sind und deren Entfernungen vom Punkte P successive sind:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \frac{1}{a} + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ldots \frac{1}{a} + n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

und eine Reihe von positiven Bildern gleich $+1$, welche in den Entfernungen

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ldots n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

gelegen sind.

Durch Inversion wird man im Inneren der Kugel S_a eine Reihe von negativen Bildern erhalten, deren Entfernungen vom Punkt P sein werden

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \frac{1}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}, \ldots \frac{1}{n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)},$$

und eine Reihe von positiven Bildern in den Distanzen:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}}, \frac{1}{\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}, \ldots \frac{1}{\frac{1}{a}+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Für die Ladungen der negativen Bilder hat man den allgemeinen Ausdruck

$$-\frac{1}{n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)},$$

und für die Ladungen der positiven Bilder

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Die Gesammtladung der Kugel S_a ist daher:

$$M_a = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\frac{1}{a}+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}.$$

Jedes der beiden Bildersysteme bildet eine divergente Reihe, aber die Summe ist convergent. Denn man hat:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} - \frac{1}{n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} = \frac{a^2 b}{n(a+b)[n(a+b)-a]},$$

woraus man erhält:

$$M_a = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^2 b}{n(a+b)\,[n(a+b)-a]}.$$

In derselben Weise wird man für die Ladung der Kugel S_b finden:

$$M_b = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a b^2}{n(a+b)\,[n(a+b)-b]}.$$

307. Sind die beiden Kugeln einander gleich, so hat man dann:

$$M_a = M_b = a \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = a\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots\right)$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = a \log. 2.$$

Die Ladung, welche dem Systeme der beiden gleichen in Berührung stehenden Kugeln ein Potential gleich Eins gibt, d. h. die elektrische Capacität dieser beiden Kugeln, ist somit:

$$C = 2a \log. 2 = 1{\cdot}3863\, a.$$

Ist die eine der Kugeln S_a sehr klein im Verhältnis zur anderen, so hat man näherungsweise:

$$M_a = \frac{a^2}{b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{a^2}{b}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right] = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Andererseits ist die Ladung der großen Kugel S_b nahezu dieselbe, als wenn die kleine nicht vorhanden wäre, d. h. $M_b = b$, und die mittlere Dichte $\mu_b = \frac{M_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b}$. Die mittlere Dichte auf der kleinen Kugel ist $\mu_a = \frac{M_a}{4\pi a^2}$.

Hieraus folgt:

$$\frac{\mu_a}{\mu_b} = \frac{M_a b^2}{M_b a^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{\cdot}644936.$$

Diese Resultate wurden von Poisson aus seiner allgemeinen Rechnung über den gegenseitigen Einfluss zweier leitenden

Kugeln abgeleitet, und wir haben sie schon früher gelegentlich der Berechnung der gegenseitigen Influenz zweier Kugeln nach der Methode von Murphy angegeben.

308. Mittelst der Methode der elektrischen Inversion hat Thomson (l. c. pg. 182) eingehend das Problem der Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte behandelt. Letztere entsteht nämlich durch Abbildung einer kreisförmigen Scheibe bezüglich der Abbildungskugel. Die Kugelcalotte, welche auf diese Weise erzeugt wird, bildet einen Theil einer sphärischen Fläche, welche durch das Inversionscentrum hindurchgeht.

Thomson geht bei der Lösung des Problems von dem verhältnismäßig leicht zu erledigenden Falle aus, dass die Kugelcalotte von einem elektrischen Punkte influenciert wird, der auf einer Kugelfläche liegt, die als Fortsetzung der Kugelcalotte zu betrachten ist; der Ausdruck, den er für die Dichte der Elektricität auf der Kugelcalotte erhält, ist unabhängig von dem Radius der Kugelcalotte, er ist also auch für eine ebene Scheibe giltig. — Sind mehrere elektrische Punkte auf jener Fläche vorhanden, zu der die Kugelcalotte gehört, so ist dieser Fall auf den ersteren zurückführbar. — Im weiteren Verlaufe untersucht Thomson die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte, die bis zu einem bestimmten Potential geladen und von keinem fremden elektrischen Punkte influenciert wird. — Ausgehend von dem Bilde einer Calotte, welches wieder eine Calotte ist, findet Thomson schießlich die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte, welche unter der influencierenden Wirkung eines beliebig gelegenen elektrischen Punktes steht. Bezüglich dieser Rechnungen sei der Leser auf das Werk von Thomson([1]) verwiesen.

([1]) Thomson hat die Resultate seiner diesbezüglichen Rechnungen Liouville ohne näheres Detail mitgetheilt und dieser veröffentlichte sie in seinem Journal de Mathématiques (1847). — Erst in seinem Reprint of papers gab Thomson die nöthigen Entwickelungen an.

Vergleichung der Phänomene der statischen Elektricität mit denen der Wärmeleitung.

309. Die Gleichungen, welche die Vertheilung der Potentiale in einem isolierenden Medium, in welchem sich elektrisierte Körper befinden, darstellen, sind mit jenen identisch, welchen man in der Theorie der Wärmefortpflanzung durch Leitung begegnet. Daraus folgen zwischen den beiden Arten der Erscheinungen eine gewisse Anzahl von Beziehungen, welche dazu dienen können, leicht Elektricitätsprobleme zu lösen, wenn die Lösung für die entsprechenden Phänomene der Wärmefortpflanzung in einfacherer Weise gelingt oder umgekehrt.

Dennoch schließt die Identität der Gleichungen nicht die Identität der Ursachen ein; es folgt nur aus dieser Thatsache, welche rein zufällig sein kann, dass die Grundgleichungen in den beiden Fällen dieselben sind. So erscheint es als gut bewiesen, dass die Wärme kein Fluidum ist, es ist aber nicht gestattet denselben Schluss für die Elektricität auszusprechen, obwohl die beiden Gruppen von Erscheinungen Anlass zu identischen Gesetzen geben.

310. Principien der Theorie von Fourier. Die Theorie der Fortpflanzung der Wärme durch Leitung, wie sie von Fourier[1] aufgestellt wurde, ist auf Principien gegründet, die man direct aus dem Versuche resultierend betrachten kann. Da die Mittheilung der Wärme sich allmählig vollzieht, so nimmt man an, dass der Wärmezustand eines Punktes merklichen Einfluss nur auf die sehr benachbarten Punkte hat, und dass die wärmeren Punkte die Temperatur der kälteren Punkte zu erhöhen streben. Irgendein Volumelement sendet während der Zeiteinheit einem anderen auf niedrigerer Temperatur befindlichen Elemente eine gewisse Wärmemenge zu, welche von der Temperaturdifferenz und der Entfernung der beiden Elemente abhängt.

(1) Théorie analytique de la chaleur.

Wenn diese Entfernungen immer sehr klein sind, so sind die Temperaturdifferenzen ebenfalls sehr klein und man kann annehmen, dass die so mitgetheilte Wärmemenge proportional der Temperaturdifferenz ist.

Der entsprechende Proportionalitätsfactor hängt von der Natur des Mediums und im allgemeinen von der im Innern dieses Mediums ins Auge gefassten Richtung ab. Diese verschiedenen Richtungen sind nämlich nicht physikalisch identisch; man denke nur z. B. an krystallisierte Körper; in den sogenannten isotropen Medien aber, d. h. in den nichtkrystallisierten Körpern, oder jenen, welche dem cubischen Systeme angehören, geschieht die Wärmefortpflanzung in allen Richtungen in derselben Weise.

311. Betrachten wir daher ein unbegrenztes isotropes, wärmeleitendes Medium und nehmen wir an, dass in demselben eine Anzahl von constanten Wärmequellen sich befinde, d. h. Punkte oder Körper von endlichen Dimensionen, die auf constante Temperaturen gebracht sind. Es wird sich im Innern dieses Mediums ein Wärmeaustausch in den verschiedenen Richtungen vollziehen; wenn der permanente Zustand hergestellt ist, wird jedes Element während einer gewissen Zeit ebensoviel Wärme erhalten, als es abgibt und die Temperatur wird in allen Punkten stationär sein.

Nehmen wir drei rechtwinklige Axen und betrachten ein Oberflächenelement AB (Fig. 125) senkrecht zur Z-Axe. Die durch diese Oberfläche hindurchgehende Wärmemenge ist die Summe aller jener, welche alle Punkte, die wie m unter dieser Oberfläche liegen, jenen Punkten mittheilen, die wie m' oberhalb gelegen sind. Die Wärmemenge, welche vom Punkte m zum Punkte m' in der Zeiteinheit übergeht, ist ausgedrückt durch:

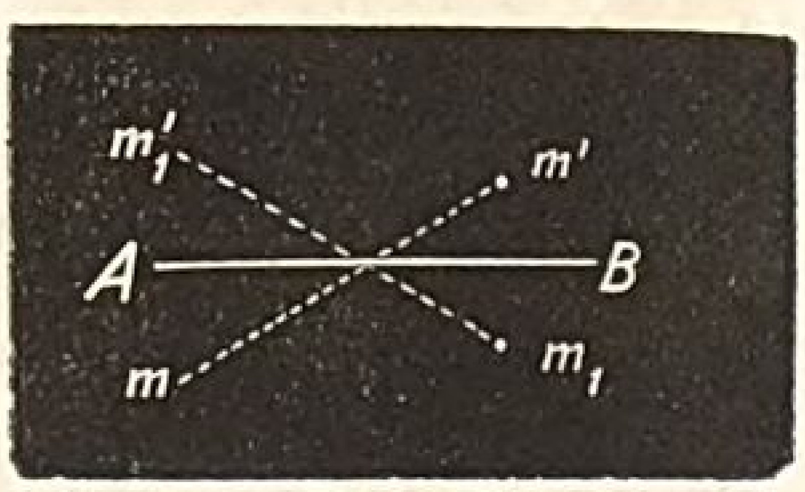


Fig 125.

$$K\varphi(r)\delta t,$$

wobei K eine Constante, δt die Temperaturdifferenz und $\varphi(r)$ eine Function der Entfernung r der beiden Punkte ist, welche Null wird, sobald diese Distanz aufhört sehr klein zu sein;

die Wärmemenge Q, welche während der Zeiteinheit die Oberfläche AB durchsetzt, ist

$$Q = K\Sigma\varphi(r)\delta t,$$

wobei das Summenzeichen sich auf alle Punkte erstreckt, welche hier in dem Phänomen in Betracht kommen.

Bezeichnet man mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes des Elementes AB, δx, δy, δz die Differenzen der Coordinaten der beiden Punkte m und m', so hat man:

$$\delta t = \frac{\partial t}{\partial x}\delta x + \frac{\partial t}{\partial y}\delta y + \frac{\partial t}{\partial z}\delta z;$$

hieraus ergibt sich:

$$Q = K\frac{\partial t}{\partial x}\Sigma\delta x + K\frac{\partial t}{\partial y}\Sigma\delta y + K\frac{\partial t}{\partial z}\Sigma\delta z.$$

Der Ausdruck $\Sigma\delta x$ ist aber der Null gleich, denn die verschiedenen Summanden sind zwei zu zwei gleich und vom entgegengesetzten Zeichen.

Ist nämlich die Differenz der Abscissen $+\delta x$, wenn man vom Punkte m zu m' geht, so gibt es zwei andere Punkte m_1 und m_1', für welche die Differenz $-\delta x$ ist. Ebenso ist auch die Summe $\Sigma\delta y = o$. Andererseits ist der Factor $\Sigma\delta z$ sicherlich proportional der Ausdehnung $d\sigma$ der Oberfläche AB, so dass man schreiben kann:

$$Q = -Hd\sigma\frac{\partial t}{\partial z},$$

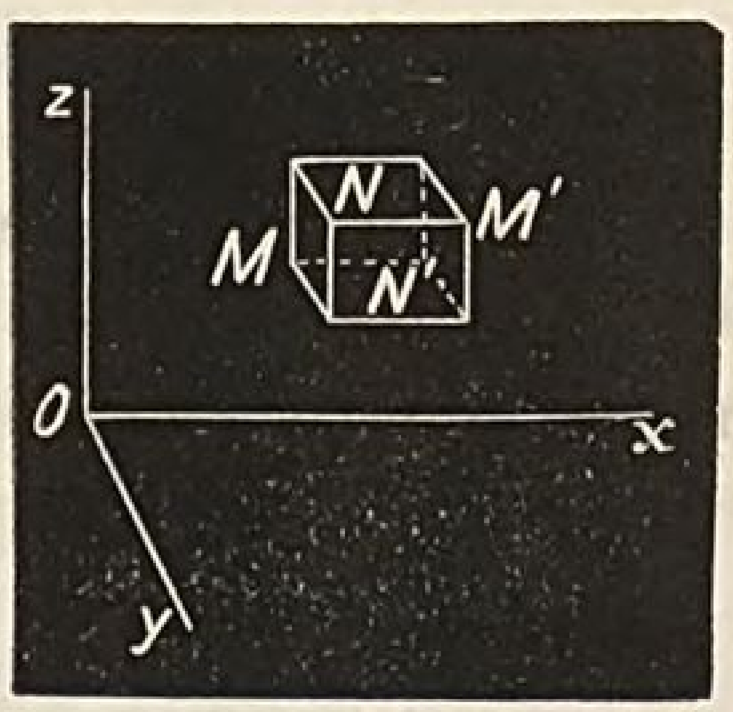


Fig. 126.

wobei H eine neue Constante ist, die den Namen Wärmeleitungscoefficient führt; das negative Zeichen deutet an, dass die Wärme in den Richtungen sich fortpflanzt, in welchen die Temperaturen abnehmen.

312. Betrachten wir nun ein Volumenelement MM' (Fig. 126), das gleich $dxdydz$ ist; x, y, z seien die Coordinaten des Punktes M und t seine Temperatur. Die Wärmemenge, welche die Fläche MN durchsetzt, ist gleich:

$$-\mathrm{H}dzdy\,\frac{\partial t}{\partial x},$$

und jene, welche aus dem gegenüberliegenden Flächenstücke M′N′ herausgeht, ist:

$$-\mathrm{H}dzdy\left(\frac{\partial t}{\partial x}+d\,\frac{\partial t}{\partial x}\right),$$

so dass durch den Durchgang der Wärme durch die beiden zur X-Axe senkrechten Flächen in diesem Volumenelemente am Ende der Zeiteinheit ein Wärmeüberschuss gleich

$$-\mathrm{H}dzdyd\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=-\mathrm{H}dxdydz\,\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

geblieben ist. Ebenso wird durch die Seitenflächen, welche senkrecht zur Axe der Y sind, ein Wärmeüberschuss

$$-\mathrm{H}dxdydz\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

und durch die beiden anderen

$$-\mathrm{H}dxdydz\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

in das Volumenelement eingeführt. Der Gesammtüberschuss ist daher

$$-\mathrm{H}dxdydz\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right).$$

Wenn der permanente Zustand erreicht ist, so ist dieser Überschuss Null, es wird die Temperatur des Volumens sich nicht ändern; man hat daher:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0.$$

Wir werden noch die Summe der drei zweiten Derivierten der Temperatur durch den Ausdruck Δt ausdrücken und man sieht, dass wenn in einem isotropen wärmeleitenden Medium der permanente Zustand erreicht ist, man in allen Punkten dieses Mediums

$$\Delta t = 0$$

hat. Diese Grundgleichung ist dieselbe wie jene, welche für das elektrische Potential in einem isolierenden Medium gilt.

313. Isothermische Flächen. Man nennt isothermische Fläche eine Fläche, welche durch alle jene Punkte geht, in welchen die Temperatur dieselbe ist. Der Wärmefluss ist in jedem Punkte normal zur isothermischen Fläche, welche durch diesen Punkt geht. Denn, wenn man die zu dieser isothermischen Fläche gezeichnete Normale zur Z Axe wählt und wenn man ein Volumenelement betrachtet, so sieht man, dass die Wärmemenge, welche sich parallel zu dieser Axe fortpflanzt, durch die Formel

$$- \mathrm{H} dx dy \frac{\partial t}{\partial z}$$

ausgedrückt ist und dass die Wärmemenge, welche die anderen Seitenflächen durchsetzt, Null ist, da man:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \text{ hat.}$$

Die Wärmemenge, welche durch ein Element $d\sigma$ der isothermischen Fläche hindurchgeht, ist daher:

$$- \mathrm{H} d\sigma \frac{\partial t}{\partial n},$$

wo $\frac{\partial t}{\partial n}$ die Derivierte der Temperatur nach der Normalen zur isothermischen Oberfläche bezeichnet. Der Wärmefluss pflanzt sich gegen jene isothermischen Flächen fort, welche einer niederen Temperatur entsprechen und es ist zwischen zwei sehr benachbarten isothermischen Flächen der Wärmefluss umgekehrt ihrer senkrechten (normalen) Distanz proportional. Eine isothermische Fläche ist daher analog einer Fläche elektrischen Gleichgewichtes und der Wärmefluss folgt denselben Gesetzen wie die elektrische Kraft.

Man kann weiter gehen und die Bedingungen des Nähern erörtern, unter welchen die isothermischen Oberflächen und die Niveauflächen in der Elektricität identisch werden.

314. Betrachten wir zunächst den Fall, dass das leitende Medium nur eine einfache Wärmequelle, d. h. eine auf einen Punkt O reducierte Wärmequelle einschließt. Die isothermischen Flächen sind sodann concentrische Kugelflächen, in derem Mittelpunkte die Wärmequelle sich befindet.

Zeichnen wir durch diesen Punkt einen Kegel mit sehr kleiner Winkelöffnung ω. Die Wärmemenge, die durch ein Oberflächenelement $d\sigma$ geht, welches durch diesen Kegel aus einer Kugelfläche mit dem Radius R und dem Centrum in O ausgeschnitten wird, ist:

$$-\mathrm{H}d\sigma\frac{\partial t}{\partial \mathrm{R}} = -\mathrm{H}\omega \mathrm{R}^2\frac{\partial t}{\partial \mathrm{R}}.$$

Diese Wärmemenge muss constant sein, weil die Fortpflanzung parallel zum Kugelradius erfolgt; man hat daher:

$$-\mathrm{R}^2\frac{\partial t}{\partial \mathrm{R}} = a,$$

$$\frac{\partial t}{\partial \mathrm{R}} = -\frac{a}{\mathrm{R}^2}$$

oder — wenn man integriert —

$$t = \frac{a}{\mathrm{R}} + b,$$

wobei a und b constante Größen sind.

In einer sehr großen Entfernung wird sich die Temperatur unter dem Einflusse der Wärmequelle nicht ändern. Nehmen wir an, die Temperatur der im Unendlichen gelegenen Punkte sei Null, so hat man $b = o$ und demzufolge:

$$t = \frac{a}{\mathrm{R}}.$$

Wenn also die Wärmequelle auf einen Punkt sich reduciert, so steht die Temperatur in irgendeinem Punkte des Mediums im umgekehrten Verhältnisse zur Entfernung dieses Punktes von der Quelle, die Constante a stellt die Intensität der in Betrachtung gezogenen Quelle dar. Wäre die Quelle von

sphärischer Gestalt, so würde die Temperatur in jedem äußeren Punkte ebenso der Entfernung vom Centrum der Kugel umgekehrt proportional sein. Wenn endlich die Quelle von irgend einer Gestalt ist oder auch, wenn mehrere benachbarte Wärmequellen, die verschiedene Temperaturen besitzen, vorhanden sind, so werden die isothermischen Flächen aller dieser Quellen in einer großen Entfernung nahezu sphärisch sein und die Temperatur in einem sehr entfernten Punkte wird wieder näherungsweise umgekehrt proportional der Entfernung dieses Punktes von den Wärmequellen sein.

315. Die isothermischen Flächen sind mit den Niveauflächen eines entsprechenden elektrischen Zustandes identisch.

Betrachten wir nun in einem unendlichen leitenden Medium verschiedene Körper A_1, A_2, A_3 ... von endlichen Dimensionen, deren Oberflächen auf den Temperaturen t_1, t_2 t_3 ... gehalten werden, welche für jeden von ihnen constant, aber von einem zum anderen verschieden sind; man soll nachweisen, dass die isothermischen Flächen in dem Medium identisch werden mit den Niveauflächen, welche in einem isolierenden Medium vorhanden sein würden, in welchem ebendieselben Körper A_1, A_2, A_3 ... auf die elektrischen Potentiale, die respective gleich t_1, t_2, t_3 ... sind, gebracht würden.

Dieser Satz kann als evident angesehen werden, weil die Temperaturen einerseits und die Potentiale andererseits Functionen sind, welche dieselben Anfangswerte haben, welche derselben Differentialgleichung

$$\Delta t = 0 \text{ oder } \Delta V = 0$$

genügen und welche alle beide im Unendlichen Null werden(1); es dürfte aber nicht überflüssig sein, einen directen Beweis dieses Satzes zu geben.

Sei V das elektrische Potential in einem Punkte P des isolierenden Mediums und t die Temperatur in demselben Punkte im Falle des Wärmeleitungsproblemes. Setzen wir

(1) Um die Ausdrücke zu vereinfachen, nimmt man als Nullpunkt der Temperaturen die Temperatur der von der Wärmequelle sehr entfernten Punkte an, denn diese wird durch die Gegenwart der Quelle nicht geändert.

$$t = V + V'.$$

Die Größe V' ist Null auf der Oberfläche eines jeden der Körper; da ferner die Functionen t und V für sehr entfernte Punkte nahezu der Entfernung umgekehrt proportional sind, so wird ihre Differenz V ebenfalls umgekehrt der Entfernung proportional sein. Man hat außerdem für alle jene Punkte, welche außerhalb der Körper A_1, A_2, A_3 ... liegen, $\Delta t = 0$ und $\Delta V = 0$, woraus sich auch $\Delta V' = 0$ ergibt.

Dehnen wir nun das Integral

$$\int V' \Delta V' dv,$$

in welchem dv ein Volumelement bezeichnet, auf den ganzen zwischen den Körpern A_1, A_2, A_3 ... und einer Kugel von sehr großem Radius enthaltenen Raum aus. Man hat nach der Formel von Green:

$$\int V' \Delta V' dv = \int V' \frac{dV'}{ds}\, d\sigma - \int \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)^2 \right] dv.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist Null, weil der Factor $\Delta V'$ überall Null ist. Das Integral

$$\int V' \frac{dV'}{ds}\, d\sigma$$

ist Null auf der Oberfläche jedes der Körper A_1, A_2, A_3 ..., weil in diesen Punkten der Wert von V' Null ist; dieses Integral convergiert auf der Oberfläche der großen Kugel ebenfalls gegen Null, weil V' dann umgekehrt proportional dem Radius dieser Kugel ist. Hieraus resultiert:

$$\int \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)^2 \right] dv = 0$$

und man hat demzufolge in allen Punkten des betrachteten Raumes:

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial V'}{\partial z} = 0,$$

d. h. V' ist eine Constante. Da die letztere auf den Körpern selbst Null ist, ist sie durchwegs Null.

Es ist also die Temperatur in einem Punkte eines wärmeleitenden Mediums durch dieselbe Zahl dargestellt, wie das elektrische Potential in demselben Punkte, wenn das Medium isolierend ist.

316. Directe Darstellung dieses Theoremes nach Thomson. Thomson hat mittelst sehr einfacher Betrachtungen auf die Analogie hingewiesen, die zwischen den beiden Arten der Erscheinungen besteht. Es ist klar, dass in einem leitenden Medium die Temperatur in einem Punkte, welcher außerhalb einer isothermischen Fläche, die alle Wärmequellen einschließt, liegt, unabhängig von dem wirklichen Zustande der Quellen ist, welche diese Fläche veranlassen. Die Temperatur eines äußeren Punktes ist daher dieselbe, als ob die Wärmequellen auf der isothermischen Fläche selbst vertheilt wären und zwar so, dass die Temperatur auf derselben constant erhalten wird.

Wenn man in einem leitenden Medium, das in den permanenten Zustand unter dem Einflusse eines Systemes von Wärmequellen gekommen ist, den bereits bestehenden Wärmeflüssen noch jene Wärmebewegung, die von einem anderen System Wärmequellen herrührt, hinzufügt, so wird auch der neue Zustand noch permanent sein. Denn in jedem der beiden Zustände ist die in ein Volumelement eintretende Wärmemenge gleich der austretenden, und es wird dasselbe für den resultierenden Zustand der Fall sein. Zwischen zwei Punkten m und m' ist der Wärmefluss gleich der Summe der beiden Flüsse, welche den beiden Systemen entsprechen; da dieser Fluss den Temperaturdifferenzen proportional ist, so ist die Differenz der schließlichen Temperaturen ebenfalls gleich der Summe der Differenzen, die sich auf die beiden Systeme beziehen. Da die im Unendlichen herrschende Temperatur, d. h. der Überschuss der Temperatur, der durch die Wärmequelle in einem sehr entfernten Punkte hervorgerufen wird, über jene in dem betrachteten Punkte in den beiden Fällen gleich Null ist, so folgt hieraus, dass die Temperatur in einem Punkte der Summe jener Temperaturen gleich ist, die sich unter dem Einflusse eines jeden der Wärmequellen-Systeme einzeln bilden würden.

Andererseits ist die Temperatur, die in einem Punkte P durch eine im Punkte M befindliche einfache Wärmequelle hervorgerufen wird, umgekehrt proportional der Entfernung r dieses Punktes P von der Quelle. Wenn man daher mit $\mu d\sigma$ die Intensität der Quelle bezeichnet, welche auf einem Flächenelemente $d\sigma$ der früher betrachteten isothermischen Fläche vorhanden ist, so wird der Temperatursantheil des in einer Distanz r gelegenen Punktes P, welcher von diesem Oberflächenelemente herrührt, durch die Formel:

$$\frac{\mu d\sigma}{r}$$

ausgedrückt und die Temperatur t, welche im Punkte P durch die gesammte isothermische Fläche hervorgebracht wird, wird sein:

$$t = \int \frac{\mu d\sigma}{r}.$$

Die Constante μ ist durch die Bedingung bestimmt, dass für alle Punkte der isothermischen Fläche dieses Integral einen constanten Wert t_1 annimmt.

Es wird also die Temperatur t vollständig durch dieselbe Formel ausgedrückt, wie das Potential im Punkte P, welches von einer auf der isothermischen Fläche ausgebreiteten elektrischen Schichte herrührt, die in jedem Punkte eine Dichte gleich μ besitzt. Diese Schichte wird überdies im Gleichgewichte sein, weil sie auf der ganzen Fläche ein constantes Potential hervorrufen wird. Die elektrische Kraft, welche sich in einem Punkte P äußert, ist normal zur Niveaufläche, welche durch diesen Punkt geht, und gleich der Derivierten $-\frac{dV}{dn}$ des Potentiales nach der Normale. Andererseits ist der Wärmefluss durch ein Element der isothermischen Oberfläche in demselben Punkte P normal zur isothermischen Fläche, proportional der Größe dieses Elementes und der Derivierten $-\frac{dt}{dn}$; dieser Fluss ist daher gleichgerichtet und proportional der elektrischen Kraft im Punkte P.

317. Folgerungen aus dieser Wechselbeziehung. Aus dieser Wechselbeziehung zwischen den beiden Gruppen von Erscheinungen kann man eine Anzahl von bemerkenswerten Folgerungen ziehen:

1. Wenn eine geschlossene Oberfläche auf eine constante Temperatur gebracht ist, so ist es klar, dass der permanente Zustand nur dann erreicht ist, wenn die Temperatur der verschiedenen Punkte, die im Innern dieser Oberfläche liegen, constant ist und gleich jener, welche auf der Fläche selbst herrscht; es besteht dann kein Wärmefluss zwischen den Punkten, die innerhalb dieser Fläche liegen. Daraus folgt, dass, wenn eine elektrische Schichte auf einer geschlossenen Fläche derart ausgebreitet ist, dass das Potential in allen Punkten derselben constant ist, das Potential in allen Punkten, die innerhalb der Fläche sich befinden, ebenfalls constant sein wird und es wird in denselben den gleichen Wert haben, wie auf der Fläche selbst; die elektrische Kraft wird in allen diesen Punkten Null sein. Wir waren früher genöthigt, auf die Formel von Green zurückzugreifen, um dieses Theorem zu erweisen (178).

Wenn die Einschließung anstatt durch eine continuierliche Fläche durch ein Gitter erfolgt, so lehrt uns das calorische Phänomen, dass, wenn auch die Temperatur innerhalb der Einschließung nicht constant ist, sie nur unmerklich variieren kann. Wenn ebenso ein leitender elektrisierter, im Gleichgewichte befindlicher Körper die Gestalt einer discontinuierlichen Hülle hat, so wird das Potential im Innern der letzteren nahezu constant sein und die elektrische Kraft unmerklich. Wir haben bezüglich dieses Gegenstandes (46) die Versuche von Faraday erwähnt.

2. Wir haben gesehen, dass die elektrische Kraft in der Nachbarschaft eines elektrisierten leitenden Körpers proportional der elektrischen Dichte in dem am meisten benachbarten Punkte der elektrisierten Oberfläche ist, und dass man

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\mu$$

hat. Hieraus ergibt sich, dass der Wärmefluss in der Nachbarschaft einer Wärmequelle ebenfalls proportional der calorischen Intensität dieser Quelle in dem betrachteten Punkte ist.

Stellen wir uns zwei Wärmequellen A_1 und A_2 (Fig. 127) vor, die sich auf den constanten Temperaturen t_1 und t_2 befinden und construieren wir einen unendlich engen Canal $M_1 M_2 N_1 N_2$, der seitlich von Curven begrenzt ist, welche orthogonal zu den isothermischen Flächen sind, und welcher in den Oberflächen der beiden Quellen A_1 und A_2 endigt. Da der Wärmefluss in jedem Punkte normal zu den isothermischen Flächen ist, so wird dieser Canal durch seine Seitenflächen weder Wärme empfangen noch abgeben und es erfordert der permanente Zustand, dass die gesammte Wärme, welche durch die Fläche M_1N_1 eintritt, durch die Fläche M_2N_2 austritt. Seien $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ die Größen dieser Flächen, μ_1 und μ_2 die calorischen Intensitäten in den Punkten M_1 und M_2. Der Wärmefluss, welcher durch die Fläche M_1N_1 eintritt, ist, wie wir gesehen haben

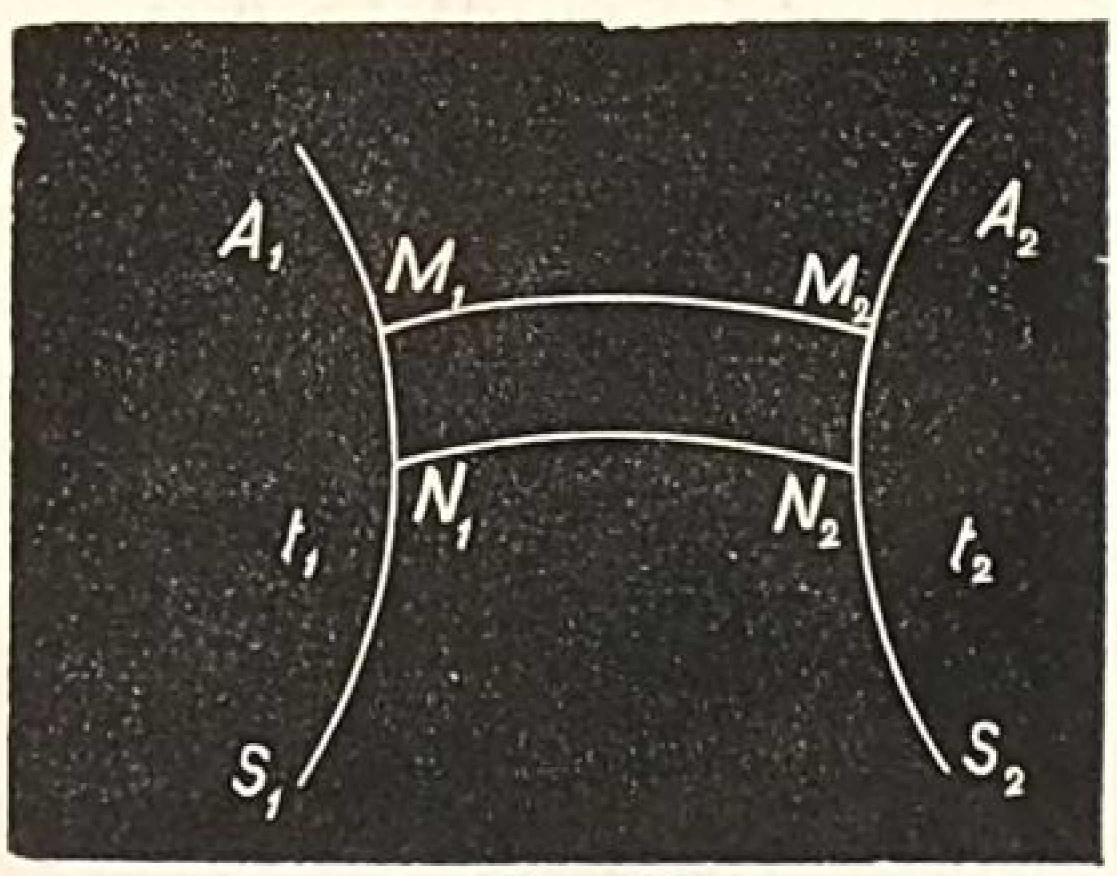


Fig. 127.

$$-Hd\sigma_1 \frac{dt_1}{dn} = 4\pi H\mu_1 d\sigma_1.$$

Ebenso ist der Wärmefluss, welcher in den Canal durch die Oberfläche M_2N_2 eintritt, gleich $4\pi H\mu_2 d\sigma_2$. Da der gesammte Wärmefluss Null sein soll, so folgt daraus:

$$4\pi H(\mu_1 d\sigma_1 + \mu_2 d\sigma_2) = 0$$

oder auch

$$\mu_1 d\sigma_1 + \mu_1 d\sigma_2 = 0.$$

In dem entsprechenden elektrischen Phänomene sind A_1 und A_2 zwei im Gleichgewichte befindliche elektrisierte Conductoren und die Producte $\mu_1 d\sigma_1$ und $\mu_2 d\sigma_2$ sind die Elektricitätsmengen, welche auf zwei correspondierenden Flächenelementen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$, die durch einen zu den Niveauflächen

orthogonalen Canal bestimmt werden, vorhanden sind. Man erkennt, dass die Summe der betrachteten Mengen Null ist und demzufolge, dass die Elektricitätsmengen auf den beiden correspondierenden Flächenelementen gleich und vom entgegengesetzten Zeichen sind (174).

Wenn der elektrisierte Körper A_2 vollständig den Körper A_1 einhüllt, so werden alle Orthogonalen, welche von der Oberfläche S_1 gezogen werden, die innere Oberfläche S_2 von A_2 treffen und es wird demzufolge die ganze Elektricitätsmenge, die sich auf A_1 befindet, gleich und entgegengesetzt jener Elektricitätsmenge sein, welche auf der Oberfläche S_2 ausgebreitet ist. Geht man auf das calorische Phänomen zurück und setzt die Temperatur t_2 des einhüllenden Körpers gleich Null, so ist es klar, dass die Temperatur außerhalb der Oberfläche S_2 überall Null sein wird. Ebenso wird in dem elektrischen Phänomene, wenn das Potential V_2 auf der Oberfläche S_2 Null sein wird, es in allen Punkten Null sein, welche außerhalb dieser Oberfläche Null gelegen sind. Die beiden auf den Flächen S_1 und S_2 ausgebreiteten gleichen und entgegengesetzten Elektricitätsmengen haben daher ein Potential Null und bringen eine elektrische Kraft Null hervor in allen Punkten, die außerhalb der einhüllenden Fläche S_2 gelegen sind.

3. Betrachten wir noch als letztes Beispiel das Problem von Riemann (192).

Eine Wärmequelle A, welche sich auf einer Temperatur t befindet und eine andere Quelle B, deren Temperatur Null ist, sind in einem wärmeleitenden Medium gelegen. Die Wärmemenge, welche von der Quelle A zur Quelle B geht, ist gleich jener, welche die Quelle A von der Quelle B empfangen würde, wenn diese auf der Temperatur t und die erste auf der Temperatur Null wäre. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Principe der Superposition permanenter Zustände. Bezeichnen wir mit Q_b die Wärmemenge, welche die Quelle B im ersten Falle enthält und mit Q_a jene, welche die Wärmequelle A empfängt, wenn die Temperaturen wechseln.

Wenn man die beiden permanenten Zustände superponiert, so werden die beiden Quellen dieselbe Temperatur besitzen; die Wärmemenge, welche die Quelle A der Quelle B zusenden

wird, wird $Q_b - Q_a$ sein und jene, welche die Quelle B der Quelle A entsendet, $Q_a - Q_b$. Nun sind diese Mengen Null. Denn in allen Punkten des Mediums ist die Temperatur niedriger oder höchstens gleich t. Wenn man zwischen den beiden Körpern A und B einen orthogonalen Canal zu den isothermischen Flächen zeichnen könnte, so würden die beiden Grundflächen dieses Canals eine und dieselbe Temperatur besitzen, welche höher ist, als die Temperaturen aller anderen Punkte, und ein solcher Canal würde durch seine zwei Grundflächen Wärme empfangen, ohne durch seine seitlichen Begrenzungsflächen davon zu verlieren, was der Hypothese des permanenten Zustandes widerspricht. Man kann daher keinen orthogonalen Canal zwischen den Wärmequellen A und B zeichnen; die Orthogonalen, welche man von der einen der Wärmequellen A oder B bis zur anderen zeichnen kann, sind derart, dass zwischen diesen beiden Quellen keine Wärmeströmung besteht. Die Summe $Q_a - Q_b$ ist daher Null und demzufolge:

$$Q_a = Q_b.$$

Bezeichnet man mit μ_b die calorische Intensität in einem Punkte der Wärmequelle B und $d\sigma_b$ ein Oberflächenelement, so hat man in dem ersten permanenten Wärmezustande:

$$Q_b = -4\pi H \int \mu_b d\sigma_b;$$

ebenso für den zweiten Zustand

$$Q_a = -4\pi H \int \mu_a d\sigma_a.$$

Hieraus folgt:

$$\int \mu_b \, d\sigma_b = \int \mu_a d\sigma_a.$$

In dem entsprechenden elektrischen Phänomene wird A ein leitender Körper sein, der ein Potential V besitzt, B ein anderer nicht isolierter Körper, d. h. ein solcher, welcher das Potential Null hat und $\int \mu_b d\sigma_b$ ist die Elektricitätsmenge, welche auf diesem Leiter durch die influencierende Wirkung des

Körpers A erzeugt wird. Ebenso ist $\int \mu_a d\sigma_a$ die Elektricitätsmenge, welche der auf das Potential Null gebrachte und der influencierenden Wirkung des Leiters B, der das Potential V besitzt, unterworfene Conductor A annehmen würde. Diese beiden Elektricitätsmengen sind gleich und darin besteht das Theorem von Riemann.

VIII. Kapitel.

Theorie der Dielektricität.

318. Begriff eines Dielektricums. Von den leitenden Körpern sind jene, welche wir bisher unter dem Namen Isolatoren kennen gelernt haben, in physikalischer Beziehung verschieden. Isolatoren werden sie aus dem Grunde genannt, weil sie einem Elektricitätsstrome einen äußerst großen Widerstand bieten, weshalb sie überall dort verwendet werden, wo es sich darum handelt, Elektricitätsströmungen zu verhüten, d. h. die Elektricität auf Leitern zu conservieren oder zu isolieren. Es werden auch diese Körper nach dem Vorgange von Faraday(1) Dielektrica genannt, weil man gewisse elektrische Wirkungen durch sie hindurchsenden kann. Während — um vorderhand nur eines Falles zu gedenken — z. B. die elektrische Kraft in irgendeinem Punkte, der sich innerhalb eines leitenden Körpers befindet, mag der letztere isoliert sein oder nicht, Null ist, wenn das elektrische Gleichgewicht eingetreten ist, können innerhalb der dielektrischen Körper elektrische Kräfte vorhanden sein, ohne dass der elektrische Gleichgewichtszustand gestört wird.

Wir haben bereits in der ersten Abtheilung dieses Werkes (pag. 201—211) einige merkwürdige Erscheinungen, die dielektrische Körper zeigen, in Kürze besprochen; so unter

(1) Faraday, Experimental Researches.

anderen die Wirkungen influencierender Elektricität auf diese, das Eindringen der Elektricität in Dielektrica, die Modificationen, welche die Influenzwirkungen durch zwischenliegende dielektrische Medien erleiden u. s. w. Wir werden im weiteren Verlaufe auf diese Phänomene und deren Theorie in ausführlicher Weise zurückkommen.

In den bisherigen theoretischen Untersuchungen haben wir zwischen elektrischen Körpern eine actio in distans angenommen, wobei dem zwischen den elektrischen Körpern befindlichen Dielektricum keine diese Wirkung modificierende Eigenschaft zugeschrieben wurde. Die oben angegebenen Phänomene zeigen zur Genüge, dass das Dielektricum eine wesentliche Rolle bei denselben spielt und es ist unsere Aufgabe, die letztere in ihren Einzelnheiten genauer kennen zu lernen. Schon Faraday hat sich bestimmte Ansichten über den Einfluss des Dielektricums auf die elektrischen Wirkungen gebildet und insbesonders Maxwell hat auf Grund der Faraday'schen Ansichten die Theorie der Dielektrica bis zu einem hohen Grade ausgebildet. Nach dem letzteren Forscher ruft eine elektrische Kraft eine Verschiebung der Elektricitäten des Dielektricums im Sinne der ersteren hervor, welche proportional der inducierenden elektrischen Kraft ist und von der Natur des Dielektricums abhängt. Die elektrische Verschiebung innerhalb eines dielektrischen Körpers gibt Veranlassung zu einer inneren elektromotorischen Kraft, welche eine Richtung besitzt, die der Verschiebung entgegengesetzt ist, und es wird aus diesem Grunde die innere elektromotorische Kraft die Verschiebung zu Null zu machen suchen. Es wird das dielektrische Medium durch die erwähnten Einflüsse in einen gewissen Spannungszustand versetzt, den wir an anderer Stelle eingehender besprechen werden. Die Verschiebungen, welche durch eine und dieselbe elektrische Kraft in den verschiedenen dielektrischen Körpern hervorgerufen werden, sind von verschiedenem Werte und es kann das Verhältnis der Verschiebung in einem beliebigen Dielektricum zu der Verschiebung im Vacuum (dieselbe inducierende elektrische Kraft vorausgesetzt) auf dem Wege des Versuches, wie später gezeigt werden wird, bestimmt werden. Die zur

Erzeugung einer elektrischen Verschiebung erforderliche Arbeit wird in dem dielektrischen Körper aufgespeichert und es wird vermöge dieser Energie ein elektrisiertes System befähigt, mechanische Arbeit zu leisten.

Vorderhand wollen wir bei diesen Betrachtungen, die wir am Schlusse der „Theorie der dielektrischen Körper" wieder aufnehmen werden, nicht länger verweilen und zunächst den Einfluss von influencierenden Elektricitäten auf Nichtleiter ins Auge fassen.

319. Polarisation der dielektrischen Medien. Sowohl die Moleküle der Leiter als auch jene der Nichtleiter werden unter dem Einflusse von influencierenden Elektricitätsmengen elektrisch polarisiert, d. h. es werden die in ihnen auch im unelektrischen Zustande nach der dualistischen Hypothese von Symmer vorhandenen Elektricitäten geschieden, in der Art, dass die Influenzelektricität erster Art dem influencierenden Körper näher liegt als die Influenzelektricität zweiter Art. Doch unterscheiden sich auch in dieser Beziehung die Leiter von den Nichtleitern.

Bei den Nichtleitern oder schlechten Leitern geht die Elektricität eines Moleküles zur entgegengesetzten des Nachbarmoleküles allmählig über, so dass erst nach Ablauf einer gewissen Zeit an der Oberfläche des Nichtleiters freie Elektricität auftritt. Bei den Leitern vollzieht sich dieser Austausch der entgegengesetzten Elektricitäten zweier Nachbarmoleküle schon unmittelbar nach der Polarisierung der Moleküle, es sind also auch in dieser Hinsicht Leiter und Nichtleiter nur quantitativ verschieden.

Über die innere Polarisation der Dielektrica wurden verschiedene Ansichten aufgestellt; nach der einen, schon von Belli und Configliachi vertretenen werden durch inducierende elektrische Kräfte die beiden ursprünglich verbundenen gleichen und entgegengesetzten elektrischen Fluida eines jeden Theilchens des dielektrischen Körpers geschieden; diese Scheidung erfolgt zuerst schnell und zwar proportional der inducierenden Wirkung, dann wächst sie noch langsam an; je nach der Natur des Dielektricums erfolgt die Trennung der entgegengesetzten Fluida in verschiedenem Grade. Analog der

von Poisson für den Magnetismus aufgestellten Theorie der Induction hat zuerst Mosotti[1] und nach ihm Faraday[2] die fernere Annahme gemacht, dass die dielektrischen Körper eine Menge leitender, voneinander völlig isolierter, gleicher (etwa kugelförmiger) Moleküle enthalten. Es ist nach dieser Hypothese leicht zu ersehen, dass, wenn in gleichen Räumen verschiedener Dielektrica sich eine verschiedene Anzahl solcher Moleküle befindet, die durch dieselbe influencierende Kraft in diesen Dielektrica hervorgerufene influencierte Elektricität verschieden sein wird.

Nach einer anderen Hypothese wären bereits in einem Dielektricum die einzelnen Moleküle in einem polaren Zustande, liegen aber mit ihren elektrischen Axen wirr durcheinander; bei Einwirkung einer äußeren elektrisierenden Kraft werden nun diese Moleküle den Molekularkräften entgegen so gedreht, dass ihre elektrischen Axen parallel werden und sie ihre gleichnamigen Pole nach der einen, die anderen gleichbezeichneten nach der entgegengesetzten Richtung wenden. Ein Unterschied in dem Verhalten der verschiedenen Dielektrica kann davon herrühren, dass die Anzahl der elektrischen Theilmoleküle in gleichen Volumina der verschiedenen Dielektrica verschieden ist, dass ferner die Wirkung der der Drehung der Moleküle widerstrebenden Molekularkräfte verschieden ist; ferner könnten auch die Enden der elektrischen Axen der einzelnen Moleküle mit verschiedenen Elektricitätsmengen beladen sein; die experimentell erwiesenen Thatsachen leiten zur weiteren Annahme, dass die Drehung der Moleküle sehr klein ist. Wir haben bereits in der ersten Abtheilung Versuche kennen gelernt, welche zeigen, welche Umstände auf das Einstellen der Moleküle in ihre geordneten Lagen und auf das Verschwinden dieser Einstellung Einfluss nehmen können.

Wir werden der folgenden mathematischen Theorie der Dielektrica die von William Thomson in der Theorie des Magnetismus aufgestellten Rechnungen zugrunde legen; man braucht vorderhand keine Annahme über die Constitution der

(1) Mosotti, Atti della Societa Italiana delle Scienze, Tom. XXIV.

(2) Faraday, Experimental Researches, serie XIV, §. 1679.

Dielektrica machen und nur voraussetzen, dass ein jedes Volumenelement des Dielektricums durch die inducierende Wirkung polarisiert und gleichsam in einen kleinen Magnet verwandelt wird; dies genügt, um alle mathematischen Folgerungen aus der Poisson'schen Hypothese zu finden(1).

320. Aufstellung der Grundformeln. Wir können irgendeinen Theil eines elektrisierten Dielektricums etwa in ganz derselben Weise wie einen kleinen Magnet polarisiert betrachten. Die beiden Elektricitäten $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ werden in einem Volumenelement dv des Dielektricums, das in den polaren Zustand versetzt wurde, sich um eine Entfernung ds getrennt befinden. Wir wollen in ähnlicher Weise, wie es in der mathematischen Theorie des Magnetismus geschieht, εds das elektrische Moment des Volumenelementes dv bezeichnen und können ds die Axe des polarisierten Elementes nennen.

Unter Intensität der Elektrisierung in einem bestimmten Punkte, die im Nachfolgenden mit J bezeichnet werden soll, verstehen wir den Quotienten des elektrischen Momentes eines Volumenelementes durch das Volumen selbst; es gilt somit die Beziehung:

$$J = \frac{\varepsilon ds}{dv}.$$

Die Größe J in einem Volumenelement ist der Richtung nach durch die elektrische Axe des betreffenden Elementes, der Größe nach durch den obigen Ausdruck unzweideutig bestimmt. Man kann die Intensität der Elektrisierung wie eine Kraft durch eine Strecke von bestimmter Richtung und Größe graphisch darstellen.

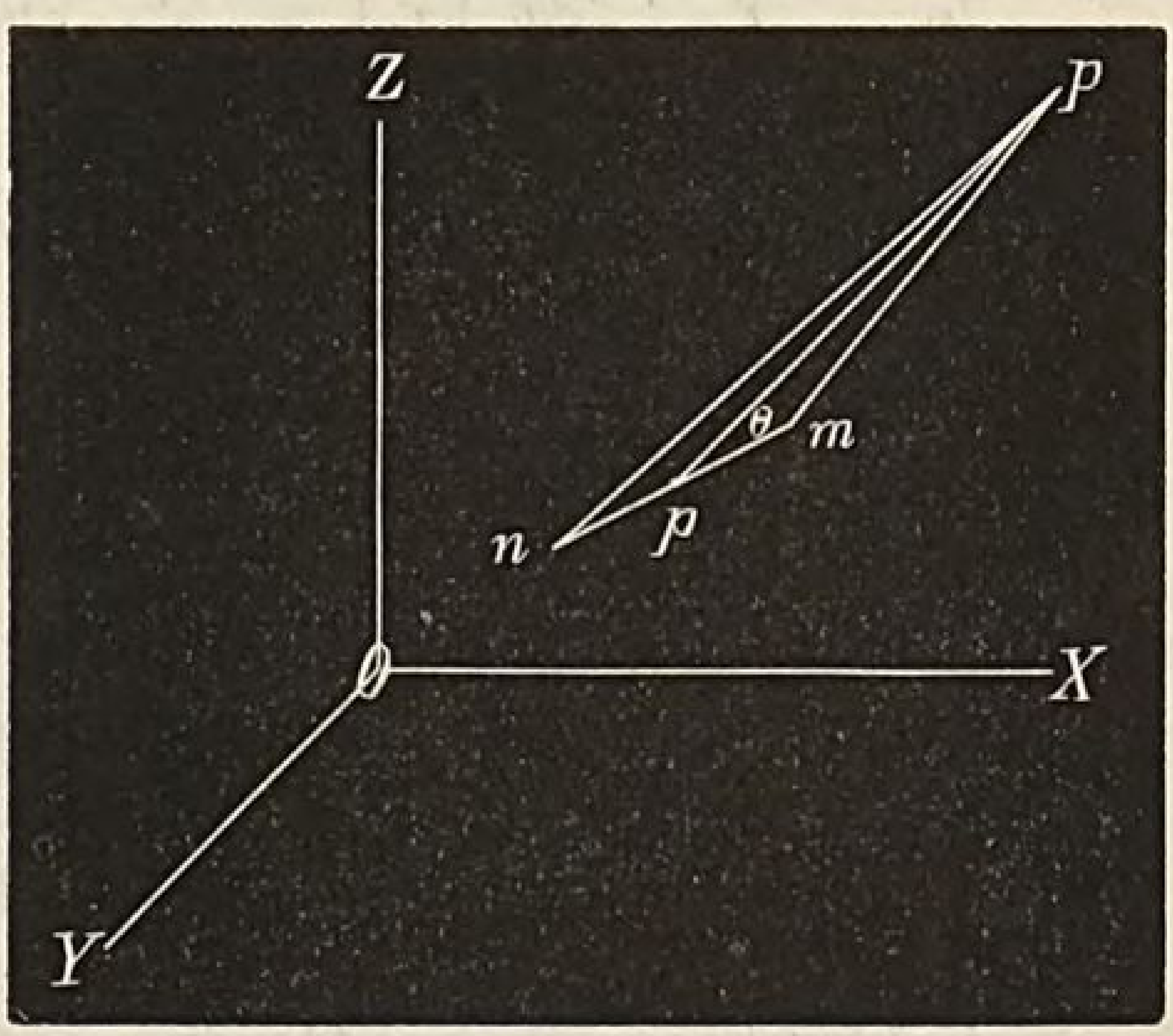


Fig. 128.

Nach Aufstellung dieser Grundbegriffe wollen wir zunächst das Potential des

(1) Mascart und Joubert, leçons etc. p. 113.

polarisierten Volumenelementes dv in einem Punkte P (Fig. 128) betrachten, der in einer Entfernung r von der Mitte des Elementes p sich befindet; die Verbindungslinie Pp bilde mit der elektrischen Axe des Elementes den Winkel θ. In den Punkten m und n, die wir als elektrische Pole des Elementes bezeichnen können, denken wir uns die Elektricitätsmengen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ concentriert. Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes p mit

$$x, y, z,$$

so sind jene des Punktes n:

$$x - dx,\ y - dy,\ z - dz;$$

die des Punktes m werden dann ausgedrückt durch:

$$x + dx,\ y + dy,\ z + dz.$$

Ferner wollen wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$Pp = r,\ Pm = \rho_1,\ Pn = \rho_2.$$

Es ist dann das Potential des polarisierten Volumenelementes in einem Punkte P dargestellt durch:

$$dV = \varepsilon\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder, da

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz,$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dx - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dy - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz,$$

ist, hat man

$$dV = 2\varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die elektrische Axe ds des Volumenelementes mit den Coordinatenaxen bildet, mit λ, μ, ν, so gelten auch folgende Beziehungen:

$$\operatorname{Cos} \lambda = 2\,\frac{dx}{ds},\ \operatorname{Cos} \mu = 2\,\frac{dy}{ds},\ \operatorname{Cos} \nu = 2\,\frac{dz}{ds}$$

und es wird Formel (2) übergehen in:

$$dV = \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) ds.\cos\lambda + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) ds.\cos\mu + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) ds.\cos\nu \right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Es sind nun die Componenten der Intensität der Elektrisierung J längs der drei Coordinatenaxen:

$$\left.\begin{aligned} A &= J\cos\lambda = \frac{\varepsilon ds}{dv}\cos\lambda \\ B &= J\cos\mu = \frac{\varepsilon ds}{dv}\cos\mu \\ C &= J\cos\nu = \frac{\varepsilon ds}{dv}\cos\nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4).$$

Wir erhalten nun schließlich für das gesuchte Potential des dielektrischen Volumenelementes im Punkte P die Gleichung:

$$dV = \left\{ A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + B\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + C\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} dv \quad \ldots \quad (5).$$

Das Potential V des ganzen dielektrischen Körpers in dem betrachteten Punkte ergibt sich, wenn man für jedes Volumenelement den vorstehenden Ausdruck bildet und die entstandenen Glieder summiert.

So erhält man:

$$V = \iiint \left\{ A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + B\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + C\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} dx\, dy\, dz \ldots (6),$$

in welcher Formel die angedeutete Integration über den ganzen vom Dielektricum eingenommenen Raum auszudehnen ist. Es hängt somit das Potential des dielektrischen Körpers in einem äußeren Punkte von der Entfernung des letzteren von den verschiedenen Volumenelementen des dielektrischen Körpers ab und von der Intensität der Elektrisierung.

321. Transformation der vorstehenden Formel. Den vorstehenden Ausdruck kann man leicht transformieren; man erhält nämlich durch Anwendung der integratio per partes:

$$V = \iint \frac{1}{r}\left(A\, dy\, dz + B\, dx\, dz + C\, dx\, dy \right) -$$
$$- \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \ . \ . \ . \ (7).$$

Denken wir uns Fig. 129 ein Stück der Oberfläche des dielektrischen Körpers gezeichnet und stellen wir durch die nach F gerichtete Strecke die Größe und Richtung der Elektrisierung in einem Punkte der Oberfläche vor; es werde ferner θ der Winkel genannt, welchen die Richtung der Elektrisierung in dS mit der daselbst nach außen errichteten Normalen n bildet; diese schließe mit den Coordinatenaxen die Winkel φ, ψ, χ ein. Dann hat man:

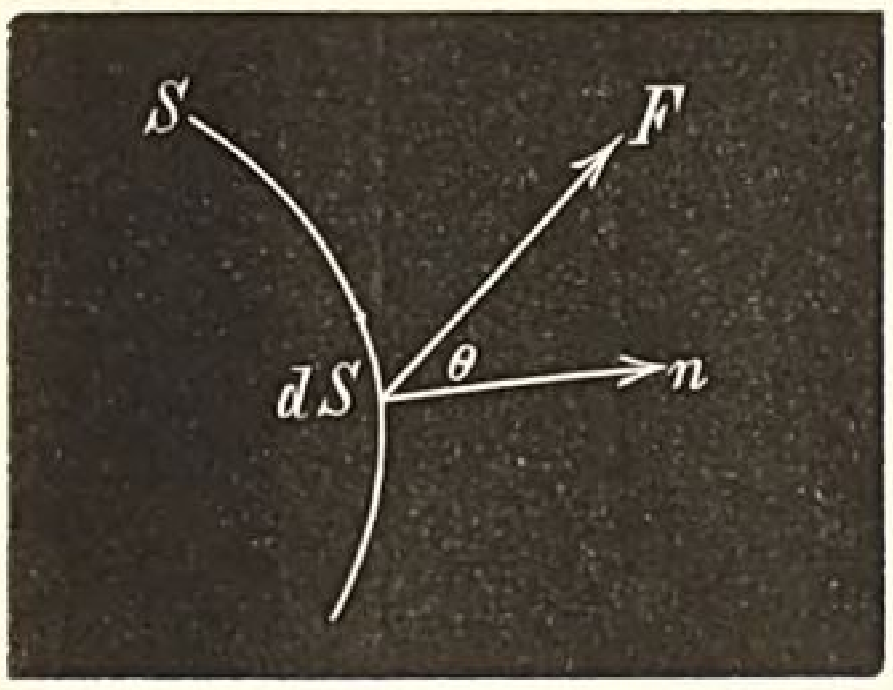


Fig. 129.

$$\cos\theta = \cos\lambda \cos\varphi + \cos\mu \cos\psi + \cos\nu \cos\chi$$

und demnach:

$$J\, dS \cos\theta = J \cos\lambda\, (dS \cos\varphi) + J \cos\mu\, (dS \cos\psi) + $$
$$+ J \cos\nu\, (dS \cos\chi).$$

Berücksichtigt man, dass die in den Klammern der letzten Formel enthaltenen Ausdrücke die Projectionen des Oberflächenelementes dS auf die Coordinatenebenen sind, so erhält man

$$J dS \cos\theta = A\, dy\, dz + B\, dx\, dz + C\, dx\, dy \ . \ . \ . \ (8)$$

und nach Substitution dieses Wertes in (7)

$$V = \iint \frac{1}{r} J \cos\theta\, dS - \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \ldots (9).$$

Bezeichnet man schließlich noch

$$\left. \begin{aligned} J \cos\theta = A \cos\varphi + B \cos\psi + C \cos\chi = \sigma \\ -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = \rho \end{aligned} \right\} \ . \ . \ . \ (10)$$

so folgt für das Potential des dielektrischen Körpers in dem äußeren Punkte P die Schlussgleichung:

$$V = \iint \frac{\sigma dS}{r} + \iiint \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r} \quad . \; . \; . \; (11).$$

Wir können also sagen: Wenn ein dielektrisches Medium durch die Wirkung elektrischer Kräfte in einen Polarisationszustand versetzt wird, so wirkt dieser dielektrische Körper nach außen so, als ob auf seiner Oberfläche eine Ladung von der Dichte σ und in seinem Innern eine elektrische Vertheilung von der Dichte ρ vorhanden wäre. Die Oberflächendichte der Elektricität ist der Projection der Intensität der Elektrisierung auf die zur Oberfläche gezeichnete Normale gleich, die cubische Dichte ρ ist entgegengesetzt gleich der Summe der partiellen Derivierten der Componenten der Elektrisierung nach den drei Coordinatenaxen.

322. Nehmen wir den Fall an, dass die Elektrisierung gleichförmig sei, d. h. dass die Intensität der Elektrisierung der Größe und Richtung nach in der ganzen Ausdehnung des Dielektricums constant sei; in diesem Falle gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = o \quad . \; . \; . \; (12)$$

und es ist dann zufolge der zweiten Gleichung von (10)

$$\rho = o.$$

Es befinden sich dann nur auf der Oberfläche des dielektrischen Körpers Elektricitätsmengen. In dem betrachteten Falle erhält man für das Potential eines solchen dielektrischen Körpers in einem äußeren Punkte nachstehende Gleichung:

$$V = \iint \frac{J.\cos\theta}{r}\, dS.$$

Es herrscht somit in diesem Falle auf der Oberfläche des Dielektricums eine Flächendichte $\sigma = J\cos\theta$, welcher Ausdruck

uns — wie wir an anderer Stelle noch sehen werden — andeutet, dass die äußere Wirkung eines gleichförmig elektrisierten Dielektricums jener zweier Schichten äquivalent ist, welche aus der Übereinanderlagerung zweier homogenen elektrischen Massen von gleichen aber entgegengesetzt bezeichneten Dichten ρ entstehen würden, wobei die positiv elektrische Masse parallel zur Richtung der Elektrisierung um eine kleine Größe δ so verschoben wäre, dass $\rho\delta = J$ ist.

323. Nun wollen wir annehmen, dass ein isotroper dielektrischer Körper der elektrischen Induction unterworfen wäre und dass die Elektrisierung eines jeden Elementes dieses Körpers der Resultierenden aller elektrischen Kräfte, welche auf das Element wirksam sind, proportional ist.

Die erwähnten Kräfte rühren zum Theile von dem elektrischen Felde her, in welchem der dielektrische Körper sich befindet, zum Theile aber auch von den Elektricitäten, welche durch die influencierende Wirkung im Dielektricum entstanden sind. Bezeichnet man die gesammte resultierende Kraft in einem Elemente des dielektrischen Körpers F, die Kraft des elektrischen Feldes in diesem Elemente f_1, jene der inducierten Elektricitätsmenge in ebendemselben Punkte f_2, so gilt die folgende Gleichung:

$$F = f_1 + f_2 \ldots (13).$$

Man hat ferner unter der oben gemachten Voraussetzung für die Elektrisierung des betrachteten Elementes:

$$J = \varkappa . F \ldots (14),$$

in welcher Gleichung $\varkappa$ den Coefficienten der inducierten Elektrisierung bedeutet. Die Gleichung (14), d. h. die Proportionalität zwischen der Elektrisierung und der elektrisierenden Kraft ist um so genauer, je kleiner der Coefficient $\varkappa$ ist, was für die Dielektrica, wie wir aus den experimentellen Untersuchungen ersehen werden, zutrifft. Wir wollen den Fall betrachten, in welchem der Coefficient $\varkappa$ in allen Richtungen constant ist, in welchem also der Körper isotrop ist; ferner sei angenommen, dass die influencierende elektrische Kraft und demzufolge auch die inducierte Elektrisierung nicht bedeutend

ist, da dann die oben ausgesprochene Proportionalität der Elektrisierung und der elektrisierenden Kraft ohneweiters erfüllt ist.

Nach diesen Voraussetzungen bezeichnen wir im Nachfolgenden V_1 das Potential des elektrischen Feldes, in welchem der dielektrische Körper sich befindet; V_2 sei jenes Potential, welches durch die inducierten Elektricitätsmengen in demselben Punkte, auf den sich V_1 bezieht, hervorgerufen wird; man hat dann als Gesammtpotential in diesem Punkte:

$$U = V_1 + V_2 \ldots (15)$$

und als Ausdruck für die Kraft in dem betrachteten Volumenelemente des dielektrischen Körpers:

$$F = -\frac{dU}{dn} \ldots (16)$$

wobei dn ein Element der Normale zur Niveaufläche ist, welche durch den ins Auge gefassten Punkt hindurchgeht.

Fassen wir die Formeln (14) und (16) zusammen, so erhalten wir

$$J = -\varkappa \frac{dU}{dn} \ldots (17)$$

und für die Componenten der Elektrisierung:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\varkappa \frac{\partial U}{\partial x} \\ B &= -\varkappa \frac{\partial U}{\partial y} \\ C &= -\varkappa \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \ldots (18).$$

Für die früher mit ρ bezeichnete cubische Dichte erhalten wir nun, wenn $\varkappa$ constant ist:

$$\rho = \varkappa \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

oder da nach der von Poisson aufgestellten, auf die zweiten Derivierten von U bezugnehmenden Gleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

ist, ergibt sich

$$\rho(1+4\pi\varkappa) = 0 \ldots (19).$$

Hieraus folgt, da $1+4\pi\varkappa$ von Null verschieden ist,

$$\rho = 0.$$

Es ist somit die elektrische Dichte in der ganzen Ausdehnung des Dielektricums Null; es findet sich in dem erwähnten Falle also Elektricität nur auf der Oberfläche des letzteren vor.

Die früher aufgestellte Formel (6) für das Potential des dielektrischen Körpers in einem äußeren Punkte nimmt mittelst der obigen Gleichungen (18) die folgende Gestalt an:

$$V = -\int\!\!\int\!\!\int \varkappa \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} dx\,dy\,dz. (20)$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung (15)

$$V = -\int\!\!\int\!\!\int \varkappa \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(V_1 + V_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V_1 + V_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(V_1 + V_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} dx\,dy\,dz.$$

Wir wollen fürderhin diese Gleichung nach der Clausius'schen Bezeichnungsweise folgendermaßen schreiben:

$$V = -\int\!\!\int\!\!\int \varkappa dv \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(V_1 + V_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \quad . \; . \; . \; (21).$$

Bezüglich des in unseren obigen Formeln auftretenden Coefficienten $\varkappa$ sei noch Folgendes bemerkt: Die Größe von $\varkappa$ hängt von der Natur des Dielektricums ab und kann je nach derselben die Werte von 0 bis ∞ besitzen. Für durch und durch nichtleitende Stoffe ist $\varkappa = 0$; für vollkommene Leiter ist $\varkappa = \infty$. Es wird später gezeigt werden, welche Werte $\varkappa$ für die verschiedenen Dielektrica annehmen kann und welche Umstände eine Variation dieser Größe bedingen können.

324. Princip der Erhaltung des Inductionsflusses. Mit Zuhilfenahme der oben abgeleiteten Gleichung $\rho = 0$ folgt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = o$$

im Innern eines dielektrischen Körpers. Bezeichnen wir demnach die Componenten der wirklichen Kraft F_1 in einem Punkte eines Dielektricums mit X_1, Y_1, Z_1, welche Kraft man mit dem Namen elektrostatische Induction belegt, so hat man als äquivalenten Ausdruck der oberen Gleichung:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} = o.$$

Es genügt somit die elektrostatische Induction der Laplace'schen Gleichung sowohl für alle inneren Punkte, als auch für alle jene Punkte, welche außerhalb des dielektrischen Mediums liegen.

Zu bemerken wäre noch, dass für alle äußeren Punkte die elektrische Kraft mit der elektrostatischen Induction zusammenfällt; denn für alle solchen Punkte ist die Elektrisierung J und deren Componenten A, B, C der Null gleich.

Wir wollen an dieser Stelle nun einige wichtige Bemerkungen einflechten, die uns vom großen Nutzen sein werden. Wir nennen Inductionslinie eine Curve, in deren jedem Punkte die Kraft der Induction tangentiell ist; unter Inductionsröhre verstehen wir einen Canal, der seitlich von Inductionslinien begrenzt ist. Inductionsfluss durch ein Element der Oberfläche nennen wir das Product aus der Fläche des Elementes in die normale Componente der elektrostatischen Induction.

Da nun, wie wir oben gehört haben, sowohl für alle äußeren als auch für alle innerhalb des dielektrischen Körpers gelegenen Punkte die Induction der Laplace'schen Gleichung genügt, so können wir auch sagen, der Inductionsfluss sei im ganzen Verlaufe einer Inductionsröhre eine constante Größe. Diesen Satz, aus dem wir weiter unten wichtige Folgerungen für die Theorie der Dielektrica ziehen werden, nennt man das Princip der Erhaltung des

Inductionsflusses. Bevor wir jedoch zur Ableitung dieser Consequenzen aus dem eben aufgestellten Grundsatze übergehen, soll eine nützliche Transformation der Gleichung für das Potential eines dielektrischen Körpers gezeigt werden.

325. Umgestaltung der Formel (21)([1]). Für manche spätere Untersuchungen erweisen sich gewisse Transformationen der oben aufgestellten Gleichung (21) vortheilhaft und es sollen vornehmlich aus diesem Grunde dieselben hier vorgenommen werden. Hierbei wollen wir vorderhand, um die Allgemeinheit nicht zu beeinträchtigen, den Coefficienten $\varkappa$ nicht als constant voraussetzen.

Es ist:

$$(22)\ldots\left\{\begin{aligned}
&\varkappa\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varkappa\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]-\\
&\qquad-\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\\
&\varkappa\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varkappa\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right]-\\
&\qquad-\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\\
&\varkappa\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\varkappa\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]-\\
&\qquad-\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right).
\end{aligned}\right.$$

Substituieren wir diese Werte in (21) und führen die Integration per partes aus, so erhalten wir:

$$\mathrm{V}=\iint\varkappa\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\mathrm{S}+$$
$$+\iiint\left(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2\right)\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dv\ldots(23)$$

wobei unter $d\mathrm{S}$ ein Oberflächenelement des dielektrischen Körpers verstanden wird und dn ein Element der in diesem

([1]) Man sehe Clausius. Die mechanische Behandlung der Elektricität (Braunschweig 1879) p. 79.

Oberflächenelemente nach innen errichteten Normale bezeichnet. Es ist nun weiter:

$$V = \int\int \varkappa \left(V_1 + V_2\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \int\int\int \varkappa \left(V_1 + V_2\right) \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv +$$
$$+ \int\int\int \left(V_1 + V_2\right) \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\, dv \ldots (24),$$

wo abkürzungshalber

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

gesetzt wurde.

Es lässt sich nun das erste der beiden Volumenintegrale leicht angeben und wir wollen folgende Fälle hierbei unterscheiden:

1. Fall. Jener Punkt mit den Coordinaten ξ, η, ζ, auf welchen das Potential V Bezug nimmt, liege außerhalb des Dielektricums; dieses specielle Potential werde mit V_e bezeichnet. Nach den an früherem Orte angestellten Rechnungen ist:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = o$$

und es wird demzufolge:

$$V_e = \int\int \varkappa \left(V_1 + V_2\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$
$$+ \int\int\int \left(V_1 + V_2\right) \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\, dv \ldots (25).$$

Ist $\varkappa$ constant, also keine Funktion der Coordinaten $x\, y\, z$ des Volumelementes, dann erhalten wir:

$$V_e' = \varkappa \int\int \left(V_1 + V_2\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS \;.\;.\;.\; (26),$$

also nur dann verhält sich das Dielektricum so, als ob Elektricität nur auf der Oberfläche in der Dichte $\sigma = J \cos \theta$ verbreitet wäre.

2. Fall. Ist der Punkt, auf welchen sich V bezieht, ein innerhalb des Dielektricums gelegener, dann hat man nach früheren Untersuchungen:

$$\iiint \varkappa \left(V_1 + V_2\right) \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = -\,4\pi \left\{\varkappa \left(V_1 + V_2\right)\right\}_0 \ldots (27),$$

wobei der Index o bedeuten soll, dass für den eingeklammerten Ausdruck der Wert desselben in dem betreffenden Punkte genommen werden muss. Dem entsprechend ist das Potential V_i in einem innerhalb des Dielektricums gelegenen Punkte:

$$V_i = -\,4\pi A + \iint \varkappa\,(V_1 + V_2)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$
$$+ \iiint (V_1 + V_2) \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \varkappa}{\partial x}\, dv \ldots (28),$$

wenn man abkürzungshalber:

$$\left\{\varkappa (V_1 + V_2)\right\}_0 = A$$

nennt. Bei homogenen dielektrischen Körpern wird:

$$V_i' = -\,4\,\pi\varkappa \left(V_1 + V_2\right)_0 + \varkappa \iint \left(V_1 + V_2\right) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS \;\ldots (29).$$

Eine Anwendung der eben erhaltenen Formeln für V_e und V_i wird später gelegentlich der Ableitung der vollständigen Gleichungen für Leydnerflaschen, in denen also der Einfluss der zwischen den Belegungen befindlichen dielektrischen Substanz berücksichtigt erscheint, gegeben werden.

Will man die Kraft finden, welche ein homogener dielektrischer Körper auf einen außerhalb oder innerhalb des Dielektricums gelegenen Punkt ausübt, so wird man sich der Formeln (26) und (29) bedienen, indem man die dort gegebenen Ausdrücke nach der Normalen differenziert, welche der Niveaufläche entspricht, die in diesem gegebenen Punkte gelegt werden kann.

326. Verhältnis der zur Oberfläche des Dielektricums normalen Kraftcomponenten in einem ausserhalb und innerhalb des letzteren liegenden Punkte. Wir sahen im Vorhergehenden, dass, wenn ein dielektrischer Körper von außen her der Einwirkung unveränderlicher elektrischer Kräfte ausgesetzt ist, deren Potential V_1 gegeben ist, dieser in einen Polarisationszustand geräth und es war das Potential (V_2), welches

der Körper seinerseits während dieses Zustandes auf beliebige äußere oder innere Punkte ausübt, gegeben durch:

$$(V_2)_p = \int\int \frac{J \cos \theta}{r} dS = \varkappa \int\int \frac{1}{r} \frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial n} dS,$$

wobei wir die Normale n nach innen gerichtet annehmen; ferner rechnen wir die Entfernung r stets vom Oberflächenelemente gegen den betreffenden Punkt.

Diese Formel sagt uns, dass das Potential V_2 als das Potential einer gewissen fingierten Oberflächenbelegung angesehen werden kann, deren elektrische Dichte durch:

$$\varkappa \frac{\partial}{\partial n} (V_1 + V_2)$$

bestimmt ist. Es folgt daraus eine Relation, welche uns zu einer wichtigen Gleichung in der Theorie der Dielektrica führen wird. Es ist nämlich nach den in der ersten Abtheilung erörterten Sätzen über die elektrische Flächenladung

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} + \frac{\partial V_2}{\partial n'} = - 4\pi\varkappa \frac{\partial}{\partial n} (V_1 + V_2),$$

wenn n' die nach außen gezeichnete Normale bedeutet.

Die letztere Gleichung können wir auch in folgender Weise schreiben:

$$\frac{\partial V_2}{\partial n'} + (1 + 4\pi\varkappa) \frac{\partial V_2}{\partial n} + 4\pi\varkappa \frac{\partial V_1}{\partial n} = o.$$

Wenn man ferner in Erwägung zieht, dass V_1 das Potential gegebener äußerer Elektricitätsmengen vorstellt, so müssen wir daraus schließen, dass in allen Punkten der Oberfläche des Dielektricums

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial V_1}{\partial n'} = o$$

ist. Addieren wir die beiden letzten Gleichungen, so erhalten wir schließlich:

$$\frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial n'} + (1 + 4\pi k) \frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial n} = o \ldots (30).$$

Nennen wir jene Componenten der elektrischen Kraft, welche normal zur Oberfläche des Dielektricums gerichtet sind und welche auf zwei der Oberfläche unendlich benachbarte Punkte wirken, von denen der eine im Dielektricum, der andere außerhalb desselben liegt, F_n und F'_n und rechnen wir beide in derselben Richtung, so ist

$$\left.\begin{aligned} F'_n &= -\frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial n'} \\ F_n &= \frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial n} \end{aligned}\right\} \ldots (31).$$

Mittelst dieser Gleichungen erhalten wir dann:

$$F'_n = (1 + 4\pi\varkappa)\, F_n$$

oder, wenn wir folgende Bezeichnung einführen:

$$1 + 4\pi\varkappa = \mu \ldots (32)$$

auch

$$\mu = \frac{F'_n}{F_n} \ldots (33).$$

Es ist somit für zwei Punkte, welche zu beiden Seiten der Oberfläche des Dielektricums liegen und unendlich benachbart sind, das Verhältnis der normalen Componenten der elektrischen Kraft constant und durch $1 + 4\pi\varkappa$ ausgedrückt. Dieses constante, mit μ kurzweg bezeichnete Verhältnis führt den Namen der Dielektricitätsconstante oder des specifischen Inductionsvermögens der dielektrischen Substanz (1).

Es ist der eben abgeleitete Satz eine Hauptconsequenz aus der von Poisson geschaffenen Theorie und die Gleichung (33) kann als Ausgangspunkt in der weiteren Theorie der Wirkung dielektrischer Körper betrachtet werden.

Es ist auch, wenn man von dieser Gleichung (33) ausgehen würde, die Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche des Dielektricums vollkommen bestimmt. Sehr leicht ergibt sich

(1) Den Namen „specifisches Inductionsvermögen" gebrauchte zuerst Faraday in seinen berühmten Experimentaluntersuchungen (Experimental Researches, 11, §. 1252, 1837).

nämlich die Dichte σ der Oberflächenschichte aus der Bedingung, dass zu beiden Seiten einer elektrisierten Oberfläche der Unterschied der normalen Kraftcomponenten gleich $4\pi\sigma$ ist; demnach wird man haben:

$$F_n - F'_n = F_n(1 - \mu) = 4\pi\sigma = F'_n\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)$$

und daher:

$$\sigma = \frac{F'_n}{4\pi}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \ldots (34),$$

in welch' letzterer Gleichung F'_n eben die normale Kraftcomponente außerhalb des Dielektricums ist. Unsere bisher angestellten Rechnungen kommen also, wie schon mehrfach erwähnt wurde, darauf hinaus, auf der Oberfläche des Dielektricums eine Elektricitätsschichte *anzunehmen*, deren Dichte durch die obige Formel (34) gegeben ist.

Eine nicht unwesentliche Bemerkung soll hier noch gemacht werden. Wir sahen bereits in der ersten Abtheilung dieses Werkes, dass die Dichte der Elektricität an der Oberfläche eines Conductors dargestellt wird durch:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} F'_n,$$

wenn wieder F'_n die normale Kraftcomponente in dem betreffenden Oberflächenelemente ist. Substituieren wir an Stelle des Leiters ein Dielektricum, so verhalten sich also die Dinge so, als ob ein constanter Bruchtheil des Kraftflusses durch die auf der Oberfläche des Dielektricums angenommene Elektricitätsschichte absorbiert worden wäre: dieser Bruchtheil beträgt $1 - \frac{1}{\mu}$.

327. Gleichung an der Trennungsfläche zweier verschiedener Dielektrica. Nehmen wir nun allgemein an, dass zwei dielektrische Substanzen, deren specifische Inductionsvermögen resp. μ_1 und μ_2 sind, durch eine Trennungsfläche S getrennt werden, so können wir, wenn wir die normalen Componenten zu beiden Seiten der Oberfläche $(F_n)_1$ und $(F_n)_2$ bezeichnen, in ganz analoger Weise wie früher deducieren, dass diese Kräfte den specifischen Inductionsvermögen umgekehrt proportional sind, dass man also hat:

$$\frac{(F_n)_1}{(F_n)_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

oder $$\mu_1 (F_n)_1 = \mu_2 (F_n)_2 \ldots (35),$$

eine Gleichung, die sich auch direct als eine Consequenz des Principes der Erhaltung des Inductionsflusses ergibt.

Die Dichte der Elektricitätsschichte, welche man auf der Trennungsfläche der beiden Dielektrica anzunehmen hat, damit dieser Bedingung Genüge geschehe, ist dargestellt durch:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left[(F_n)_2 - (F_n)_1\right] = \frac{1}{4\pi}(F_n)_1\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) \ldots (36).$$

Während μ_1 und μ_2 die Dielektricitätsconstanten der beiden Medien im absoluten Sinne genommen darstellen, bedeutet der Quotient $\frac{\mu_2}{\mu_1}$, wenn wir als erste Substanz Luft annehmen und deren specifisches Inductionsvermögen μ_1 gleich der Einheit setzen, die Dielektricitätsconstante der zweiten Substanz im relativen Sinne, d. h. auf jene der Luft bezogen. Wir werden später zeigen, dass man dieser so bestimmten Dielektricitätsconstante eine noch andere Definition zugrunde legen kann.

Setzen wir in der obigen Gleichung (36)

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = m = 1 + 4\pi K$$

somit:

$$K = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4\pi\mu_2} \ldots (37),$$

so ist

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(F_n)_1 (m - 1) \ldots (38).$$

Wenn wir diese Formel in Vergleichung mit (34) ziehen, so erkennen wir, dass die oberflächliche Elektricitätsschichte an der Trennungsfläche der beiden Dielektrica dieselbe ist, als ob das zweite Medium durch ein solches ersetzt worden wäre, welches das specifische Inductionsvermögen eins hat, also durch Luft, und gleichzeitig das specifische Inductions-

vermögen des ersten Mediums durch $\frac{1}{m} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{1+4\pi K}$ ersetzt worden wäre.

328. Gesetz der Brechung der Kraft oder des Kraftflusses. Nehmen wir (Fig. 130) eine Fläche S, welche zwei dielektrische Substanzen von dem specifischen Inductionsvermögen μ_1 und μ_2 trennt, an und setzen wir voraus, dass die Kraft F_1 im ersten Medium mit der Normale den Winkel φ_1, die Kraft im zweiten Medium mit ebenderselben Linie den Winkel φ_2 bilde, so ist:

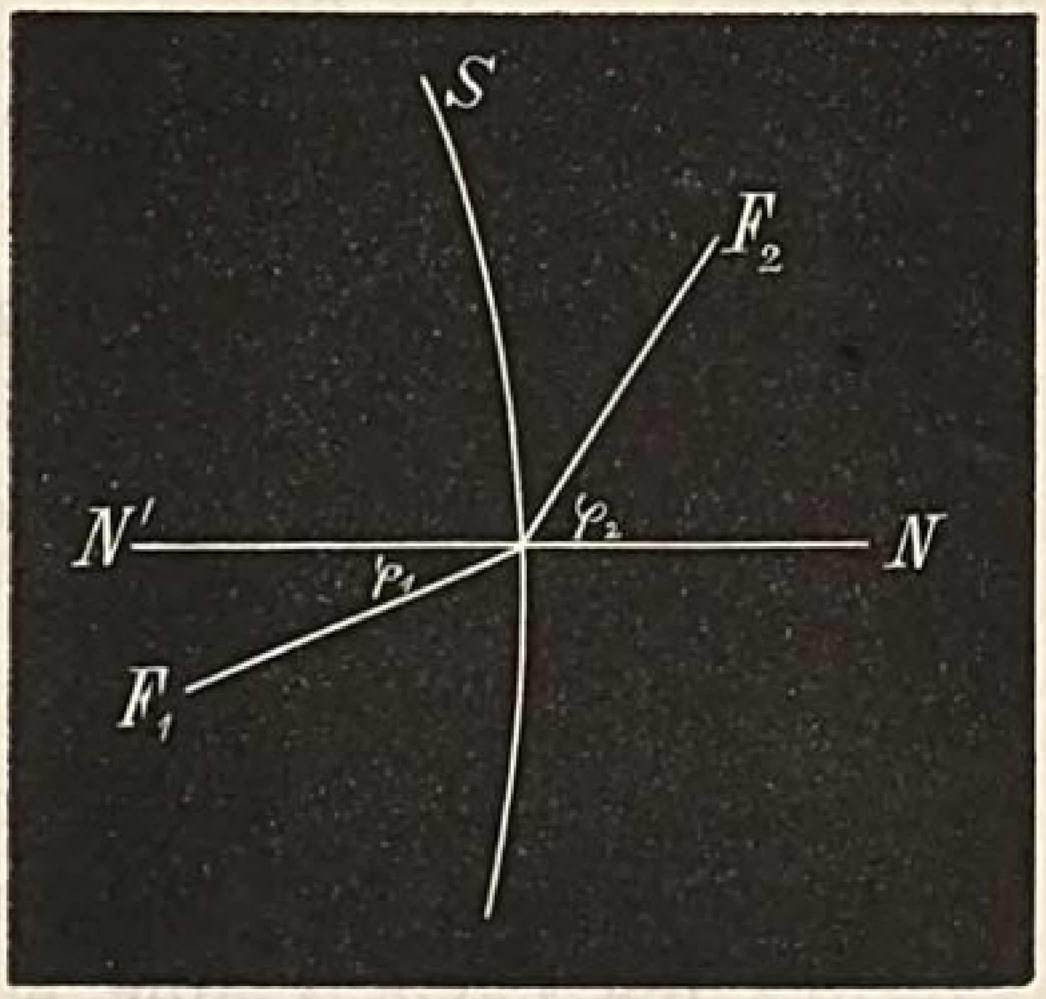


Fig. 130.

$$\left.\begin{aligned}(F_n)_1 &= F_1 \cos \varphi_1 \\ (F_n)_2 &= F_2 \cos \varphi_2\end{aligned}\right\}\ldots (39)$$

und nach der Gleichung (35):

$$F_1\mu_1 \cos \varphi_1 = F_2\mu_2 \cos \varphi_2 \ldots (40).$$

Die zur Oberfläche tangentiellen Componenten der Kräfte F_1 und F_2 in den beiden Medien sind an diesen Flächen einander gleich und es ist demzufolge:

$$F_1 \sin \varphi_1 = F_2 \sin \varphi_2 \ldots (41).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (40) und (41) folgern wir

$$\frac{tg\ \varphi_1}{\mu_1} = \frac{tg\ \varphi_2}{\mu_2}$$

oder:

$$\frac{tg\ \varphi_1}{tg\ \varphi_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \ldots (42).$$

Diese Formel, welche man zuweilen als das Gesetz der Brechung der Kraft oder des Kraftflusses in jenem Augenblicke, in welchem die Kraft von einem dielektrischen Medium in ein anderes übergeht, bezeichnet hat, sagt aus, dass die Tangente des Einfallswinkels zur Tangente des Brechungswinkels der Kraft in demselben Ver-

hältnisse wie das specifische Inductionsvermögen des ersten Mediums zu jenem des zweiten steht.

Bevor wir zu weiteren Folgerungen aus den eben geführten Betrachtungen übergehen, wollen wir zeigen, wie man die Gleichung an der Trennungsfläche zweier Dielektrica noch auf anderem einfacheren Wege erhalten kann.

329. Andere Ableitung der charakteristischen Gleichung an der Trennungsfläche zweier dielektrischen Medien. Die nachfolgende Darstellungsweise ist im allgemeinen jene, welche von H. Helmholtz (1) und nach ihm auch von anderen Physikern, z. B. von H. A. Lorentz (2) eingehalten wurde.

Bekanntlich gelten für den Fall, dass man ein Leitersystem gegeben hat, folgende Bedingungen:

1. Das Potential U ist durchwegs continuierlich; es nimmt dasselbe für jeden Leiter einen constanten Wert an und ist im unendlichen Abstande von dem elektrischen Systeme Null.

2. Für alle jene Punkte, welche zwischen den Leitern liegen, gilt die Laplace'sche Gleichung:

$$\Delta U = o.$$

3. An der Oberfläche jedes Leiters gilt die Gleichung:

$$a\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) + 4\pi\sigma = o,$$

wenn σ die Flächendichte auf dem betreffenden Leiter bedeutet und wenn die eingeklammerten Werte der Differentialquotienten sich auf die Oberfläche des Leiters beziehen. Die Größen a, b, c stellen hierbei die Cosinus jener Winkel dar, welche die zur Oberfläche des Leiters nach außen gezogene Normale mit den Coordinatenaxen bildet.

Diese Bedingungen genügen, um mannigfaltige Probleme der Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche von Leitern aufzulösen.

(1) H. Helmholtz, über die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 72, Seite 57—129; auch wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig, J. A. Barth 1882, Seite 611—614).

(2) H. A. Lorentz, over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht. Arnhem, 1875 (p. 35—36).

Nehmen wir nun jetzt an, dass der Raum zwischen den Leitern von Dielektrica erfüllt sei. In diesem Falle hängt der gesammte Wert der Potentialfunction nicht mehr allein von der auf der Oberfläche der Leiter befindlichen Elektricität ab, sondern es übt auch die Elektricität, welche auf der Oberfläche der Dielektrica ausgebreitet gedacht werden muss, um die Polarisation im Inneren zu ersetzen, einen beträchtlichen Einfluss auf die Erscheinungen aus.

Die erste der oben angeführten Bedingungen ist auch, wie man sich leicht überzeugen kann, in diesem Falle erfüllt. Auch die zweite Bedingung behält ihre Giltigkeit. Wir sahen nämlich früher (Gleichung 19), dass in dem betrachteten Falle die cubische Dichte des Dielektricums ρ der Null gleich und deshalb innerhalb des Dielektricums, also in dem Raume zwischen den Leitern

$$\Delta \, U = o$$

ist.

Die dritte oben angegebene Bedingung aber erleidet eine Änderung. Es ist nämlich an der Oberfläche eines Conductors nicht mehr allein die Elektricität, die auf demselben sich befindet, in Rechnung zu ziehen, sondern außerdem die elektrische Schichte, welche an der Grenze der dem System angehörenden Conductoren und des umgebenden Mediums sich befindet. Nennen wir die elektrische Dichte dieser Grenzschichte σ_1, so hat man:

$$a\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) + 4\pi\,(\sigma + \sigma_1) = o \quad . \; . \; . \; (43).$$

Es ist nun, wie aus der ersten der Gleichungen (10) hervorgeht:

$$\sigma_1 = -(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c),$$

da man in Erwägung ziehen muss, dass die Normale zur Oberfläche des Dielektricums entgegengesetzt, wie die auf der Leiteroberfläche stehende Normale gerechnet werden muss. Substituieren wir diesen Wert in (43), so wird, wenn man außerdem beachtet, dass

$$\sigma_1 = \varkappa \left\{ a \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + b \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + c \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \right\}$$

ist:

$$(1 + 4\pi\varkappa) \left\{ a \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + b \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + c \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \right\} + 4\pi\sigma = o$$

oder:

$$\mu \left\{ a \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + b \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + c \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \right\} + 4\pi\sigma = o \ldots (44)$$

Diese für die Oberfläche der Leiter in diesem Falle charakteristische Gleichung sagt im Grunde nichts anderes als die früher aufgestellte Formel:

$$\mu = \frac{F'_n}{F_n}$$

aus.

Befinden sich verschiedene dielektrische Medien zwischen den Leitern des elektrischen Systems, so ist es noch nothwendig, ein Gleichungssystem aufzustellen, welches auf die Grenzfläche zweier dielektrischen Medien Bezug hat.

Betrachten wir noch in derselben Weise wie früher die Trennungsfläche zweier verschiedenen Medien, die durch die Indices 1 und 2 unterschieden werden sollen. Die zur Trennungsfläche gezeichnete Normale sei gegen das Medium 2 gerichtet. Zufolge der dielektrischen Polarisation haben wir an der Trennungsfläche der beiden Medien eine Flächenladung mit der elektrischen Dichte:

$$\sigma' = a(A_1 - A_2) + b(B_1 - B_2) + c(C_1 - C_2) \ldots (45),$$

wenn A, B, C die früher angegebene Bedeutung haben. Aus (45) folgt daher für die Oberfläche die Gleichung:

$$a(A_1 - A_2) + b(B_1 - B_2) + c(C_1 - C_2) = \frac{1}{4\pi} \left\{ a \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2 \right] + b \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_2 \right] + c \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_2 \right] \right\} \ldots (46).$$

Setzt man nun für A, B, C die bekannten Werte ein, so ist:

$$(1+4\pi\varkappa_1)\left\{a\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_1+b\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_1+c\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_1\right\}=$$

$$=(1+4\pi\varkappa_2)\left\{a\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_2+b\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_2+c\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_2\right\}\ldots (47)$$

und dies ist die gesuchte Gleichung an der Trennungsfläche zweier verschiedenen dielektrischen Medien. Diese Gleichung ist identisch mit der früher aufgestellten Gleichung:

$$\mu_1 (F_n)_1 = \mu_2 (F_n)_2,$$

welche man als Continuitätsgleichung bezeichnen kann.

330. Zusammenstellung der charakteristischen Gleichungen für ein Dielektricum. Wenn man das Princip der Erhaltung des Inductionsflusses auf ein Volumenelement $dx.dy.dz.$ eines dielektrischen Körpers, dessen specifisches Inductionsvermögen μ ist, anwendet und die Annahme macht, dass in dem betreffenden Volumenelement die wirkliche Dichte der Elektrisierung ρ ist, so erhält man — ganz in derselben Weise vorgehend wie bei der Deduction der Poisson'schen Gleichung —

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial z}\right)+4\pi\rho=o\ldots (48),$$

welche Gleichung für ein isotropes Dielektricum übergeht in:

$$\mu\,\Delta\,U+4\,\pi\,\rho=o\ldots(49).$$

An der Grenzfläche zweier Medien wird man im allgemeinen zwei Dichten zu unterscheiden haben; die eine Dichte entspricht jener Elektricitätsschichte, welche man auf der Oberfläche des Dielektricums anzunehmen hat, um die Wirkung der inneren molekularen Polarisation auf einen äußeren Punkt zu ersetzen, sie sei σ und werde elektrische Dichte der fingierten Schichte genannt; außerdem könnte z. B. durch Reibung auf der Trennungsfläche eine Elektricitätsschichte entwickelt werden, deren Dichte wir mit σ' bezeichnen wollen und die reelle Elektricitätsschichte genannt werden kann. Man hat dann nach dem Obigen, wenn man mit U_1 und U_2 die Potentialwerte in den beiden Medien bezeichnet und

wenn man die Normalen von der Trennungsfläche der Medien aus in die letzteren hinein rechnet:

$$\frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \frac{\partial U_2}{\partial n_2} + 4\pi(\sigma + \sigma') = o \ldots (50)$$

$$\mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2} + 4\pi\sigma' = o \ldots (51).$$

Diese drei Gleichungen (48) (50) (51) sind die charakteristischen Gleichungen des Dielektricums. Hat das letztere weder im Innern noch an seiner Oberfläche Elektricität erhalten, ist es also vollkommen isoliert und hat es vom Anfang an seiner Oberfläche keine Ladung, dann ist $\rho = o$, $\sigma' = o$ und es werden die charakteristischen Gleichungen:

$$\Delta U = o \ldots (48^*)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \frac{\partial U_2}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = o \ldots (50^*)$$

$$\mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n_2} = o \ldots (51^*).$$

Die beiden letzten Formeln können dazu verwendet werden, die Dichte der fingierten elektrischen Schichte, welche sich auf der Trennungsoberfläche der beiden Dielektrica befindet, zu rechnen; es ist nämlich

$$\sigma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4\pi\mu_2} \frac{\partial U_1}{\partial n_1} \ldots (52).$$

Bezüglich dieser fingierten Schichte wäre noch Folgendes zu bemerken: Diese fingierte Ladung auf der Oberfläche des Dielektricums verschwindet, wenn die inducierende Kraft vom letzteren entfernt wird. Faraday(¹) hat aber schon darauf aufmerksam gemacht, dass man, wenn das Dielektricum der Induction unterworfen wird und man dessen Oberfläche in irgendeiner Weise, etwa durch eine mit dem Erdboden verbundene Flamme, in den neutralen Zustand versetzt und

(¹) Faraday, Remarks on Static Induction; Proc. R. S. 1858; man sehe auch: Maxwell l. c. (deutsche Übersetzung von Dr. B. Weinstein, p. 99).

dann die inducierenden Elektricitätsmengen entfernt, auf der Oberfläche des Dielektricums sich eine reelle Elektricitätsschichte von der Dichte — σ vorfindet.

Wenn man an diesen Betrachtungen festhält, kann man die elektrischen Eigenschaften einer Gruppe von Körpern, die unter dem Namen pyroelektrische Krystalle mit einer Axe bekannt sind und zu denen unter anderen der Turmalin gehört, erklären (¹). Man braucht diesfalls nur die Annahme zu machen, dass der normale Zustand derartiger Körper analog jenem ist, welchen die dielektrischen Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte annehmen oder dass sie von Natur aus polarisiert sind und dass ihr Polarisationszustand eine von der Temperatur abhängige Größe ist.

Ein scheinbar neutraler Turmalinkrystall ist von der Beschaffenheit, dass er zufolge seiner dielektrischen Polarisation außen dieselbe Wirkung hervorrufen würde, wie eine auf seiner Oberfläche befindliche Elektricitätsschichte, deren gesammte Masse Null ist und deren Dichte durch σ gegeben ist, welche aber zufolge irgendwelcher Ursachen, z. B. der Elektricitätszerstreuung oder der Berührung mit dem umgebenden Medium sich mit einer reellen Elektricitätsschichte von der Dichte — σ überdeckt, welch' letztere die Wirkung der inneren Polarisation für jeden äußeren Punkt aufhebt. Variiert man nun die Temperatur des Krystalles, so ändert man auch den inneren Polarisationszustand desselben, nicht aber die auf der Oberfläche entwickelte Elektricitätsschichte; es ist also nun das Gleichgewicht gestört und wird sich unter der Wirkung von Ursachen, welche die frühere Neutralisation herbeigeführt haben, in einer mehr oder weniger langsamen Weise wieder herstellen. Die Wirkung, welche der Turmalinkrystall nach außen ausübt und die man zu beobachten Gelegenheit hat, ist der Unterschied der Wirkungen der hypothetischen Elektricitätsschichte und der reellen.

331. Weitere Folgerungen aus dem Vorigen. Wenn sich zwischen den Conductoren eines Systems ein und dasselbe

(¹) Man sehe das öfter citierte Werk von Mascart und Joubert p. 118.

dielektrische Medium befindet, dann haben wir in den auf die Wirkung eines derartigen Systems bezugnehmenden Rechnungen folgenden früher angegebenen Bedingungen zu genügen:

1. Das Potential ist durchwegs continuierlich, für jeden Leiter nimmt es einen constanten Wert an und in einem von dem Leitersysteme unendlich fernen Punkte wird es Null.

2. Für alle jene Punkte, welche zwischen den Leitern liegen, ist $\Delta U = o$.

3. An der Oberfläche jedes Leiters gilt die Gleichung:

$$\mu \left\{ a \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + b \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \right\} + 4\pi\sigma = o.$$

Nehmen wir nun zwei *vollkommen identische Leitersysteme* an, von denen im ersteren *Luft*, deren specifisches Inductionsvermögen $\varkappa_0$ genannt werden soll, im zweiten ein *anderes dielektrisches Medium* mit dem specifischen Inductionsvermögen $\varkappa_1$ zwischen den Leitern sich befindet. Den beiden Systemen denken wir uns solche Ladungen ertheilt, dass das Potential auf einem jeden Leiter einen bestimmten und für beide Systeme gleichen Wert erhält.

Fragen wir nun nach der Elektricitätsmenge, welche sich auf jedem Leitersystem befindet. Man kann zunächst aus den ersten zwei Bedingungen das Potential suchen und dann aus der Bedingung 3) den Wert von σ bestimmen. Da die beiden Bedingungen für die beiden betrachteten Systeme dieselben sind, so ist auch das Potential U dasselbe. Aus der dritten Bedingung aber erfahren wir, dass σ für die beiden Systeme nicht denselben Wert hat. Es ergibt sich nämlich für die eine Gruppe von Leitern die Gleichung:

$$v \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + b \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{4\pi\sigma_0}{1 + 4\pi\varkappa_0} = o;$$

für die zweite Gruppe von Leitern, zwischen welchen das Dielektricum mit dem specifischen Inductionsvermögen $\varkappa_1$ sich befindet:

$$a \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + b \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{4\pi\sigma}{1 + 4\pi\varkappa_1} = o.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\sigma = \frac{1 + 4\pi\varkappa_1}{1 + 4\pi\varkappa_0}\,\sigma_0 \ldots (53).$$

Man findet somit im zweiten System einen Wert von σ, der $\frac{1 + 4\pi\varkappa_1}{1 + 4\pi\varkappa_0}$ mal größer als jener im ersten System ist. Es erscheinen deshalb auch alle Elektricitätsmengen im zweiten Systeme in demselben Verhältnisse vergrößert.

Das Vorstehende bildet eine Erklärung der berühmten Versuche von Faraday, die am Ende dieser Abtheilung in aller Ausführlichkeit mitgetheilt werden, dass nämlich, wenn man die Belegungen zweier vollkommen identischen, etwa sphärischen Leydnerflaschen miteinander verbindet, eine bestimmte Elektricitätsmenge, welche diesen Leitern mitgetheilt wird, sich nicht in gleiche Theile unter die beiden Leydnerflaschen theilt, wenn man als isolierende Substanz in der einen Luft, in der anderen ein anderes Dielektricum, z. B. Schwefel oder Harz verwendet. Es lehrt der Versuch, dass die Leydnerflasche mit der festen dielektrischen Zwischensubstanz eine größere Ladung empfängt. Wir werden auf die Theorie der Condensatoren unter Berücksichtigung der zwischen den Belegungen befindlichen isolierenden Substanz bald zurückkommen und es sei hier nur noch erwähnt, dass bereits Musschenbroeck im Jahre 1746 und Wilke im Jahre 1776 fanden, dass Leydnerflaschen von verschiedenen Glassorten eine verschiedene Ladung erhalten, wenn sie sonst vollkommen identisch sind, eine Beobachtung, die auch von Cuthbertson gemacht wurde.

332. Auch die mechanische Wirkung, die zwischen elektrischen Systemen besteht, wird durch das Vorhandensein der Dielektrica modificiert. Wir können dies in folgender Weise zeigen([1]). Es ist früher gezeigt worden, dass die Arbeit, welche man aufwenden muss, um die auf dem Leitersysteme vorhandene Elektricität vom unendlichen Abstande auf die Leiter selbst zu bringen, ausgedrückt wird durch:

([1]) H. A. Lorentz, l. c. p. 38—40.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum m\,\mathrm{V} \ldots (54)$$

wenn m die auf einem Leiter befindliche Elektricitätsmenge, V das Potential desselben bedeutet und die Summe auf sämmtliche Conductoren des Systems ausgedehnt wird. Aus diesem Werte kann man leicht die Kraft finden, welche auf einen Leiter durch die anderen ausgeübt wird. Verrückt man nämlich den ersten Leiter unendlich wenig, während alle Leiter ihre Ladungen behalten, und nimmt bei der Verrückung $\mathfrak{T}$ um $d\mathfrak{T}$ zu, dann müssen die Kräfte hiebei eine Arbeit $-d\mathfrak{T}$ geleistet haben. Wie man unschwer ersieht, kann man aus derartigen Betrachtungen die elektrostatischen Anziehungen und Abstoßungen leicht kennen lernen.

Nach diesen einleitenden Erörterungen nehmen wir wieder zwei identische Leitersysteme I und II an; im einen sei zwischen den Leitern kein dielektrisches Medium, es sei etwa der Zwischenraum luftleer gemacht, im anderen Leitersysteme befinde sich zwischen den Conductoren ein Stoff mit dem specifischen Inductionsvermögen $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$. Geben wir nun den Systemen dieselben Ladungen, dann hat V und deshalb $\mathfrak{T}$ nach der obigen für letztere Größe geltenden Formel einen $1 + 4\pi\varkappa$-mal kleineren Wert im Systeme II als in I. Bei derselben unendlich kleinen Verrückung muss auch zwischen $d\mathfrak{T}$, deshalb auch zwischen der Arbeit der mechanischen Kräfte in den beiden Systemen dieselbe Beziehung bestehen, es sind also auch die Kräfte im zweiten Systeme $1 + 4\pi\varkappa$-mal kleiner als im ersten.

Zwei elektrische Massenpunkte E befänden sich nun in der Entfernung 1 voneinander, dann ist deren elektrostatische Abstoßung im ganzen luftleeren Raume E^2; in einem Raume mit der Constanten $\varkappa$ wird die Abstoßung ausgedrückt werden durch

$$\frac{\mathrm{E}^2}{1 + 4\pi\varkappa} = \mathrm{E}_1{}^2$$

und daraus erhält man:

$$\mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{1 + 4\pi\varkappa}} = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mu}} \ldots (55)$$

Wenn wir also in einem Raume eine Abstoßung messen und daraus die Elektricitätsmengen berechnen, so erhalten wir die eigentlichen Elektricitätsmengen, welche in gleicher Quantität aufeinander wirken, aus der Gleichung:

$$E = E_1 \sqrt{\mu}.$$

Es erscheint also die Größe der aufeinander wirkenden Elektricitätsmengen, elektrostatisch gemessen, im Verhältnisse von $\sqrt{\mu} : 1$ durch den Einfluss des Dielektricums, in dem sie liegen, verkleinert; die Bestimmung der elektrostatischen Einheit der Elektricität gibt daher, wenn sie im Innern eines dielektrischen Isolators vorgenommen wird, diese Einheit im Verhältnisse von $\sqrt{\mu} : 1$ zu groß an.

Eine ganz analoge Betrachtung wie die obige lehrt uns, dass wenn in den beiden Systemen I und II das Potential denselben Wert hat, die Anziehung oder Abstoßung im zweiten Systeme einen $1 + 4\pi\varkappa$ oder μ-mal größeren Wert als im ersten Systeme hat.

Silow[1] hat auf Veranlassung des Professors Helmholtz im Jahre 1875 den aus der Theorie gefolgerten Satz bezüglich, der Wirkungen zweier Elektricitätsmengen in einem Dielektricum bestätigt gefunden, dass nämlich, wenn zwei Elektricitätsmengen e und e' in einem solchen Medium aufeinander wirken, diese Wirkung dieselbe ist, wie jene zweier Elektricitätsmengen $\frac{e}{\sqrt{\mu}}$ und $\frac{e'}{\sqrt{\mu}}$ in der Luft, wo μ das relative specifische Inductionsvermögen, d. h. jenes auf Luft bezogene Inductionsvermögen der betreffenden Substanz ist. Als letztere wurde von Silow in seinen Versuchen Terpentinöl (specifisches Inductionsvermögen = 2·22) gewählt.

333. Energie eines Systems im Falle eines beliebigen Dielektricums. Die gesammte Energie eines Systemes ist:

$$W = \frac{1}{2}\int U\rho dv,$$

wenn U das Potential in einem Punkte des Dielectrikums ist in welchem die elektrische Dichte ρ herrscht. Es war

$$\mu \Delta U = -4\pi\rho$$

[1] Pogg. Ann. Bd. 156, p. 389.

und darum

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int \mu U \Delta U dv \quad ..(56).$$

Eine Formel von Green lautet bekanntlich (1. Abtheilung p. 323):

$$\int U\Delta U\, dv = \int U\frac{\partial U}{\partial n} dS - \int F^2 dv.$$

Diese Formel kann man anwenden auf ein Volumen, das von einer Kugel mit sehr großem Radius R begrenzt wird, welche das betrachtete System völlig einschließt. Es ist dann das erste Glied der rechten Seite der Gleichung auf die Oberfläche der Kugel zu beziehen. Man erkennt leicht, dass der Ausdruck unter dem Oberflächenintegrale R umgekehrt proportional und mit dem Unendlichwerden der letzten Größe gegen Null convergiert.

Man erhält nun für die Größe W:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu\, F^2\, dv \ldots (57)$$

und somit als Energie für die Einheit des Volumens den Ausdruck:

$$W = \frac{1}{8\pi}\mu F^2 \ldots (58).$$

334. Vergleichung der Phänomene der Dielektricität mit denen der Wärmeleitung. Bekanntlich ist der Wärmefluss in einem Punkte durch die Einheit der Oberfläche der durch diesen Punkt gehenden isothermischen Fläche bestimmt durch die Formel

$$Q = -k\frac{dt}{dn},$$

wenn k den Wärmeleitungs-Coefficient des Mediums, t die Temperatur in der betreffenden Isotherme und n die Normale zu derselben bedeutet. Daraus folgt leicht, dass der Wärmefluss durch ein Element einer beliebigen Oberfläche der partiellen Derivierten der Temperatur im Medium nach der Normalen zur besagten Oberfläche proportional ist. Durch

Vergleichung der obigen Formel mit der entsprechenden Formel für den Elektricitätsfluss folgt, dass, wenn der Coefficient der Wärmeleitung gleich der Einheit ist, der Wärmefluss durch eine isothermische Fläche numerisch gleich dem elektrischen Kraftflusse durch eine Potential-Niveaufläche ist, welche in jeder Beziehung mit der Isotherme zusammenfällt; ist jedoch der Wärmeleitungs-Coefficient k, so ist der Wärmefluss k-mal größer, als der entsprechende Fluss der elektrischen Kraft.

Fassen wir jetzt zwei entsprechende Systeme ins Auge, das eine sei ein elektrisches, das andere ein calorisches System. Jedes sei aus zwei Medien gebildet, die durch eine und dieselbe Fläche S getrennt sind; ferner fallen die Isothermen des einen Systemes mit den äquipotientalen Flächen des anderen zusammen. Im calorischen Systeme seien k_1 und k_2 die Wärmeleitungs-Coefficienten der beiden aneinanderstoßenden Medien; dann ist der Wärmefluss durch ein Element dS der Trennungsfläche im ersten Medium

$$k_1 \frac{dV_1}{dn_1} dS$$

und im zweiten

$$-k_2 \frac{dV_2}{dn_2} dS.$$

Sobald das Wärmegleichgewicht erreicht ist, sind diese beiden Strömungen gleich und man hat

$$k_1 \frac{dV_1}{dn_1} + k_2 \frac{dV_2}{dn_2} = o \ldots (59).$$

Wie wir früher gelegentlich der Zusammenstellung der charakteristischen Gleichungen für ein Dielektricum gesehen haben, erhält man, wenn man im oben betrachteten elektrischen Systeme μ_1 und μ_2 die specifischen Inductionsvermögen der beiden durch die Ebene S getrennten Medien bezeichnet:

$$\mu_1 \frac{dV_1}{dn_1} + \mu_2 \frac{dV_2}{dn_2} = o \ldots (60)$$

Daraus schließt man:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_1}{k_2} \ldots (61).$$

Es sind also die Inductionsflüsse den Wärmeflüssen proportional und es spielt das specifische Inductionsvermögen in den elektrischen Problemen dieselbe Rolle wie die Wärmeleitungsfähigkeit in den calorischen Problemen.

Anwendung der allgemeinen Theorie der dielektrischen Wirkung auf einige specielle Fälle.

335. Berechnung der Wirkung eines Kugelcondensators, zwischen dessen Belegungen ein Dielektricum sich befindet. Wir wollen im Nachfolgenden die Variation der Potentialdifferenz auf den beiden Belegungen eines Condensators rechnen, wenn man zwischen dieselben verschiedene dielektrische Substanzen einführt.

Hierbei sei der Einfachheit halber ein Kugelcondensator angenommen; dieser Fall ist auch von praktischer Wichtigkeit, weil mehrere experimentelle Forschungen über die Wirkung dielektrischer Substanzen mit solchen Condensatoren unternommen wurden. Es soll die einfache Rechnung, wie sie von L. Boltzmann[1] angegeben wurde, im Folgenden zur Darstellung gelangen.

In der folgenden Figur ist ein Stück des Kugelcondensators gezeichnet; I bedeute die innere, IV die äußere Belegung desselben. Wir denken uns die zwischen den Belegungen befindliche dielektrische Substanz, welche den zwischen den Kugelflächen II und III befindlichen Raum einnimmt, in concentrische Kugelschalen zerlegt. Ist die Belegung I positiv elektrisch, so wird auf der Innenseite jeder Kugelschale eine negative Elektricitätsmenge —q vorhanden sein, auf der

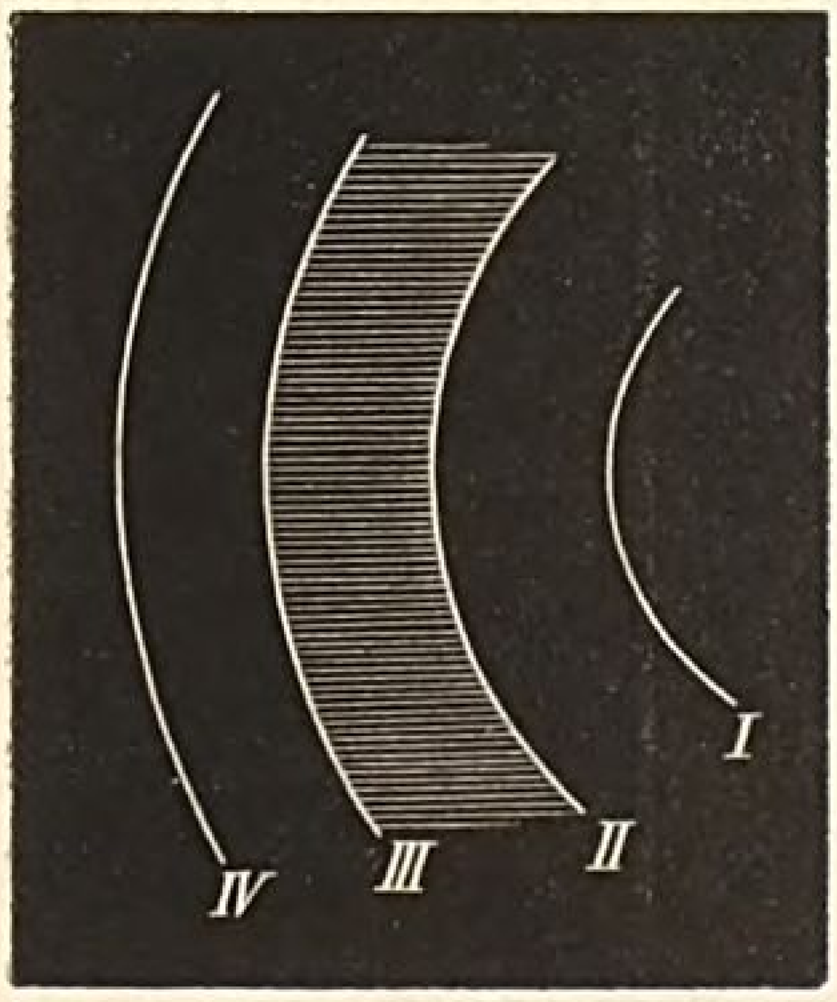


Fig. 131.

[1] L. Boltzmann, Wiener Sitzungsberichte Bd. 67; auch Pogg. Ann. Bd. 151.

Außenseite derselben wird eine ebenso große positive Elektricitätsmenge +q sich befinden. Die aneinanderliegenden entgegengesetzten Elektricitätsschichten heben sich in ihren Wirkungen nach außen auf und es bleibt nur auf II die Elektricitätsmenge —q, auf III die Elektricitätsmenge +q übrig. Nehmen wir an, die innere Belegung, welche die Elektricitätsmenge $+e$ besitze, sei auf das Potential V gebracht, die äußere Belegung sei mit der Erde leitend verbunden, besitze somit das Potential Null. Unter der influencierenden Wirkung der inneren Belegung und des Dielektricums bilde sich auf der äußeren Belegung eine Elektricitätsschichte $-e_1$.

Das Potential in einem beliebigen Punkte der äußeren Belegung, dessen Entfernung vom Mittelpunkte des Kugelcondensators x sei, ist unter den eben gemachten Voraussetzungen nach den bekannten Sätzen über die Wirkung von Kugelflächen:

$$\frac{e}{x} - \frac{e_1}{x} + \frac{q}{x} - \frac{q}{x} = o,$$

woraus augenblicklich

$$e = e_1 \ldots (1)$$

folgt. Man hat demzufolge als Ausdruck des Potentiales auf der inneren Belegung des Condensators die Gleichung:

$$V = \frac{e}{a_1} - \frac{q}{a_2} + \frac{q}{a_3} - \frac{e}{a_4} \ldots (2),$$

wenn man mit a_1, a_2, a_3, a_4 die Halbmesser der Kugelflächen I, II, III, IV bezeichnet.

Es ist nun unsere weitere Aufgabe, die Elektricitätsmenge q als Function der Elektricitätsquantität e auszudrücken und dies kann in folgender einfacher Weise direct ausgeführt werden.



Fig. 132.

Denken wir uns (Fig. 132) aus der dielektrischen Substanz eine unendlich dünne Kugelschale herausgezeichnet, deren Dicke dr sei; wir nehmen auf der Innenseite dieser Kugelschale ein Flächenelement dw an,

über welches wir uns ein Volumenelement dv der Kugelschale construiert denken; dasselbe ist

$$dv = dw \,.\, dr.$$

Nennen wir die Elektricitätsmenge, welche sich auf dw befindet, ξ, so ist einleuchtend, dass

$$\xi = -\frac{q}{4r^2\pi}\,dw$$

ist. Das elektrische Moment m des betrachteten Volumenelementes ist demnach:

$$m = \frac{q\,dw\,dr}{4\pi r^2} \ldots (3).$$

Da nun nach der allgemeinen Theorie der Dielektrica (p. 545) die Intensität der Elektrisierung J

$$\mathrm{J} = \frac{m}{dv} \ldots (4)$$

und wenn F die in diesem Volumenelemente wirkende Kraft, $\varkappa$ den Coefficienten der inducierten Elektrisierung vorstellt:

$$\mathrm{J} = \varkappa \mathrm{F} \ldots (5)$$

ist, so erhält man bei Berücksichtigung der Gleichung

$$\mathrm{F} = \frac{e - q}{r^2} \ldots (6)$$

aus den letzten vier Gleichungen die zur Bestimmung von q dienliche Gleichung:

$$q\,(1 + 4\pi\varkappa) = 4\pi\varkappa e \ldots (7)$$

oder nach Einführung der Dielektricitätsconstante μ

$$q = \frac{\mu - 1}{\mu}\,e \ldots (8).$$

Das Potential V wird somit durch die folgende Formel dargestellt:

$$\mathrm{V} = \frac{e}{a_1} - \frac{e}{a_4} - \frac{\mu - 1}{\mu}\,e\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)$$

oder, unter Δ die Dicke des Dielektricums verstanden:

$$V = e\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_4} - \frac{\mu - 1}{\mu}\frac{\Delta}{a_2 a_3}\right) \dots (9).$$

Nennt man die Capacität eines solchen Kugelcondensators C, so hat man für dieselbe den nachstehenden Ausdruck:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_4} - \frac{\mu-1}{\mu}\frac{\Delta}{a_2 a_3}} \dots (10).$$

Ist Q der Flächeninhalt eines Stückes von I, so ist die elektrische Capacität desselben c und man hat:

$$C : c = 4\pi a_1^2 : Q \text{ und nun}$$

$$c = \frac{Q}{4a_1^2\pi} C \dots (11).$$

Würde das Dielektricum den ganzen Zwischenraum zwischen den Belegungen ausfüllen, so hätte man:

$$a_2 = a_1,\ a_3 = a_4$$

und die Formeln für das Potential auf der inneren Condensatorbelegung und die Capacität des Apparates würden lauten:

$$V = \frac{e}{a_1} - \frac{e}{a_4} - \frac{\mu-1}{\mu} e\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_4}\right) = \frac{e}{\mu}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_4}\right) \dots (9^*)$$

$$C = \frac{\mu}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_4}} \dots (10^*).$$

Die Potentialdifferenz auf der inneren und äußeren Belegung würde in diesem Falle μ-mal kleiner, die Capacität aber μ-mal größer sein, als wenn Luft zwischen den Belegungen des Condensators vorhanden wäre.

Wir können den Ausdruck für die Capacität in noch anderer, für die Berechnung der Versuche bequemer zu handhabender Weise darstellen. Bezeichnet man nämlich

$$a_2 = a_1 + \alpha$$
$$a_3 = a_1 + \alpha + n$$
$$a_4 = a_1 + 2\alpha + n = a_1 + m,$$

wobei wir somit voraussetzen, dass die dielektrische Zwischensubstanz ebensoweit von der inneren als von der äußeren Belegung absteht, so erhält man:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+m}-\frac{\mu-1}{\mu}\left(\frac{1}{a_1+\alpha}-\frac{1}{a_1+\alpha+n}\right),$$

welche Formel in dem Falle als a_1 im Verhältnisse zu den anderen Größen m und n sehr groß ist, auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{m}{a_1}\right)-\frac{\mu-1}{\mu}\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{\alpha}{a_1}-1+\frac{\alpha+n}{a_1}\right)$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{a_1^2}\left(m-n+\frac{n}{\mu}\right),$$

woraus

$$C=\frac{a_1^2}{m-n+\frac{n}{\mu}}\ldots(12)$$

folgt.

Die früher c bezeichnete Capacität eines Flächenstückes Q der inneren Belegung wird demnach:

$$c=\frac{Q}{4\pi\left(m-n+\frac{n}{\mu}\right)}\ldots(13).$$

Die Formeln (12) und (13) können immer dann angewendet werden, wenn der Zwischenraum zwischen der inneren und äußeren Belegung des Condensators eine gegen die sonstigen Dimensionen geringe Dicke besitzt.

336. Imitation eines dielektrischen Körpers. Eine Reihe von leitenden Körpern, welche durch eine Reihe nicht leitender Substanzen getrennt sind, bringt dieselben Erscheinungen wie ein dielektrischer Körper hervor. So wirkt eine Platte, die aus Stanniollamellen besteht, welche durch mit Paraffin getränkte Papierscheiben getrennt sind, wie eine Schwefelplatte oder überhaupt eine Platte aus einem Dielektricum.

Wir wollen die Capacität eines Kugelcondensators berechnen, in welchem, wie in der Figur angezeigt ist, zwischen der äußeren und inneren Belegung ein solches System von leitenden Kugelschalen, die durch Kugelschalen aus isolierenden Substanzen getrennt sind, sich befindet. Die in der Figur (Fig. 133) schraffierten Theile des Condensators bedeuten die leitenden Lamellen; eine jede von diesen habe die Dicke δ. Die nicht

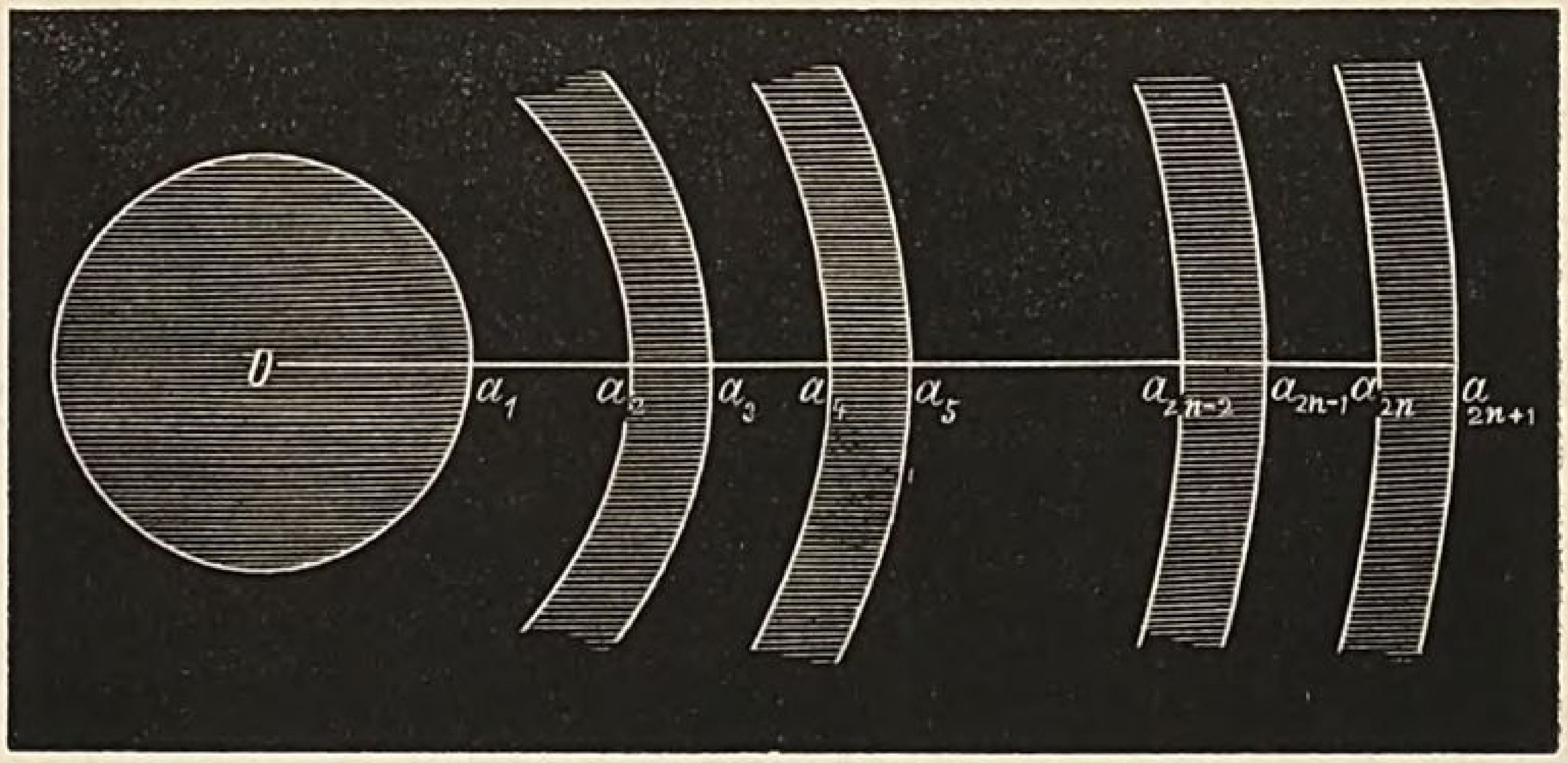


Fig. 133.

schraffierten Theile sind die isolierenden Zwischenlamellen, deren jede von der Dicke ε wäre.

In einem außerhalb des Condensators liegenden Punkte, dessen Entfernung vom gemeinschaftlichen Centrum x sei, herrscht das Potential V; es ist dargestellt durch:

$$V = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_{2n} + e_{2n+1}}{x} \ldots (1),$$

wenn $e_1, e_2, e_3 \ldots e_{2n}, e_{2n+1}$ die auf den in der Figur ersichtlichen Kugelflächen, deren Radien $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n}, a_{2n+1}$ sind, befindlichen Elektricitätsmengen bedeuten. — Denken wir uns ferner die äußerste leitende Schichte des Condensators zur Erde abgeleitet und nehmen wir in dieser Schichte einen Punkt an, dessen Distanz vom Centrum y sei, dann ist das Potential in diesem Punkte

$$o = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_{2n}}{y} + \frac{e_{2n+1}}{a_{2n+1}} \ldots (2).$$

Daraus folgt, nachdem der Potentialwert Null unabhängig von der Lage des letztgenannten Punktes ist,

$$\left.\begin{array}{r} e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_{2n} = o \\ e_{2n+1} = o \end{array}\right\} \ldots (3).$$

Für einen Punkt in der vorletzten Kugelschale, der vom Mittelpunkte den Abstand z hat, ist das Potential $\mathfrak{V}$ gegeben durch:

$$\mathfrak{V} = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_{2n-2}}{z} + \frac{e_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{e_{2n}}{a_{2n}} \quad . \; . (4)$$

Hieraus erhält man:

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_{2n-2} = o \ldots (5)$$

und durch Subtraction dieser Gleichung von der ersten der Gleichungen (3) resultiert schließlich:

$$e_{2n-1} + e_{2n} = o \ldots (6).$$

In ganz analoger Weise erhalten wir die nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} e_{2n-2} + e_{2n-1} = o \\ e_{2n-3} + e_{2n-2} = o \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Es folgt somit aus unseren Betrachtungen:

$$e_{2n} = - e_{2n-1} = e_{2n-2} = - e_{2n-3} = \ldots = e_2 = - e_1 \ldots (7).$$

Es besitzen somit auch die gegenüberstehenden Flächen zweier leitenden Lamellen gleiche, aber entgegengesetzt bezeichnete Elektricitäten.

Die Gleichungen (3) in Verbindung mit (1) lehren, dass, wenn die äußerste Lamelle zur Erde abgeleitet ist, das Potential in einem außerhalb des Condensators gelegenen Punkte Null ist.

Für einen Punkt im Innern der gezeichneten Vollkugel ist nun das Potential gegeben durch:

$$v = e_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots \right) \ldots (8).$$

Es ist nun

$$a_3 = a_2 + \delta \qquad a_4 = a_3 + \varepsilon$$
$$a_5 = a_4 + \delta \qquad a_6 = a_5 + \varepsilon$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$a_{2n+1} = a_{2n} + \delta \qquad a_{2n} = a_{2n-1} + \varepsilon.$$

Schreiben wir Formel (8) in nachstehender Form:

$$v = e_1 \left\{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2n}} - \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) - \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5}\right) \ldots - \left(\frac{1}{a_{2n-2}} - \frac{1}{a_{2n-1}}\right)\right\}$$

oder

$$v = e_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2n}} - \frac{\delta}{a_2 a_3} - \frac{\delta}{a_4 a_5} \ldots - \frac{\delta}{a_{2n-2}\, a_{2n-1}}\right),$$

was kürzer in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$v = e_1 \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2n}} - \delta \sum_{n=1}^{n=n-1} \frac{1}{a_{2n}\, a_{2n+1}}\right] \ldots \text{(9)},$$

so erkennen wir, da der Summenausdruck positiv ist, dass das Potential in diesem Falle ebenso wie bei Zwischenstellung eines dielektrischen Mediums kleiner ist als in jenem Falle, in welchem zwischen der inneren Kugel und der äußersten leitenden Schichte nur Luft vorhanden wäre; denn in letzterem Falle wäre, wenn die äußerste Belegung wieder auf das Potential Null gebracht, d. h. abgeleitet ist, das elektrische Potential auf der inneren Kugel:

$$v' = e_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2n}}\right).$$

Die Capacität des in diesem Abschnitte betrachteten Condensators ist gegeben durch:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2n}} - \delta \sum_{n=1}^{n=n-1} \frac{1}{a_{2n}\, a_{2n+1}}} \ldots \text{(10)},$$

welche Formel mit der im vorigen §. entwickelten Gleichung (10) die größte Ähnlichkeit zeigt.

Wir können der zuletzt aufgestellten Gleichung eine bequemer zu überblickende Form ertheilen, wenn wir die dort angezeigte

Summation in eine Integration verwandeln und den Wert des erhaltenen Integrales bestimmen.

Es ist nämlich

$$a_{2n+1} = a_{2n} + \delta$$

und somit

$$a_{2n} \cdot a_{2n+1} = a_{2n}^2 + a_{2n} \cdot \delta.$$

Nehmen wir $\delta + \varepsilon$ als außerordentlich kleine Größe an, so ist dies umsomehr mit δ der Fall; es kann dann

$$a_{2n} \cdot a_{2n+1} = a_{2n}^2$$

gesetzt werden und die obige Summe nimmt folgende Form an:

$$\sum_{n=1}^{n=n-1} \frac{1}{a_{2n}\, a_{2n+1}} = \sum_{n=1}^{n=n-1} \frac{1}{a_{2n}^2} = \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_4^2} + \frac{1}{a_6^2} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-2}^2}.$$

Bezeichnen wir die unendlich kleine Größe $\delta + \varepsilon = da$, so können wir die Summe nun so schreiben:

$$\frac{1}{\delta + \varepsilon} \int\limits_{a_2}^{a_{2n-2}} \frac{da}{a^2}$$

und es ist in diesem Integrale die Summation auszudehnen zwischen den Grenzen a_2 und a_{2n-2}; man erhält auf diese Weise

$$\frac{1}{\delta + \varepsilon} \int\limits_{a_2}^{a_{2n-2}} \frac{da}{a^2} = \frac{1}{\delta + \varepsilon} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{2n-2}} \right).$$

Der Wert dieses Integrales ist, wenn wir die unendlich kleine Differenz zwischen a_{2n-2} und a_{2n-1} außeracht lassen, somit dargestellt durch:

$$\frac{1}{\delta + \varepsilon} \, \frac{a_{2n-1} - a_2}{a_2\, a_{2n-2}}$$

oder, wenn wir die Dicke des zwischen der äußeren und inneren Belegung eingefügten Systems leitender und nichtleitender Lamellen mit Δ bezeichnen, durch:

$$\frac{1}{\delta + \varepsilon} \frac{\Delta}{a_2\, a_{2n-2}} \ldots (11).$$

Substituieren wir diesen Wert in (10), so erhält man also:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2n}} - \frac{\delta}{\delta + \varepsilon} \frac{\Delta}{a_2\, a_{2n-2}}} \ldots (12).$$

Man findet somit Übereinstimmung der letzten Gleichung und der im vorigen §. gegebenen Gleichung (10), wenn man setzt

$$\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{\delta}{\delta + \varepsilon},$$

woraus unmittelbar

$$\mu = \frac{\delta + \varepsilon}{\varepsilon} \ldots (13)$$

folgt.

Die Dielektricitätsconstante nimmt danach eine leicht zu erfassende physikalische Bedeutung an; ein dielektrischer, zwischen die Belegungen einer Leydnerflasche oder eines Condensators überhaupt gestellter Körper wirkt so wie ein System von abwechselnd aufeinanderfolgenden leitenden und isolierenden Lamellen, wenn nur das Verhältnis der Summe der Dicken jeder leitenden und isolierenden Lamelle zur Dicke der letzteren dem specifischen Inductionsvermögen oder der Dielektricitätsconstante gleich ist. Es lehren die Versuche, die später beschrieben werden, dass die meisten festen dielektrischen Substanzen ein specifisches Inductionsvermögen besitzen, welches wenig von 2 verschieden ist; daraus würde folgen, dass das Verhältnis der Dicken zweier aufeinanderfolgenden Lamellen von der Einheit wenig differiert oder dass man nahezu den dielektrischen Zustand solcher Körper erklären kann, wenn man annimmt, dass diese aus leitenden Schichten bestehen, die durch ebenso dicke isolierende Schichten von einander geschieden sind.

So hätte man ein allerdings grobes Bild der Dielektrica als solcher Körper, die aus einem System von Leitern, welche durch Nichtleiter getrennt sind, gewonnen.

Wir werden übrigens noch an späterer Stelle, wenn wir die Hypothese von Poisson über die Beschaffenheit der dielektrischen Körper besprechen, auf die Äquivalenz dielektrischer Körper und eines Systemes von leitenden Körpern, z. B. von Kugelgestalt, die in einem isolierenden Medium eingebettet sind, verweisen.

Nur noch einige Bemerkungen, die für das Verständnis der später zu beschreibenden Phänomene in dielektrischen Körpern belangreich sind, seien hier gemacht. Ist die Vollkugel positiv elektrisch geladen, so werden in allen leitenden Lamellen die positiven Elektricitäten nach außen abgestoßen, die negativen jedoch nach innen gezogen. Diejenigen Elektricitätsschichten, welche zu beiden Seiten einer isolierenden Lamelle sich befinden, haben das Bestreben, infolge ihrer elektrostatischen Anziehung einander sich zu nähern, d. h. ε zu verringern, was in Anbetracht der Gleichung:

$$\mu = 1 + \frac{\delta}{\varepsilon}$$

eine Vergrößerung der Dielektricitätsconstante oder des specifischen Inductionsvermögens zur Folge hätte. Dies ist mit der Erfahrung in Übereinstimmung, denn Gaugain hat in einer sehr lehrreichen Experimentaluntersuchung nachgewiesen, dass im allgemeinen das specifische Inductionsvermögen mit der Zeit variiert. Im Momente der Ladung hat es einen Minimalwert, steigt aber alsbald rapid an und nähert sich dann mehr oder weniger langsam einer Grenze; es wird also das Potential der inneren Belegung unmittelbar nach der Ladung rasch abnehmen, dann erfolgt diese Abnahme im langsameren Tempo.

Aus der zuletzt aufgestellten Gleichung ersieht man auch unschwer, warum man den Conductoren ein unendlich großes specifisches Inductionsvermögen zuschreibt; denn im Falle leitender Körper ist $\varepsilon = o$ und somit $\mu = \infty$.

337. Induction in einem Medium, das aus zwei durch eine Ebene getrennten Dielektrica gebildet ist. Eine unendliche Ebene (Fig. 134) trenne zwei verschiedene unbegrenzte Dielektrica, welche die specifischen Inductionsvermögen μ_1 und μ_2

besitzen. In einem Punkte A des einen Mediums befinde sich eine wirkende elektrische Masse *m*. Wir stellen uns die Aufgabe, die elektrische Vertheilung in jedem Punkte der Ebene MM′ zu finden. Hierzu wollen wir die früher erörterte Theorie der elektrischen Bilder zu Hilfe nehmen. Man kann nämlich das Gleichgewicht herstellen, wenn man auf der Trennungsebene der beiden Dielektrica MM′ eine Elektricitätsschichte *m′* voraussetzt, in einer solchen Vertheilung, wie sie stattfinden würde auf einer leitenden mit der Erde verbundenen Ebene, die unter dem influencierenden Einflusse einer in A oder B gelegenen Elektricitätsmenge *m′* stehen würde, wobei OA=OB=*p* und AB senkrecht auf MM′ ist. Diese Ebene würde auf alle links von der Ebene gelegenen Punkte so wirken, wie die Elektricitätsmenge *m′* in B, auf alle rechts von der Trennungsebene gelegenen Punkte jedoch so, wie dieselbe, aber im Punkte A befindliche Elektricitätsmenge. Nehmen wir nun einen Punkt P in der Ebene an, dessen Entfernung von A oder B *r* wäre; ferner bilde die Gerade PA mit der Axe AO den Winkel φ. Das Potential in einem Punkte des ersten Mediums, der unendlich nahe dem Punkte P ist, wird nach dem Obigen durch die Formel:

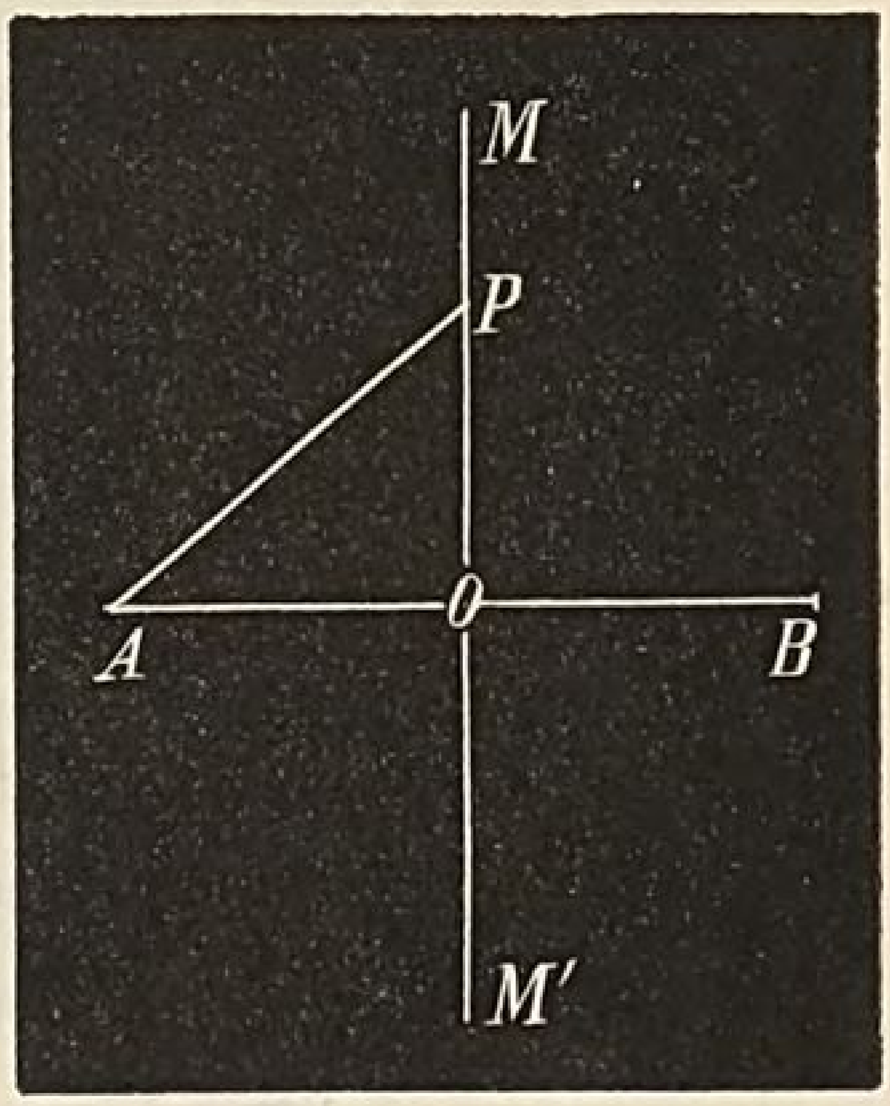


Fig. 134.

$$V_1 = \frac{m}{PA} + \frac{m'}{PB} \cdots (1)$$

dargestellt werden.

In ganz ähnlicher Weise wird das Potential in einem Punkte des zweiten Mediums, der ebenfalls dem Punkte P unendlich nahe liegt, angegeben sein durch:

$$V_2 = \frac{m}{PA} + \frac{m'}{PA} \cdots (2).$$

Bezeichnet man die Normalcomponenten der Kräfte im ersten und zweiten Medium und zwar in den erwähnten, dem Punkte P

unendlich benachbarten Punkten mit $(F_1)_n$ und $(F_2)_n$, so muss nach der früher erwiesenen Continuitätsgleichung:

$$\mu_1 (F_1)_n = \mu_2 (F_2)_n \ldots (3)$$

sein. Aus dieser Bedingung werden wir m' bestimmen können. Es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned}(F_1)_n &= \frac{m - m'}{r^2} \cos \varphi \\ (F_2)_n &= \frac{m + m'}{r^2} \cos \varphi\end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

und deshalb:

$$\mu_1 (m - m') = \mu_2 (m + m')$$

woraus:

$$m' = m \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \ldots (5)$$

folgt. Setzt man noch:

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \gamma \ldots (6),$$

so erhält man $m' = m\gamma$.

Die Dichte in jedem Punkte der Ebene, der sich vom Punkte A um die Strecke $r = AP$ entfernt befindet, ist nach einer früheren Formel bestimmt durch:

$$\sigma = \frac{m'p}{2\pi r^3} = m \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{p}{2\pi r^3} = \frac{m\gamma p}{2r^3\pi} \ldots (7).$$

Durch diese Formel ist die Lösung des gestellten Problems gegeben und es lässt sich nun nach der Methode von Murphy jener Fall leicht behandeln, in welchem drei verschiedene Dielektrica durch zwei parallele Ebenen getrennt sind. Wir verweisen bezüglich der auszuführenden Rechnungen auf das ausgezeichnete Werk von Mascart und Joubert[1].

338. Im Nachstehenden wollen wir das Verhalten einer leitenden sowohl als auch einer dielektrischen Kugel, die in ein elektrisches Feld gestellt ist, eingehender betrachten. Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst die Wirkung zweier gleichen und entgegengesetzt bezeichneten Elektricitätsmengen

[1] Mascart und Joubert, l. c. p. 153—156.

ausführlicher erörtern und einige einleitende Sätze, von denen wir bei den weiteren Problemen Anwendung machen werden, entwickeln.

339. Potential zweier gleichen und entgegengesetzten Elektricitätsmengen, die einander unendlich nahe sind. Es befänden sich in den Punkten A und A_1 (Fig. 135) die beiden Elektricitätsmengen $+m$ und $-m$. Dieselben werden in einem Punkte P ein Potential V erzeugen, welches durch die Gleichung

$$V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \ldots (1)$$

bestimmt ist, wenn man $AP = r$, $A_1P = r'$ bezeichnet. Wir nehmen als speciellen Fall jenen an, in welchem die Entfernung $AA_1 = 2a$

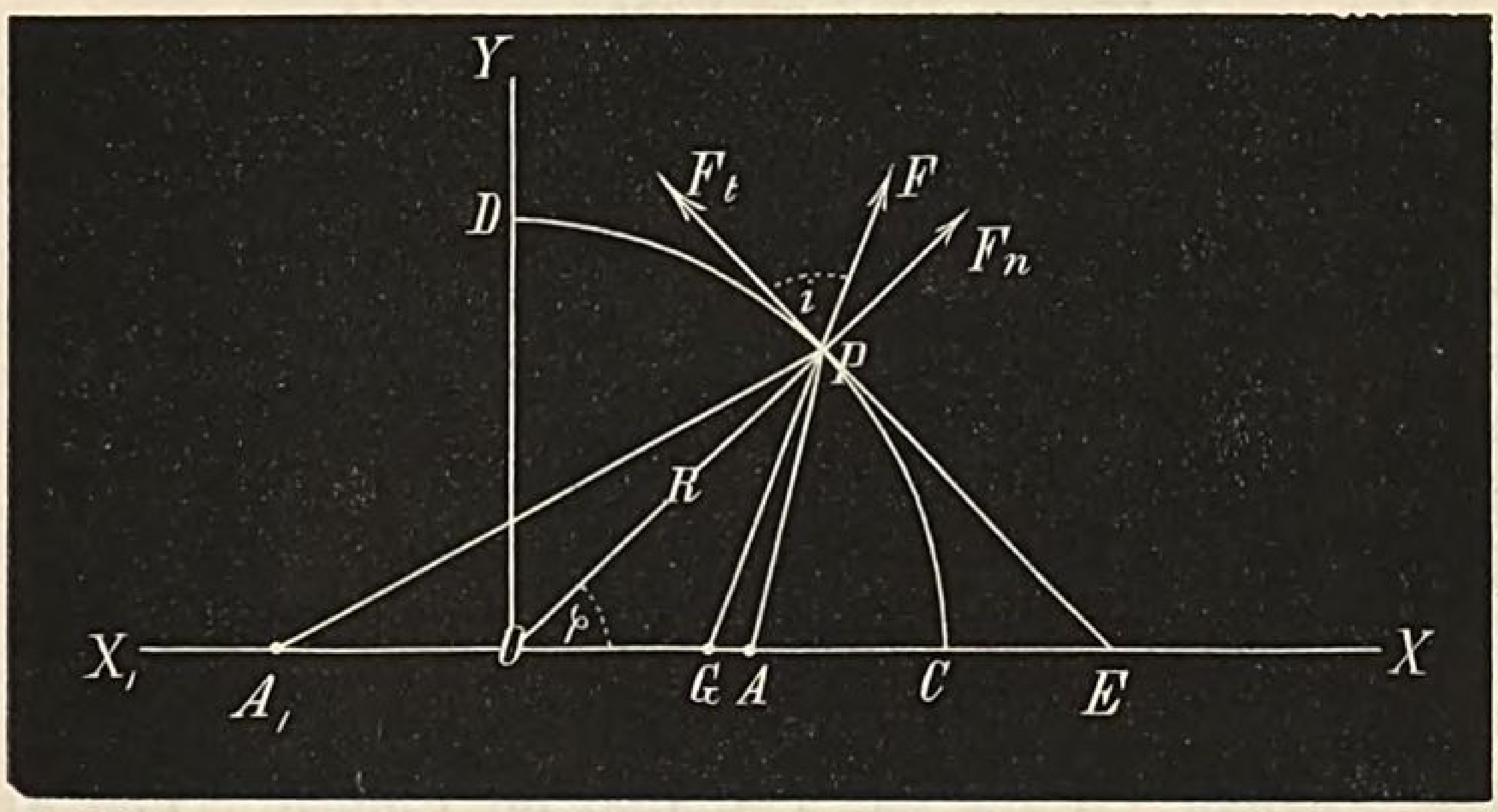


Fig. 135.

der beiden Elektricitätsmengen unendlich klein ist, was auch darauf hinausläuft, dass wir den Zustand des elektrischen Feldes in einer Entfernung von den wirksamen Elektricitätsmengen betrachten, die sehr groß im Verhältnis zur Distanz der letzteren ist. In diesem Falle kann der Wert des Potentiales in dem sehr fernen Punkte auch so geschrieben werden:

$$V = m\,\frac{r' - r}{rr'} = m\,\frac{r' - r}{r^2} \ldots (2).$$

Nehmen wir den Mittelpunkt O von AA' als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystemes XOY an, auf dessen Abscissenaxe die beiden elektrischen Punkte sich befinden, bezeichnen wir ferner $OP = R$, $\sphericalangle\, AOP = \varphi$, so hat man:

$$r'^2 = R^2 + a^2 + 2aR\cos\varphi = R^2\left(1 + \frac{2a}{R}\cos\varphi + \frac{a^2}{R^2}\right),$$

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\varphi = R^2\left(1 - \frac{2a}{R}\cos\varphi + \frac{a^2}{R^2}\right).$$

Man erhält aus diesen letzten Formeln bei der Vernachlässigung aller Potenzen (von der zweiten an) von $\frac{a}{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} r' = R\left(1 + \frac{a}{R}\cos\varphi\right),\ r = R\left(1 - \frac{a}{R}\cos\varphi\right) \\ r' - r = 2a\cos\varphi, \qquad rr' = R^2 \end{array}\right\}\ldots(3)$$

und durch Substitution dieser Werte in (2):

$$V = \frac{2am\cos\varphi}{R^2} = 2am\frac{x}{R^3}\ldots(4),$$

wenn x die Abscisse des Punktes P bedeutet.

Diese Gleichungen lehren uns, dass für einen und denselben Wert der Anomalie φ die Werte von V umgekehrt proportional den Quadraten von R sind, dass ferner alle Niveauflächen untereinander ähnlich sind.

Wir wollen im Nachfolgenden nach Analogie mit einem Begriffe aus der Lehre vom Magnetismus das Product $2am$ das elektrische Moment des vorausgesetzten Systemes bezeichnen und durch den Buchstaben ε ausdrücken.

Dann erhalten wir für das Potential im Punkte P den Ausdruck

$$V = \frac{\varepsilon\cos\varphi}{R^2} = \varepsilon\frac{x}{R^3}\ldots(5).$$

Es ist nützlich, die geometrische Bedeutung dieses Ausdruckes zu erörtern. Werde durch den Punkt O eine Ebene senkrecht auf A_1A gelegt und in derselben eine beliebige Curve um den Punkt O gezeichnet, welche die Fläche S einschließe; dieselbe erblicke man vom Punkte P unter dem Raumwinkel w, dann hat man

$$R^2 w = S\cos\varphi$$

und somit

$$V = \varepsilon\frac{w}{S}\ldots(6).$$

Wählt man die Größe der von der oben genannten Curve umschlossenen Fläche derart, dass

$$S = \varepsilon \ldots (7)$$

wird, dann hat man:

$$V = w \ldots (8).$$

Es ist somit der Wert des Potentiales, welches von zwei gleichen, entgegengesetzt bezeichneten und einander unendlich nahestehenden Massenpunkten herrührt, in einem Punkte gleich dem Raumwinkel, unter welchem man vom letzteren Punkte eine Fläche erblickt, die gleich dem elektrischen Momente der beiden Massenpunkte ist und deren Ebene in der Mitte der Verbindungsgeraden der beiden Massenpunkte auf derselben normal steht.

Gehen wir nun zur Bestimmung der Kräfte über. Bezeichnen wir die Kraft im Punkte P mit F, deren Componenten parallel zur X∾ und Y∾Axe X und Y, so ist:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(x R^{-3}\right) = -\varepsilon \left(R^{-3} - 3xR^{-4}\frac{\partial R}{\partial x}\right).$$

Da nun:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

ist, so hat man:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R}$$

und schließlich:

$$X = -\frac{\varepsilon}{R^3}\left(1 - \frac{3x^2}{R^2}\right) = \frac{\varepsilon}{R^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) \ldots (9).$$

Ebenso wird Y bestimmt durch:

$$Y = \frac{3\varepsilon}{R^3}\sin\varphi\cos\varphi \ldots (10).$$

Beschreibt man mit OP als Halbmesser einen Kreis aus dem Mittelpunkte O, der die X-Axe in C, die Y-Axe in D schneidet, so ist die Wirkung im Punkte C dargestellt durch:

$$F_c = \frac{2\varepsilon}{R^3} \ldots (11).$$

Die Wirkung im Punkte D ist angegeben durch die Gleichung:

$$F_d = -\frac{\varepsilon}{R^3} \ldots (12).$$

Betrachtet man die absoluten Werte der zuletzt genannten Kräfte, so erhält man die bemerkenswerte Beziehung:

$$F_c = 2\, F_d \ldots (13).$$

Die gesammte, im Punkte P wirkende Kraft ist nun

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\varepsilon}{R^3}\sqrt{3\cos^2\varphi + 1} \ldots (14).$$

Bezeichnen wir noch die zur Kreisperipherie im Punkte P normale Componente der Kraft F mit F_n, die Tangentialcomponente in demselben Punkte F_t, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} F_n &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi \\ F_t &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi \end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

oder nach leichter Rechnung:

$$F_n = \frac{2\varepsilon}{R^3}\cos\varphi,\ F_t = \frac{\varepsilon}{R^3}\sin\varphi \ldots (16).$$

Nennen wir die Neigung der Kraftrichtung gegen die Tangente im Punkte P i, so hat man noch:

$$tg\, i = \frac{F_n}{F_t} = 2\cot\varphi = 2\, tg\, \lambda \ldots (17),$$

wenn λ den Winkel von OP mit der Y-Axe bedeutet.

Schneidet die rückwärts verlängerte Tangente die X-Axe in E, die rückwärts verlängerte Kraftrichtung dieselbe Axe in G, so folgt aus den Dreiecken OPG und GPE:

$$OG : PG = \cos i : \sin\varphi$$
$$PG : GE = \cos\varphi : \sin i$$

und daraus:

$$OG : GE = \cot i : tg\, \varphi$$

und unter Zuhilfenahme der Gleichung (17):

$$OG : GE = 1 : 2 \ldots (18).$$

Es ist deshalb:

$$OE = 3\,OG \ldots (19),$$

durch welche Gleichung eine geometrische Darstellung der Kraftrichtung gegeben ist. Das vorstehende Theorem wurde von Gauss [1] in seinen Untersuchungen über Magnetismus gegeben.

340. Stellt man einen unendlich kleinen Körper, der ein Leiter ist oder nicht, und der sich ursprünglich im neutralen Zustande befindet, in ein beliebiges elektrisches Feld, so werden die ursprünglich vereinigten entgegengesetzten Elektricitäten von einander verschoben und der Zustand dieses Körpers entspricht dem eben betrachteten Falle zweier gleichen und entgegengesetzten Massen, die einander unendlich benachbart sind. Jede der getrennten Elektricitätsschichten wirkt derart, als ob sie in ihrem Schwerpunkt vereinigt wäre.

Genau so verhält es sich auch für irgendeinen Körper, der ursprünglich im neutralen Zustande ist, dessen Gesammtladung also Null ist, wenn man nur seine Wirkung in einer großen Entfernung betrachtet.

341. Polarisierte Kugel. Verschiebungsschichten. Wir wollen nun zeigen, dass man das System zweier gleichen und entgegengesetzten Elektricitätsmengen auch noch in anderer Weise darstellen kann. Betrachten wir zwei Kugeln S und S_1 (Fig. 136), die denselben Radius besitzen und von denen

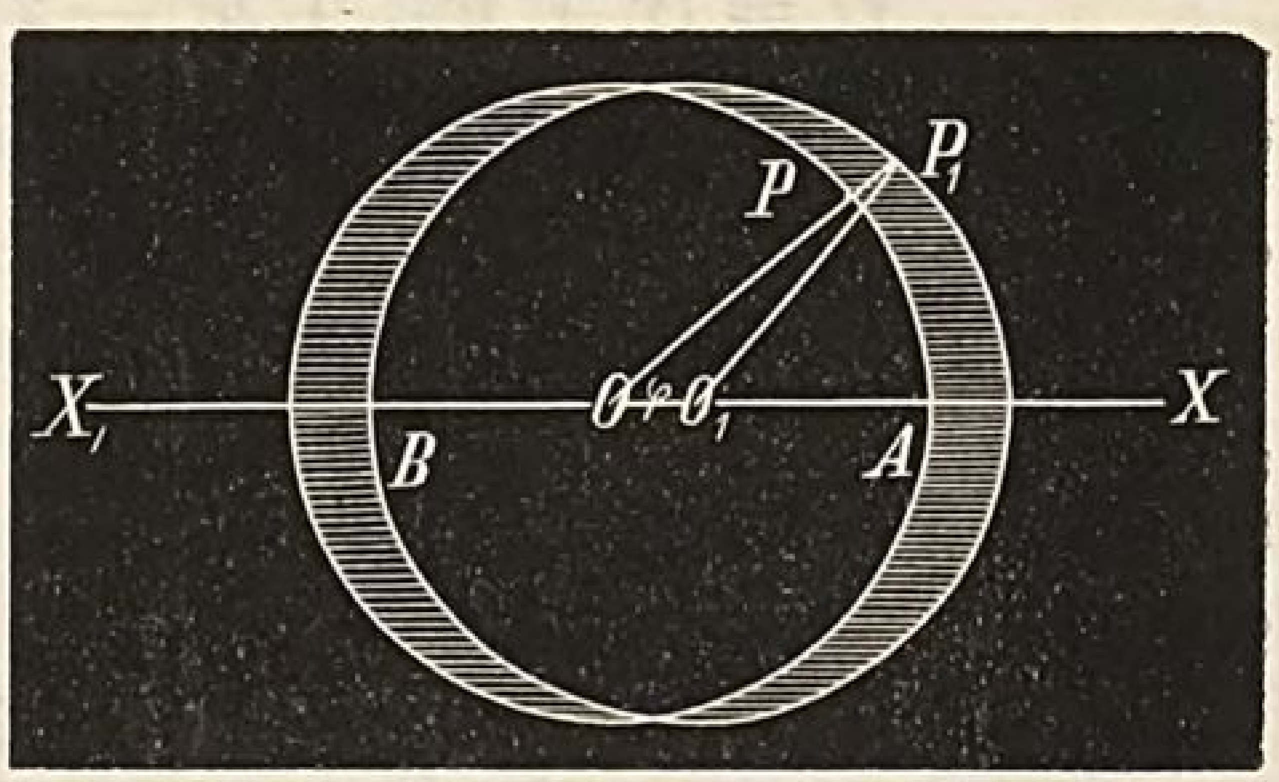


Fig. 136.

die eine die gleichförmige Dichte ρ, die andere die gleichförmige Dichte $-\rho$ besitzen soll; ferner befänden sich die Mittelpunkte O und O′ dieser Kugel in einer unendlich kleinen Entfernung δ voneinander. Der nicht schraffierte Raum besitzt dann die Dichte

[1] Man sehe auch: Dr. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus u. s. w. (Leipzig 1881) p. 10.

Null, weil in demselben in jedem Massentheile gleiche und entgegengesetzte Dichten sich vereinigen. Man erkennt, dass also dieses System der beiden Kugeln jenem von zwei Schichten gleichkommt, die gleich und vom entgegengesetzten Zeichen sind und auf den beiden Hälften einer sphärischen Fläche ausgebreitet sind. Wir wollen diese Schichten, welche in der Weise durch zwei homogene Massen von gleichen und entgegengesetzten Dichten, von denen die eine gegen die andere um eine unendlich kleine Größe verschoben wurde, gebildet werden, Verschiebungsschichten (couches de glissement) nennen.

Man kann das Medium als polarisiert betrachten und zwar ist die Axe der elektrischen Polarisation parallel zu jener Richtung, längs welcher die Verschiebung stattgefunden hat.

Wir wollen im Nachfolgenden die Dichte der Schichte in jedem Punkte betrachten. Es ist klar, dass dieselbe der Dicke PP′ des nicht gemeinschaftlichen Theiles der beiden Kugeln an der betreffenden Stelle P proportional ist. Bezeichnet man die Dicke dieser Schichte PP′ in einem Punkte P der sphärischen Oberfläche, welcher unter der Anomalie φ steht, mit w, so folgt, wenn der Radius der Kugel r genannt wird, aus dem Dreiecke OP_1O_1

$$r^2 = (r + w)^2 + \delta^2 - 2\,(r + w).\delta.\ \cos\varphi$$

oder bei Vernachlässigung unendlich kleiner Größen zweiter Ordnung:

$$2rw = 2r\delta\ \cos\varphi,$$

woraus

$$w = \delta\ \cos\varphi \ldots (1)$$

folgt.

Die Dichte der Verschiebungsschichte im Punkte P ist daher ausgedrückt durch:

$$\sigma = \rho\,\delta\ \cos\varphi \ldots (2).$$

Die Dichte der Schichte im Punkte A ist wegen $\varphi = 0$:

$$\sigma_0 = \rho\,\delta$$

und somit

$$\sigma = \sigma_0 \cos\varphi \ldots (3).$$

Daraus erkennt man, dass die Dichte in dem einen Theile der polarisierten Kugel positiv, im andern negativ ist; im Punkte B ist die Dichte

$$\sigma_{180} = -\sigma_0.$$

Nun betrachten wir die auf einen innerhalb der Kugel gelegenen Punkt M wirkende Kraft. Eine jede von den gegeneinander verschobenen Kugeln übt eine solche Wirkung aus, als ob ihre Gesammtmasse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Setzen wir fest, dass die Dichte der Kugel mit dem Centrum O negativ, jener mit dem Centrum O_1 positiv sei (Fig. 137), dann ist die Wirkung der Kugel O auf M, die P genannt werden soll, in der Richtung MO bestimmt durch:

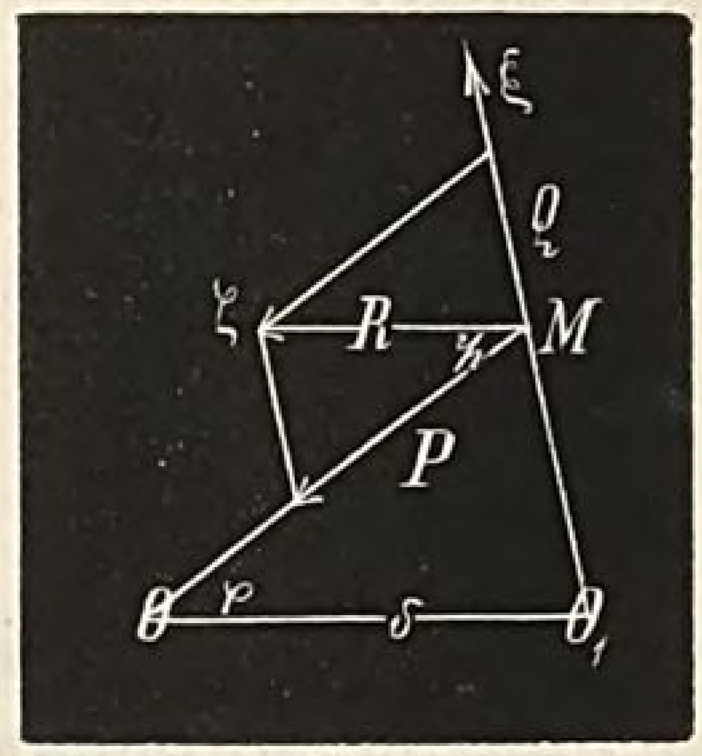


Fig. 137.

$$P = \frac{4}{3}\pi\rho MO \ldots (4).$$

Die von der zweiten Kugel auf M ausgeübte Kraft, welche die Richtung $M\xi$ besitzt, ist gegeben durch:

$$Q = \frac{4}{3}\pi\rho O_1 M \ldots (5).$$

Man erkennt leicht, dass die Resultierende R dieser beiden Kräfte gegen $M\zeta \parallel OO_1$ gerichtet ist und durch den Wert

$$\frac{4}{3}\pi\rho\delta = \frac{4}{3}\pi\sigma_0$$

gegeben ist. Es ist deshalb die Wirkung der polarisierten Kugel auf jeden Punkt, der in derem Innern gelegen ist, constant.

Ein positives Massentheilchen 1 wird von der Kraft $\frac{4}{3}\pi\sigma_0$ in der negativen Richtung, ein negatives Massentheilchen 1 mit derselben Kraft in der positiven Richtung afficiert (¹).

(¹) Neumann gelangt in der oben citierten Schrift zu denselben Resultaten, aber auf complicierterem Wege.

Rechnet man die auf M wirkende Kraft F_i von links nach rechts positiv, so ist

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\sigma_0 \ldots (6),$$

und deshalb, wenn V_i das Potential im betrachteten Punkte bedeutet:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -F_i = \frac{4}{3}\pi\sigma_0,$$

somit

$$V_i = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 x \ldots (7),$$

denn die Integrationsconstante verschwindet, weil das Potential im Mittelpunkte der Kugel Null ist. Es variiert somit das Potential in einem inneren Punkte proportional der Abscisse des letzteren.

342. Bestimmung des Potentials der polarisierten Kugel in einem Aussenpunkte. Denken wir uns die Massen der beiden Kugeln $-\frac{4}{3}\pi\rho a^3$ und $\frac{4}{3}\pi\rho a^3$ in den Punkten O und O_1 concentriert, so ist das Potential in einem äußern Punkte, der in einer Distanz r vom Mittelpunkte der Kugel sich befindet, welche Linie r mit der Polaraxe den Winkel φ bildet, früher bestimmt worden durch:

$$V_e = \frac{\varepsilon \cos\varphi}{r^2} = \varepsilon\,\frac{x}{r^3},$$

wo ε das elektrische Moment der beiden Massen bedeutet; dasselbe ist in unserem Falle:

$$\varepsilon = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 \,.\, \delta = \frac{4}{3}\pi a^3 \,.\, \sigma_0 = u\sigma_0 \ldots (8),$$

wenn u das Volumen der Kugel ist; man erhält nun

$$V_e = u\sigma_0\frac{x}{r^3} = u\sigma_0\frac{\cos\varphi}{r^2} \ldots (9),$$

wenn man den Winkel φ in die Rechnung führt; das Potential in einem äußeren Punkte befolgt also ein complicierteres Gesetz

als im Innern der Kugel, in welchem die Niveauflächen Ebenen darstellen, die normal zur Axe der Polarisation und äquidistant sind; die früher entwickelten Ausdrücke für X, Y, F_n und F_t werden in unserem jetzigen Falle dargestellt durch:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{u\sigma_0}{r^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right), \\ Y &= 3\,\frac{u\sigma_0}{r^3}\sin\varphi\cos\varphi \\ F_n &= 2\,\frac{u\sigma_0}{r^3}\cos\varphi \\ F_t &= \frac{u\sigma_0}{r^3}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \ldots (10).$$

Es ist nicht schwer, alle diese Ausdrücke als Functionen der inneren Kraft F_i darzustellen, wie es in dem öfters erwähnten Werke von Mascart und Joubert (p. 165) geschehen ist. Die gesammte Elektricitätsmenge Q, welche sich auf jeder der Verschiebungsschichten befindet, ist

$$Q = \int \sigma dS = 2\pi a^2 \sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \pi a^2 \sigma_0 \ldots (11).$$

343. Betrachtung der Wirkung einer leitenden Kugel, die sich in einem gleichförmigen elektrischen Felde befindet. Nun sind wir im Stande, die Wirkung einer leitenden oder auch einer dielektrischen Kugel, die in der eben erörterten Weise elektrisiert wurde und sich in einem gleichförmig elektrisierten Felde befindet, zu besprechen. Dieses gleichförmige Feld wird z. B. durch Elektricitätsmengen erzeugt werden, die sehr weit von der betrachteten Kugel sich befinden. Die Intensität des Feldes sei Φ, die Richtung der Kraftlinien des Feldes falle mit der X-Axe zusammen.

Soll die leitende Kugel im elektrischen Gleichgewichte sein, so muss die resultierende Kraft im Innern der Kugel, die sich aus den beiden Theilen F_i und Φ zusammensetzt, Null sein. Die Gleichgewichtsbedingung ist daher

$$F_i + \Phi = 0 \ldots (1)$$

oder

$$F_i = -\Phi;$$

daher

$$-\frac{4}{3}\pi\sigma_0 = -\Phi$$

oder

$$\sigma_0 = \frac{3\Phi}{4\pi} \ldots (2).$$

Die früher genannten Größen sind daher in unserem Falle bestimmt durch die nachstehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} V_i &= \Phi\, r \cos\varphi, \\ V_e &= \Phi \frac{a^3}{r^2} \cos\varphi, \\ X &= \Phi \frac{a^3}{r^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right), \\ Y &= \Phi \frac{a^3}{r^3} 3 \sin\varphi \cos\varphi, \\ F_n &= 2\Phi \frac{a^3}{r^3} \cos\varphi, \\ F_t &= \Phi \frac{a^3}{r^3} \sin\varphi, \\ Q &= \frac{3}{4} a^2 \Phi. \end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

Es ist durch diese Gleichungen das Problem vollständig bestimmt.

344. Nähere Betrachtung der Kraftlinien. Im Punkte M, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Kugel r ist, (OM bilde mit der X-Axe den Winkel φ), wirken die drei Kräfte F_n, F_t und Φ. F_t bedeutet die Kraft, welche in der Richtung der zum Punkte M an den durch diesen Punkt gehenden Kreis gelegten Tangente wirkt. Zerlegen wir Φ nach der Kreistangente und Kreisnormale, so erhalten wir in der ersteren Richtung die Kraft Φ Sin $\varphi - F_t$, in der letztgenannten Richtung die Kraft $\Phi \cos\varphi + F_n$.

Somit ist der Winkel, welchen die resultierende Kraft mit dem Radiusvector bildet, bestimmt durch

$$tg\,\theta = \frac{\Phi \sin\varphi - F_t}{\Phi \cos\varphi + F_n} \ldots (4).$$

oder nach Einsetzung der oben angegebenen Werte:

$$tg\,\theta = \frac{r^3 - a^3}{r^3 + 2a^3}\,tg\,\varphi \ldots (5)^*$$

Ist $r > a$, so ist immer $tg\,\theta < tg\,\varphi$, also $\theta < \varphi$; ist aber $r = a$, so ist $tg\,\theta = o$, $\theta = o$. Alle Kraftlinien erreichen daher in normaler Richtung die Kugeloberfläche und entströmen in einer eben solchen Richtung derselben; eine Ausnahme machen nur jene, welche Punkte der Kugel treffen, denen die geographische Breite $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ entspricht; der obige Ausdruck gibt nämlich in diesem Falle den unbestimmten Wert $0 . \infty$, welcher,

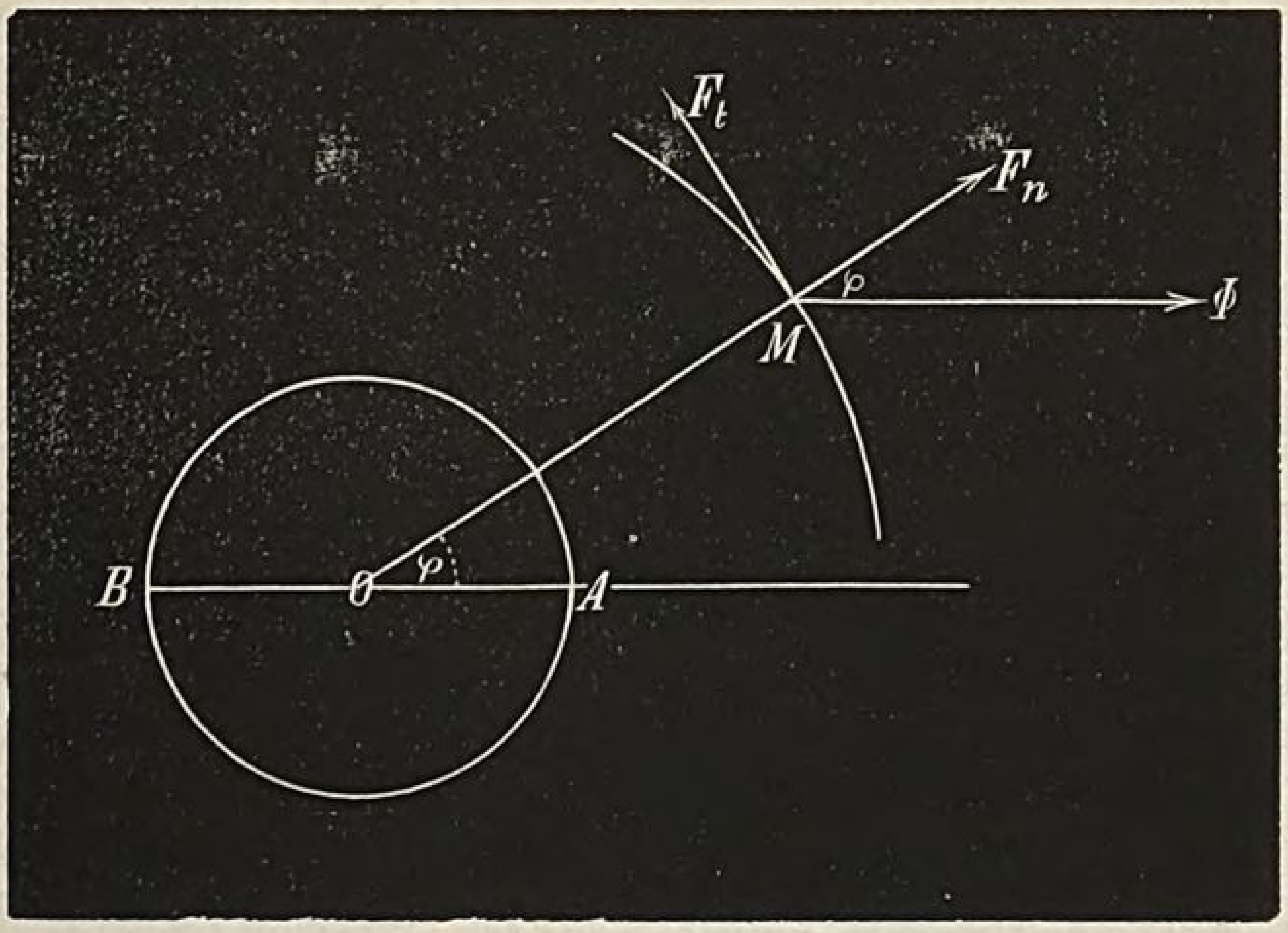


Fig. 188.

nach bekannten Regeln entwickelt, für θ den aus der Gleichung

$$\mathrm{tg}^2\,\theta = 1$$

zu entnehmenden Wert $\theta = 45^0$ liefert; es machen alle auf die Kugel unter φ gleich $\pm\frac{\pi}{2}$ auftreffenden Kraftlinien mit den Normalen an diesen Punkten Winkel von 45^0.

(1) Über die Aufstellung der Gleichung der Kraftlinien, sowie bezüglich der eingehenden Discussion derselben sehe man die Abhandlung „Über das Verhalten leitender und dielektrischer Kugeln im homogenen elektrischen Felde." Von Professor Dr. J. G. Wallentin. (Wien, 1884).

345. Fall einer nicht isolierten leitenden Kugel in einem homogenen Felde. Nehmen wir an, das Potential im Innern der Kugel habe in dem früher erörterten Falle den constanten Wert V_0. Würden wir nun auf diese Kugel eine gleichmäßig verbreitete Elektricitätsschichte von der Masse $-M$ auflegen, welche im Innern der Kugel ein Potential von $-V_0$ hervorruft, so könnte man diesen und den früheren Gleichgewichtszustand superponieren und es würde im Innern der Kugel das Potential Null herrschen, was dem Falle einer zur Erde abgeleiteten Kugel entsprechen wird. Diese Elektricitätsschichte ist aus der Gleichung:

$$V_0 = \frac{M}{a} = \frac{4\pi a^2 \sigma_1}{a} = 4\pi a \sigma_1 \ldots (6)$$

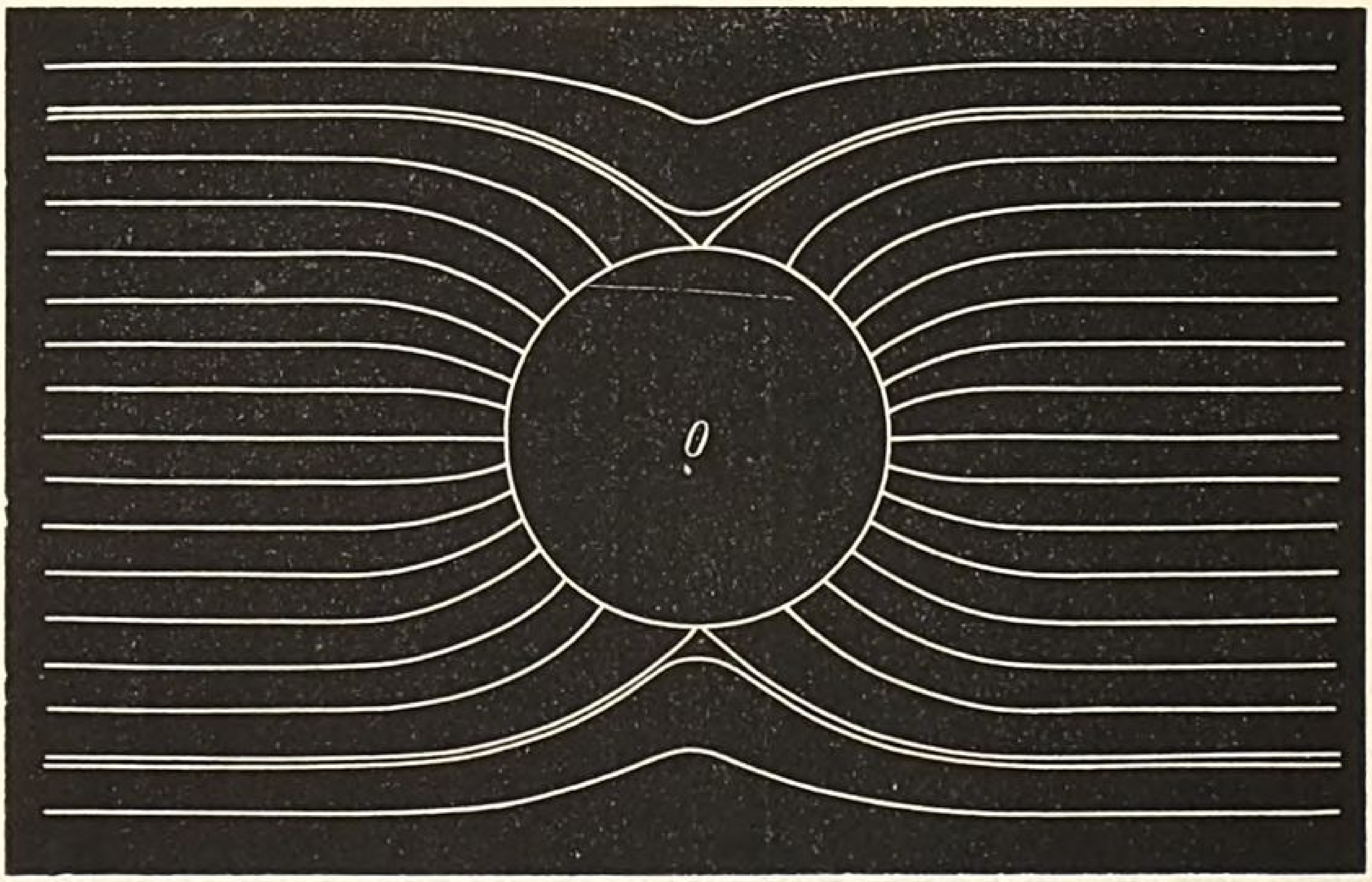


Fig. 139.

bestimmt, wenn man mit σ_1 die gleichförmige Dichte der Elektricität auf dieser Kugel nennt. Bezeichnet man die nun resultierende Dichte auf der Kugeloberfläche in einem Punkte mit der Winkelentfernung φ Σ, so hat man:

$$\Sigma = \frac{3}{4\pi} \Phi \cos\varphi - \frac{V_0}{4\pi a} \ldots (7).$$

Daraus erhält man die Dichte im Punkte A ausgedrückt durch die Formel:

$$\Sigma_A = \frac{3}{4\pi}\,\Phi - \frac{V_0}{4\pi a} \ldots (8).$$

Diese Dichte ist positiv, negativ oder Null, je nachdem

$$3\,\Phi\,a \gtreqless V_0 \text{ ist.}$$

Bezeichnet man mit V_1 und V_2 die ursprüngliche Potentiale in B und A (Fig. 138), so wird man haben:

$$\Phi = \frac{V_2 - V_1}{2a}$$

und das Potential im Centrum ist dann:

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Führt man diese Gleichungen in die obige Bedingung ein, so erhält man:

$$3\,(V_2 - V_1) \gtreqless V_1 + V_2$$

oder

$$V_2 \gtreqless 2\,V_1 \ldots (9)$$

als Bedingungen dafür, dass die Dichte im Punkte A positiv, negativ oder Null ist; soll also die Dichte in diesem Punkte Null sein, so müssen die ursprünglichen Werte des Potentiales in den beiden betrachteten Punkten der Kugel in dem Verhältnisse von 1 : 2 stehen. In diesem Falle ist die Dichte der Elektricität im Punkte B aus der Formel

$$\Sigma_B = -\frac{3}{4a\pi} V_1 \ldots (10)$$

bestimmbar.

Ist $V_2 < 2V_1$, so ist die Dichte im Punkte A und auf der ganzen Kugeloberfläche negativ. Ist aber $V_2 > 2V_1$, so ist der größte Theil dieser Fläche noch negativ elektrisch, es herrscht aber um den Punkt A eine mehr oder weniger ausgebreitete Zone positiver Elektricität.

346. Berechnung der Wirkung einer entfernten Elektricitätsmenge auf eine kleine leitende und isolierte Kugel. Im Anschlusse an diese Betrachtungen über eine leitende Kugel, die in ein gleichförmiges Feld gestellt wurde, wollen wir die Wirkung berechnen, welche eine entfernte elektrische Masse M auf eine kleine leitende und isolierte Kugel ausübt. Wir können unter den Voraussetzungen einer großen Entfernung der beiden aufeinander wirkenden Körper das Feld, in welchem die kleine Kugel sich befindet, als homogen ansehen und demzufolge die obigen Formeln in Anwendung bringen.

Bezeichnen wir die Entfernung M O mit r, so wird diese Entfernung unter den angegebenen Verhältnissen für alle

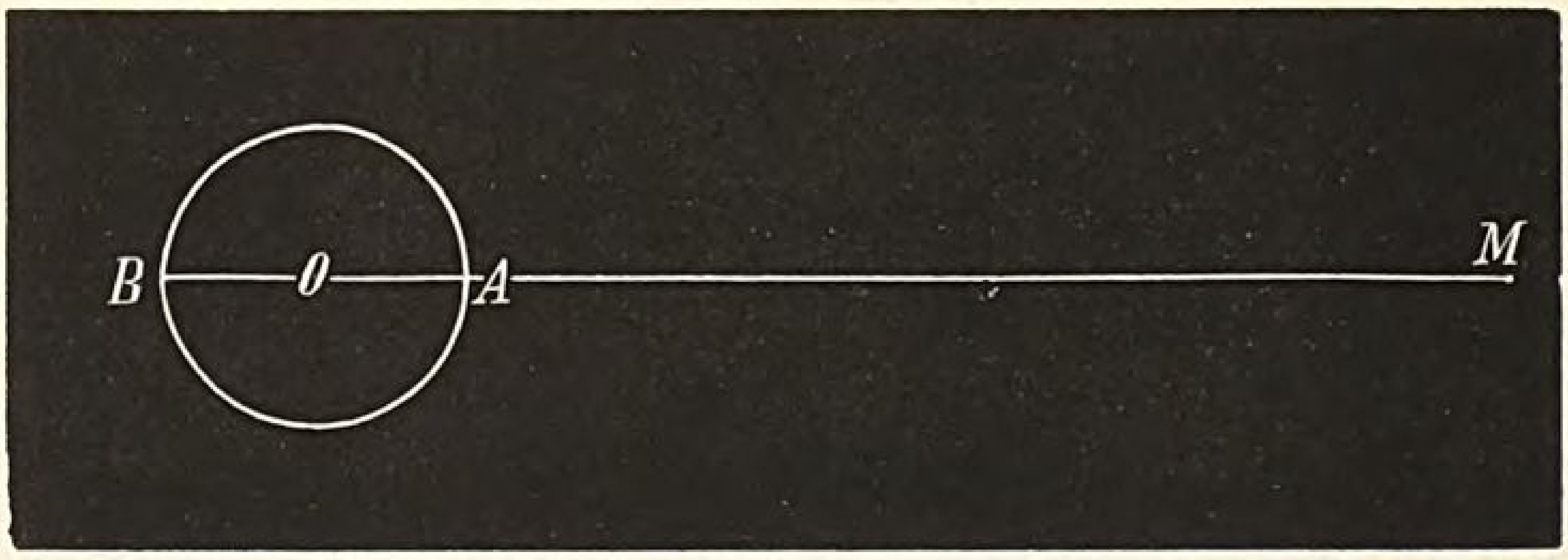


Fig. 140.

Punkte der Kugel wenig variieren und die Intensität des Feldes kann ausgedrückt werden durch

$$\Phi = \frac{M}{r^2} \dots (1);$$

dann wird das Potential der Kugel in dem äußeren Punkte M gegeben sein durch:

$$V_e = \frac{Ma^3}{r^4} \dots (2),$$

da nach den früheren Gleichungen allgemein:

$$V_e = \Phi \frac{a^3}{r^2} \cos \varphi$$

ist.

Die von Seite der Kugel auf den Punkt M ausgeübte Kraft P ist daher:

$$P = -\frac{\partial V_e}{\partial r} = -Ma^3 \frac{\partial}{\partial r}(r^{-4}) = 4\frac{Ma^3}{r^5} \ldots (3);$$

sie stellt eine Anziehung vor, welche die Kugel auf den Punkt ausübt; ist letzterer fix, die Kugel aber beweglich, so nähert sich die Kugel dem Punkte.

347. Berechnung des Falles einer dielektrischen Kugel in einem homogenen Felde. Nennen wir wieder Φ die Intensität des gleichförmigen Feldes, F_i die innere constante Kraft in der dielektrisch angenommenen Kugel, welche von der fictiven Schichte herrührt, so wird in dem jetzt zu erörternden Falle die resultierende Kraft in jedem Punkte des Innern nicht mehr Null sein, sondern einen constanten Wert $\varphi + F_i$ haben; dann wird in der That der Bedingung Genüge geleistet, welche sich auf die Dielektrica bezieht, nämlich jener Bedingung, dass in der ganzen Ausdehnung der Oberfläche des dielektrischen Körpers zwischen den normalen Kraftcomponenten im Innern und außerhalb desselben ein constantes Verhältnis besteht, das gleich dem specifischen Inductionsvermögen des Dielektricums ist.

Aus dieser Bedingung kann man leicht die Kraft F_i und dann auch die Vertheilung der fictiven Schichte bestimmen. Betrachten wir einen Punkt in der Oberfläche der Kugel, dessen Radiusvector mit der Richtung der Kraftlinien des Feldes einen $\sphericalangle\, \varphi$ bildet, so ist die normale äußere Componente

$$\Phi \cos\varphi + F_n = \Phi \cos\varphi - 2F_i \cos\varphi \ldots (1),$$

da nach früheren Formeln:

$$F_n = \frac{2}{r^3}\sigma_0 \cdot \frac{4}{3}a^3\pi \cdot \cos\varphi$$

und

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\sigma_0,$$

somit für die Oberfläche der Kugel

$$F_n = -2F_i \cos\varphi \ldots (2)$$

war.

Die normale innere Componente für denselben Oberflächenpunkt ist:

$$(\Phi + F_i)\cos\varphi \ldots (3).$$

Das Verhältnis dieser beiden Kräfte ist daher:

$$\mu = \frac{(\Phi - 2F_i)\cos\varphi}{(\Phi + F_i)\cos\varphi} = \frac{\Phi - 2F_i}{\Phi + F_i} \ldots (4).$$

Man erhält daraus den Wert der inneren Kraft F_i aus der Formel:

$$F_i = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\Phi \ldots (5).$$

Eine solche dielektrische Kugel verhält sich daher so, als wie eine ebenso große leitende Kugel, die sich in einem homogenen Felde befindet, dessen Intensität nur $\Phi\,\frac{\mu - 1}{\mu + 2}$ ist.

Die früher mit σ_0 bezeichnete Dichte ist in diesem Falle:

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\Phi \ldots (6).$$

Stellt man eine ähnliche Rechnung, wie früher, bezüglich der gegenseitigen Wirkung einer kleinen dielektrischen Kugel und eines in der großen Entfernung r liegenden elektrischen Massenpunktes M an, so erhält man für das betreffende Potential der polarisierten Kugel in dem Punkte M die Formel:

$$V_e' = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} M \frac{a^3}{r^4} \ldots (7),$$

und die Kraft in diesem Punkte ist dargestellt durch:

$$P' = -\frac{\partial V_e'}{\partial r} = 4\,\frac{\mu - 1}{\mu + 2} M a^3 \frac{1}{r^5} \ldots (8).$$

Das Verhältnis der Anziehungen, welche die Metall- und die dielektrische Kugel von derselben elektrischen Masse M erfahren, ist:

$$\frac{P}{P'} = \frac{4Ma^3}{r^5} : 4\,\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\frac{Ma^3}{r^5} = \frac{\mu + 2}{\mu - 1} \ldots (9).$$

Das ist eine sehr wichtige Beziehung; kennt man nämlich das Verhältnis $\frac{P}{P'}$, so kann man nach der vorstehenden Gleichung das specifische Inductionsvermögen der dielektrischen Kugel berechnen (¹).

Die innere Kraft ist

$$\Phi + F_i = \Phi \left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2}\right) = \Phi \frac{3}{\mu + 2} \ldots (10).$$

Für die meisten Dielektrica ist, wie später gezeigt werden wird, μ von 2 wenig verschieden; man hat daher dann die innere Kraft $= \frac{3}{4}\Phi$; ist μ unendlich groß, wie es für Leiter der Fall ist, dann ist die innere Kraft $= 0$, wie es sein muss.

Betrachten wir noch einen Punkt, der in der Nähe der Stelle A sich befindet, so ist die äußere Kraft in demselben

$$\Phi - 2F_i = \Phi \left(1 + \frac{2\mu - 2}{\mu + 2}\right) = \Phi \frac{3\mu}{\mu + 2} \ldots (11).$$

Für ein Dielektricum, für welches $\mu = 2$ ist, hat man diese Kraft $\frac{3}{2}\Phi$; für einen Leiter (also für $\mu = \infty$) wird diese Kraft $= 3\,\Phi$, erhält also den dreifachen Wert, als wenn keine leitende Kugel an dieser Stelle wäre.

348. Verlauf der Kraftlinien. Zum Schlusse dieser Untersuchung über das Verhalten einer dielektrischen Kugel in einem homogenen elektrischen Felde wollen wir noch den Verlauf der Kraftlinien in der Nähe und an der Oberfläche der Kugel in Erwägung ziehen.

Für einen Punkt an der Kugeloberfläche (in der geographischen Breite φ) ist die gesammte normale, also in die Rich-

(¹) Diesbezügliche Versuche wurden von L. Boltzmann in seiner „Experimentaluntersuchung über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper" (Wiener Sitzungsberichte Bd. LXVIII, Theil II. p. 81) angestellt. — Eine elementare Ableitung der obigen Gleichung 9 hat Professor Boltzmann Herrn Gordon mitgetheilt. (Man sehe: A physical treatise on Electricity and Magnetism by J. E. H. Gordon, London 1880; 1. Theil p. 136—141.) Wir werden später auf diesen Gegenstand zurückkommen.

tung des Kugelradius fallende Kraftcomponente $F_n + \Phi \cos\varphi$; die tangentiale Kraftcomponente ist gegeben durch $\Phi \operatorname{Sin}\varphi - F_t$; bezeichnet man, wie früher, den Winkel, den die Richtung der totalen Kraft in diesem Oberflächenpunkte mit dem verlängerten Radius bildet, θ, so gilt:

$$tg\,\theta = \frac{\Phi \sin\varphi - F_t}{\Phi \cos\varphi + F_n} \ldots (12).$$

Es ist ferner:

$$\left.\begin{aligned} F_t &= \Phi \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \sin\varphi \\ F_n &= 2\,\Phi \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cos\varphi \end{aligned}\right\} \ldots (13),$$

somit nach einer leichten Reduction:

$$tg\,\theta = \frac{1}{\mu}\, tg\,\varphi.$$

Es schneiden daher, wie die beistehende (Fig. 141) zeigt, die Kraftlinien die Oberfläche der dielektrischen Kugel nicht

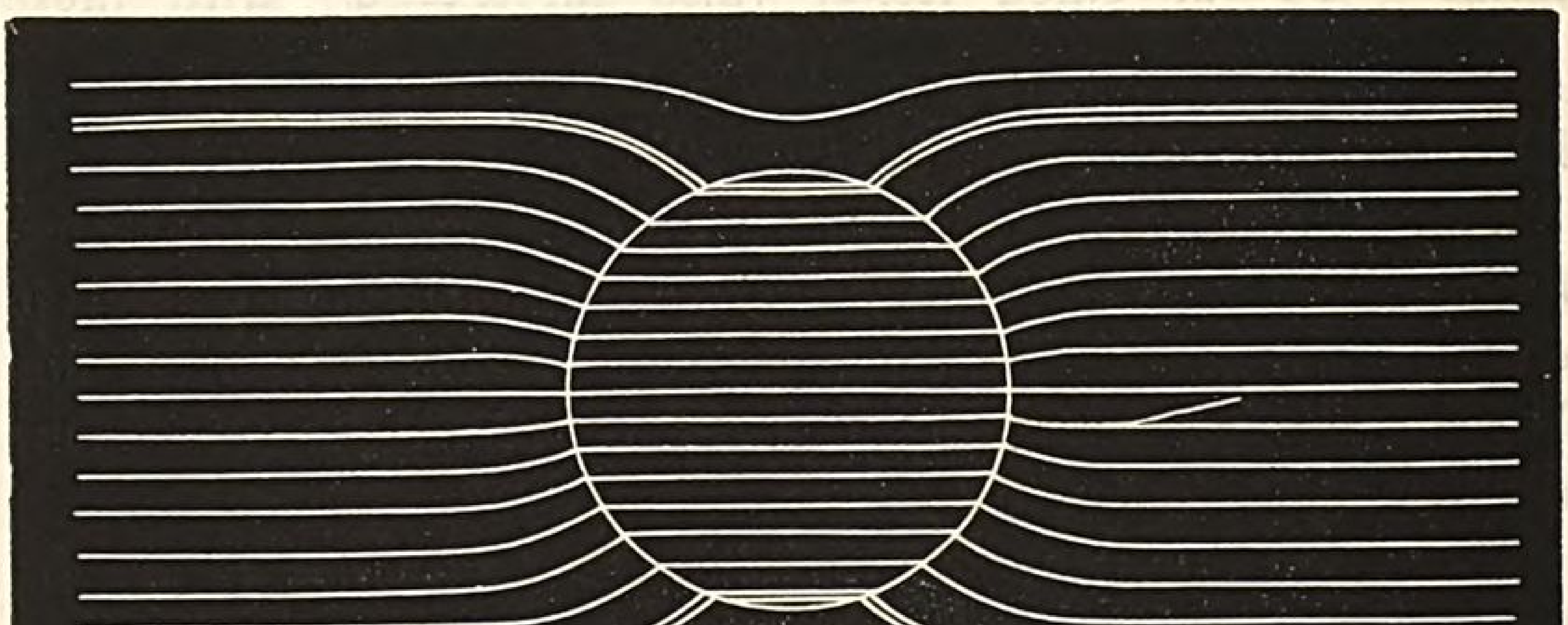


Fig. 141.

mehr normal, wie es bei einer leitenden Kugel der Fall war; es ist in unserem jetzigen Falle $tg\,\theta < tg\,\varphi$, somit $\theta < \varphi$; innerhalb der Kugeln verlaufen die Kraftlinien parallel zur Richtung des elektrischen Feldes.

Man kann also sagen: die Kraftlinien erleiden innerhalb der dielektrischen Kugel eine Brechung, die durch den specifischen Inductionscoefficienten vollkommen bestimmt ist.

Für die Winkelentfernung $\varphi = 90^0$ erhält man $\operatorname{tg} \theta = \infty$, $\theta = 90^0$; die Kraftlinien, welche also an den Stellen $\varphi = 90^0$ und $\varphi = -90^0$ die Kugel erreichen, sind daher tangential zur Oberfläche.

349. Hypothese von Poisson über die Beschaffenheit der dielektrischen Körper. Die von Poisson aufgestellte Hypothese, um die magnetischen Erscheinungen zu erklären, wurde auf das Studium der dielektrischen Erscheinungen von Mosotti und Faraday übertragen. Letzterer spricht über diese Hypothese in seinen Experimental Researches, serie XIV., §. 1679. Nach dieser Hypothese nimmt man an, dass die magnetischen und dielektrischen Körper aus Theilchen bestehen, z. B. von kugelförmiger Gestalt, welche vollkommen leitend sind und in einem nicht leitenden Medium eingebettet sind. Bringt man einen derartigen magnetischen oder dielektrischen Körper in ein magnetisches, respective elektrisches Feld, so werden die kleinen leitenden Kugeln zwei Pole annehmen; bei der Entladung oder Wegnahme des Körpers aus dem magnetischen oder elektrischen Felde kehren die Kugeln in ihren neutralen Zustand zurück. Nebenbei sei bemerkt, dass der Coefficient μ, den wir in den elektrischen Untersuchungen specifisches Inductionsvermögen nennen, für magnetische Körper von Thomson den Namen des Coefficienten der magnetischen Permeabilität erhielt; derselbe ist gleichbedeutend mit dem Leitungsvermögen für die Kraftlinien (1).

Im Nachstehenden wollen wir nun die Kugelgestalt der kleinen leitenden Theilchen, die im isolierenden Medium zerstreut sind, annehmen und die Schlüsse ziehen, welche aus der Poisson'schen oder Faraday'schen Hypothese folgen.

Betrachten wir eine Kugel vom Radius a und vom specifischen Inductionsvermögen μ_1, die sich in einem elektrischen Felde von der Intensität Φ_2 und dem specifischen Inductions-

(1) Thomson, Reprint of papers, Art. 628.

vermögen μ_2 befände. Zunächst soll die innere elektrische Kraft der durch Polarisation auf der Kugel gebildeten Elektricitätsschichte gerechnet werden. Die gebildete Verschiebungsschichte (couche de glissement) liefert im Innern der Kugel eine constante Kraft F_1, wie wir früher gehört haben, und ein homogenes Feld, dessen Intensität dargestellt wird durch

$$\Phi_1 = \Phi_2 + F_1 \ldots (1).$$

Führen wir wieder die für Dielektrica aufgestellte Bedingungsgleichung bezüglich der inneren und äußeren Kraftcomponenten, die normal zur Oberfläche der Kugel sind, ein und betrachten zu diesem Behufe einen Punkt der Oberfläche, welcher so gelegen ist, dass seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte der Kugel mit der Kraftrichtung des elektrischen Feldes den Winkel φ bildet, so erhält man für die normale innere Kraft:

$$\mu_1 \Phi_1 \cos\varphi = \mu_1 (\Phi_2 + F_1) \cos\varphi \ldots (2),$$

für die normale äußere Kraft:

$$\mu_2 \Phi_2 \cos\varphi - 2\,\mu_2 F_1 \cos\varphi \ldots (3)$$

und daher:

$$\mu_1 (\Phi_2 + F_1) = \mu_2 \Phi_2 - 2\mu_2 F_1 \ldots (4);$$

und hieraus ergibt sich:

$$F_1 (\mu_1 + 2\mu_2) = \Phi_2 (\mu_2 - \mu_1) \ldots (5)$$

somit

$$F_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2} \Phi_2 \ldots (6).$$

Es wird ferner das Potential der auf der Kugel befindlichen Verschiebungsschichten in einem äußeren Punkte, der vom Mittelpunkte der Kugel um r absteht, ausgedrückt werden durch:

$$v = - F_1 \frac{a^3}{r^2} \cos\varphi = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \Phi_2 \frac{a^3}{r^2} \cos\varphi \ldots (7).$$

Nehmen wir nun an, eine große Kugel vom Radius R umschließe eine Anzahl n solcher kleiner polarisierter Kugeln und setzen wir ferner der Einfachheit mit Poisson voraus, dass

diese Kugeln aufeinander nicht einwirken, sondern dass die Elektrisierung einer jeden von ihnen nur von der Intensität des Feldes Φ_2 abhängig ist, was allerdings in der Wirklichkeit niemals eintreten wird, dann können wir das äußere Potential dieser großen Kugel in einem Punkte, der sehr weit entfernt ist, ausdrücken durch

$$V = n\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}\,\Phi_2\,\frac{a^3}{r^2}\cos\varphi \ldots (8).$$

Bezeichnet man das Verhältnis des Raumes, welcher von den kleinen Kugeln eingenommen wird, zu dem Volumen der dieselben umschließenden großen Kugel mit h, so ist demnach:

$$h = n.\frac{4}{3}a^3\pi : \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{na^3}{R^3} \ldots (9)$$

und deshalb:

$$V = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}\,\Phi_2 \,.\, h \,.\, R^3\frac{\cos\varphi}{r^2} \ldots (10).$$

Wäre die große Kugel homogen und vom specifischen Inductionsvermögen μ, dann würde sie auf denselben betrachteten Punkt das Potential V' ausüben, bestimmt durch:

$$V' = \frac{\mu - \mu_2}{\mu + 2\mu_2}\,\Phi_2\,\frac{R^3}{r^2}\cos\varphi \ldots (11).$$

Sind V und V' gleich, dann wird die Wirkung die gleiche sein und man wird haben:

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}.h = \frac{\mu - \mu_2}{\mu + 2\mu_2} \ldots (12).$$

Diese Gleichung liefert den Wert von μ, es ist nämlich

$$\mu = \frac{\mu_1 + 2\mu_2 - 2h(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + 2\mu_2 + h(\mu_2 - \mu_1)}\,\mu_2 \ldots (13).$$

Man kann also sagen, das System der betrachteten kleinen Kugeln verhält sich in ihrer Wirkung nach außen genau so, wie eine Kugel vom specifischen Inductionsvermögen μ, das durch obige Formel gegeben ist.

Nehmen wir nun an, die kleinen Kugeln seien leitend, das äußere Medium wäre Luft, deren specifisches Inductionsvermögen man $\mu_2 = 1$ setzt, dann wird man wegen $\mu_1 = \infty$ haben:

$$\mu = \frac{1 + 2h}{1 - h}$$

und daraus folgt

$$h = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \ldots (14).$$

350. Aus derartigen theoretischen Betrachtungen und dem Experimente lassen sich Schlüsse über den Wert von h ziehen. Wir haben früher gehört, dass die Capacität eines Kugelcondensators, allgemein eines beliebigen Condensators μ-mal größer ist, wenn ein Dielektricum zwischen den Belegungen, als wenn Luft sich zwischen denselben befindet.

Aus der Theorie der Leydnerflasche ist bekannt, dass, wenn $V_1 - V_2$ die Potentialdifferenz der beiden Belegungen, e die Dicke des isolierenden Zwischenmittels ist, S die Fläche der Belegung bedeutet, die Ladung M durch die Gleichung

$$M = \frac{S}{4\pi e}(V_1 - V_2)$$

ausgedrückt wird; in dem Falle eines Dielektricums als isolierendes Zwischenmittel von dem specifischen Inductionsvermögen μ erhält man für die Ladung die Formel

$$M = \frac{\mu S}{4\pi e}(V_1 - V_2).$$

Bei der vollständigen Entladung einer solchen Batterie ist die geleistete Arbeit

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} M (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} M^2 \frac{4\pi e}{\mu S} = \frac{2\pi e}{\mu S} M^2 \ldots (15).$$

Setzt man für μ den eben gefundenen Wert:

$$\mu = \frac{1 + 2h}{1 - h}$$

ein, so hat man:

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi e}{S} M^2 \frac{1-h}{1+2h} \ldots (16).$$

Stellt man gleichgestaltete Condensatoren her und wendet verschiedene Dielektrica als isolierende Zwischenmittel an, so kann man durch Messen der bei der Entladung der Condensatoren im Schließungskreise hervorgerufenen Wärmemengen einen Schluss auf die Größe h in den verschiedenen Fällen ziehen. Derartige Versuche wurden von Schwedoff (Pogg. Ann. 137, 1869) angestellt. So fand er, dass die Erwärmung bei Anwendung einer Ebonitplatte 2·2mal größer war als bei Anwendung einer Glasplatte; bezeichnet man für letztere den Coefficienten h mit h_1, für erstere h_2, dann hat man:

$$\frac{1-h_2}{1+2h_2} = 2 \cdot 2 \, \frac{1-h_1}{1+2h_1}.$$

Weil nun h_2 zwischen 0 und 1 liegen muss, so wird man haben:

$$2 \cdot 2 \, \frac{1-h_1}{1+2h_1} < 1 \text{ deshalb } h_1 > \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2}.$$

Es müssten demnach die hypothetischen, im Glase liegenden leitenden Theilchen mehr als $\frac{1}{4}$ des Glasvolumens einnehmen.

Für dielektrische Körper, deren specifisches Inductionsvermögen der Zahl 2 sehr benachbart ist, würde man haben:

$$h = \frac{1}{4}.$$

Zu der von Poisson gemachten Bemerkung, dass die kleinen Kugeln nicht aufeinander einwirken, sei Folgendes bemerkt:

Es ist allerdings, wie die Rechnung lehrt, die Wirkung einer polarisierten leitenden Kugel in einem äußeren Punkte im Verhältnisse zur inneren Wirkung sehr gering, zumal wenn die Kugel klein ist. Wenn aber, wie wir gerade gesehen haben, das von den leitenden Kugeln eingenommene Volumen der vierte Theil des ganzen Volumens ist, dann kann die von einer Kugel auf die benachbarten ausgeübte Wirkung keinesfalls mehr gegen die innere Kraft vernachlässigt werden. So

kann nach Mascart und Joubert (leçons etc. p. 177) die Wirkung einer Kugel im Mittelpunkte der am meisten benachbarten $\frac{1}{11}$ der inneren Kraft erreichen.

Es ist aber auch zu bemerken, dass, wenn die gegenseitige Wirkung der Kugeln eine Vergrößerung der Elektrisierung in einer Richtung parallel zur Kraft des elektrischen Feldes veranlasst, sie andererseits in einer dazu senkrechten Richtung diese Elektrisierung vermindert, so dass man immerhin der Wahrheit genug nahe kommt, wenn man mit Poisson die Annahme macht, dass die Wechselwirkung der Kugeln vernachlässigt werden kann.

351. Betrachtung concentrischer Kugelschichten in einem homogenen Felde. Im Anschlusse an das Problem einer dielektrischen Kugel, welche sich in einem gleichförmig elektrischen Felde befindet, wollen wir noch den Fall untersuchen, wo ein System von zwei concentrischen sphärischen Körpern S_1 und S_2 von den Radien a_1 und a_2 und den specifischen Inductionsvermögen μ_1 und μ_2 in ein gleichförmiges Feld von der Intensität Φ gestellt sei.

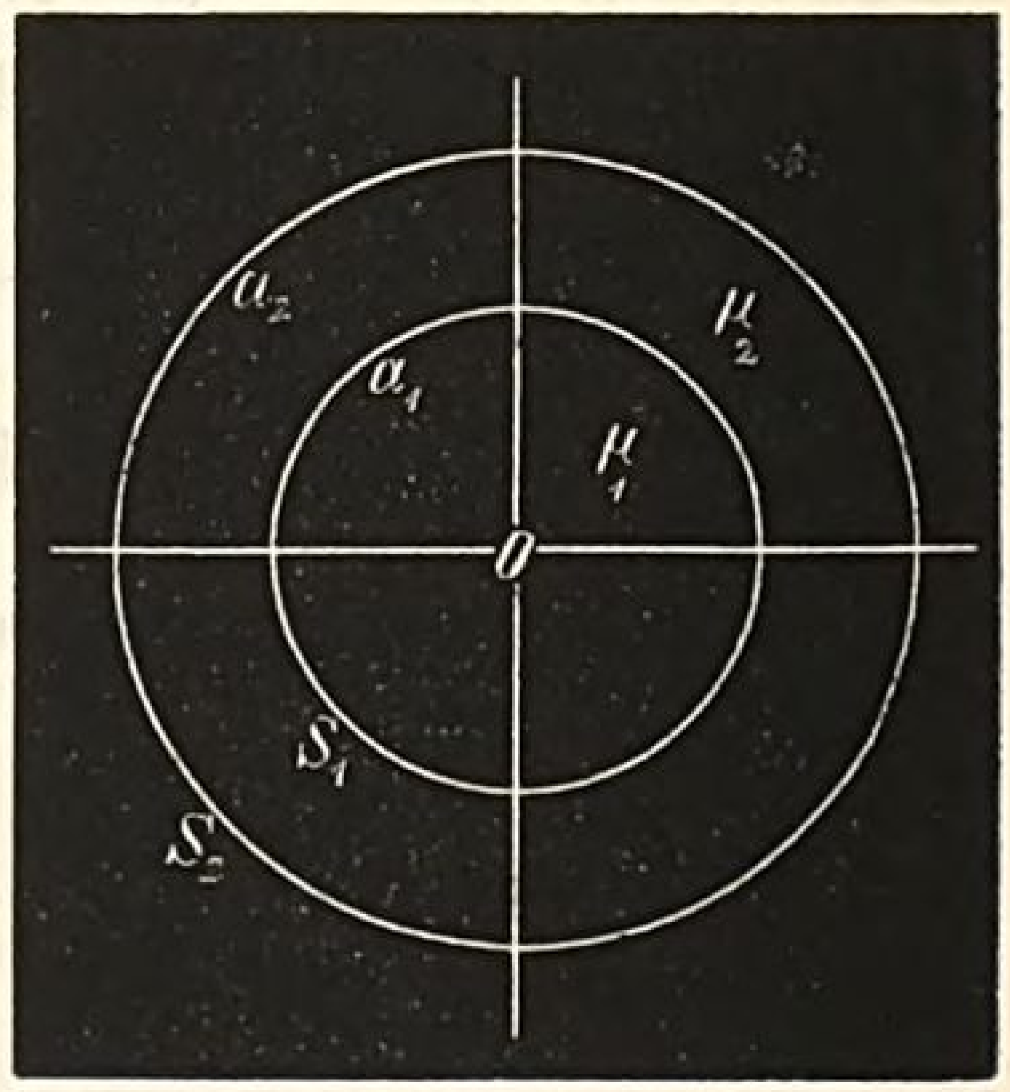


Fig. 142.

Erwägen wir zunächst die innere Kugel S_1. Würde das Medium von dem specifischen Inductionsvermögen μ_2, welches die innere Kugel einhüllt, unbegrenzt sein und ein constantes Feld von der Intensität Φ_2 ausmachen, so würde im Innern der ersten Kugel eine constante Kraft F_1 herrschen und ein gleichförmiges Feld von der Intensität Φ_1, welche Größe aus der Gleichung

$$\Phi_1 = F_1 + \Phi_2 \ldots (1)$$

bestimmt ist.

Die innere Kugel würde nämlich in einen polarisierten Zustand gelangen. Gemäß der Oberflächenbedingung für Di-

elektrica würde man für einen Punkt, der sich auf der Oberfläche S_1 befindet, die Gleichung

$$\mu_1 \Phi_1 = \mu_2 (\Phi_2 - 2F_1) \ldots (2)$$

erhalten, wie bereits früher gezeigt wurde.

Das gleichförmige Feld von der Intensität Φ_2, welches sich außerhalb der Kugel S_1 befindet, ist jenes, welches für das Innere der Kugel S_2 aus einem gleichförmigen Felde von der Intensität Φ und der inneren Kraft F_2 sich zusammensetzen würde, welch' letztere von einer fictiven Schichte Elektricität herrühren würde, die auf der Oberfläche S_2 ausgebreitet ist; man hat demnach:

$$\Phi_2 = \Phi + F_2 \ldots (3).$$

Wir wenden auf einen Punkt der Oberfläche S_2 wieder die Bedingung für die Oberfläche eines Dielektricums an, müssen aber hierbei berücksichtigen, dass man auch die Wirkung der auf der Kugeloberfläche S_1 ausgebreiteten Elektricitätsschichte in Rechnung ziehen muss.

Man erhält nun für einen Punkt der Oberfläche S_2 die Bedingung:

$$\mu_2 \left[\Phi_2 - 2F_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \right] = \mu_3 \left[\Phi - 2F_2 - 2F_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \right] \ldots (4),$$

da ganz allgemein

$$F_n = - 2F_i \frac{a^3}{r^3} \cos \varphi$$

ist, wenn r die Entfernung des Punktes, in welchem man die normale Wirkung betrachtet, vom Mittelpunkte der polarisierten Kugel ist. Die Größe μ_3 bedeutet das specifische Inductionsvermögen jener dielektrischen Substanz, die außerhalb der Oberfläche S_2 sich befindet.

Fügen wir in der vorletzten Gleichung die Glieder mit F_1 und F_2 zusammen, so erhält man:

$$\mu_2 \Phi_2 = \mu_3 (\Phi - 2F_2) + 2 (\mu_2 - \mu_3) F_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \ldots (5).$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den beiden Gleichungen

$$\Phi_1 = F_1 + \Phi_2$$
$$\Phi_2 = \Phi + F_2$$

und der Formel:

$$\mu_1 \Phi_1 = \mu_2 (\Phi_2 - 2 F_1)$$

kann dazu dienen, die inneren Kräfte F_1, F_2 als Functionen von μ_1, μ_2, μ_3 und Φ auszudrücken, also von Größen, die durch die Natur des Problemes gegeben sind.

352. Specielle Fälle. Ist das äußere Medium Luft, für welche $\mu_3 = 1$ ist, dann hat man, wenn man abkürzungshalber $\lambda = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$ setzt, folgende Gleichungen zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 (F_1 + F_2 + \Phi) &= \mu_2 (\Phi + F_2 - 2F_1) \\ \mu_2 (\Phi + F_2 - 2\lambda F_1) &= \Phi - 2F_2 - 2\lambda F_1 \end{aligned}\right\} \ldots (6).$$

Ist eine dielektrische Kugelschale in Luft, so hat man auch $\mu_1 = 1$; nennt man dann μ_2 kurz etwa μ, so werden die eben angegebenen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F_1 + F_2 + \Phi &= \mu (\Phi + F_2 - 2F_1) \\ \Phi - 2F_2 - 2\lambda F_1 &= \mu (\Phi + F_2 - 2\lambda F_1) \end{aligned}\right\} \ldots (7).$$

Nach Lösung dieser Gleichungen erhält man:

$$F_1 = \frac{3(\mu - 1)}{(1 + 2\mu)(\mu + 2) - 2(\mu - 1)^2\lambda} \Phi \ldots (8)$$

$$F_2 = \frac{(1 - \mu)\left[1 + 2\mu - 2(\mu - 1)\lambda\right]}{(1 + 2\mu)(\mu + 2) - 2(\mu - 1)^2\lambda} \Phi \ldots (9).$$

Was die innerhalb der Kugelschale, also innerhalb der Fläche S_1 wirkende Kraft betrifft, so wird dieselbe dargestellt durch

$$F = \Phi + F_1 + F_2 \ldots (10)$$

und nach Einsetzung obiger Werte und gehöriger Reduction:

$$F = \frac{9\mu}{9\mu + 2(1 - \lambda)(\mu - 1)^2} \Phi \ldots (11).$$

Die Kraft innerhalb der Fläche S_1 ist also constant, in dem Zwischenraume zwischen den beiden concentrischen Kugel-

flächen S_1 und S_2, ebenso in dem Raume außerhalb der Kugelschale ist dies aber nicht der Fall.

Man sieht ferner aus der Formel (11), dass, da der Coefficient, der bei Φ steht, ein echter Bruch ist, die Kraft innerhalb der Oberfläche S_1 nur ein Bruchtheil der Kraft des elektrischen homogenen Feldes ist. Wäre die Kugelschale leitend, also $\mu = \infty$, dann wäre $F = o$, in diesem Falle würde also die leitende Kugelschale die im Innern derselben befindlichen Körper vor äußeren elektrischen Einflüssen schützen (elektrische Schirmwirkung).

Für ein dielektrisches Medium, dessen specifisches Inductionsvermögen von 2 wenig verschieden ist, ist der Coefficient von Φ stets nur wenig von der Einheit verschieden; wäre die dielektrische Kugelschale Luft, so wäre

$$F = \Phi,$$

was selbstverständlich ist.

Die vorstehenden Probleme wurden von Maxwell in seinem „treatise" (deutsche Übersetzung in den Artikeln 312 und 313), ferner in dem mehrfach erwähnten Werke von Mascart und Joubert (p. 171 — 175) behandelt. Dort wird auch der allgemeine Fall erörtert, in welchem mehrere concentrische Kugelschichten in einem gleichförmigen Felde sich befinden. — Es entspricht das letzte Problem, welches oben gerechnet wurde, dem Falle einer magnetischen Kugelschale, die in einem gleichförmigen magnetischen Felde sich befindet, einem Probleme, das unter dem Namen Barlow'sches Problem bekannt ist.

353. Berechnung der Energie einer kleinen Kugel in einem elektrischen Felde. Wir nehmen eine sehr kleine Kugel an, die wegen ihrer Kleinheit, auch wenn sie in ein variables Feld gestellt wird, sich so verhalten wird, als befände sie sich in einem homogenen Felde; diese Kugel wird eine Polarisation erfahren und man kann den Zustand, in welchem sie sich befindet, nach dem früheren durch zwei sehr nahe, gleiche und entgegengesetzt bezeichnete elektrische Massen $+m$ und $-m$, deren elektrisches Moment durch

$$\varepsilon = u\,\sigma_0,$$

wo u das Volumen der Kugel bedeutet, ausgedrückt werden kann.

Wir haben früher nachgewiesen, dass σ_0 für eine leitende Kugel den Wert

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi}\Phi$$

hat; für eine dielektrische Kugel wird σ_0 ausgedrückt durch:

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\Phi = \frac{3}{4\pi}h\Phi,$$

wenn Φ die Intensität des Feldes in der Nachbarschaft der Kugel, h das Verhältnis des Raumes, welcher von den hypothetischen, im Dielektricum zerstreuten, leitenden kleinen Körpern eingenommen wird, zu dem Volumen des ganzen Dielektricums bezeichnet.

Bezeichnet man allgemein den Coefficienten von Φ mit λ, so hat man also

$$\sigma_0 = \lambda\,\Phi \ldots (1)$$

und

$$\varepsilon = u\lambda\,\Phi \ldots (2).$$

Die Polarisationsaxe ist parallel zur Kraft Φ.

Nennen wir die Entfernung der beiden durch Polarisation getrennten Elektricitätsmengen $+m$ und $-m \ldots \delta$; nennen wir ferner die Potentiale in den Punkten $-m$ und $+m$ respective V_1 und V_2, so hat man für die Energie einer solchen kleinen Kugel den Ausdruck

$$W = \Sigma mV = -mV_1 + mV_2 = -m(V_1 - V_2) \ldots (3).$$

Schreiben wir diesen Ausdruck in der Form:

$$W = -m\delta\frac{V_1 - V_2}{\delta}$$

und bedenken, dass

$$\frac{V_1 - V_2}{\delta} = \Phi$$

die Intensität des Feldes an der betrachteten Stelle ist, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Formel:

$$W = -\varepsilon \Phi \ldots (4).$$

Rückt die Kugel an einen Ort, wo die Stärke des Feldes $\Phi + d\Phi$ ist, so würde die Energie der Kugel an dieser Stelle sein

$$W_1 = -\varepsilon (\Phi + d\Phi) \ldots (5).$$

Strenge genommen hat sich auch die Größe ε mit der Veränderung der Lage der Kugel geändert; doch verursacht diese Veränderung in der Energieberechnung nur einen Unterschied von einem Glied zweiter Ordnung. Bezeichnen wir die Energie, welche nothwendig ist, um die kleine Kugel von der ersten Position in die zweite zu bringen, mit dW, so ist

$$\begin{aligned} dW &= -\varepsilon\, d\Phi \\ &= -u\lambda \Phi\, d\Phi \ldots (6). \end{aligned}$$

Man hat somit, wenn man die gesammte Zunahme der Energie in Rechnung zieht, wenn die Kugel von einem Punkte, in welchem die Kraft Φ_0 ist, zu einem anderen Punkt vorrückt, in dem die Kraft Φ ist:

$$W - W_0 = -u\lambda \int_{\Phi_0}^{\Phi} \Phi d\Phi = -u\lambda \frac{\Phi^2 - \Phi_0^2}{2} \ldots (7).$$

Führt man die Kugel aus dem elektrischen Felde in die Unendlichkeit, wo $W_0 = 0$ und $\Phi_0 = o$ ist, so ist hierzu eine Arbeitsleistung nothwendig, die durch

$$u \frac{\lambda}{2} \Phi^2 = \frac{u}{2} \cdot \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \Phi^2 \ldots (8)$$

ausgedrückt wird. Für eine leitende Kugel hat man als Ausdruck für diese Arbeit:

$$\frac{u}{2} \cdot \frac{3}{4\pi} \Phi^2 \ldots (9).$$

Man ersieht somit, dass im ersteren Falle die zum Überführen der Kugel ins Unendliche zu leistende Arbeit geringer als im letzteren Falle ist.

Selbstverständlich strebt ein sich selbst überlassener Körper seine Energie zu verringern; aus der Gleichung

$$dW = - u\lambda \Phi d\Phi = - \frac{u\lambda}{2} d(\Phi^2)$$

ersieht man, dass er dann sich in Gegenden begibt, in welchen der Wert von Φ^2 am raschesten zunimmt, also dorthin, wo die Kraft dem absoluten Werte nach ein Maximum ist.

Bezeichnen wir die Richtung, in welcher Φ^2 am schnellsten variiert, mit n, so finden wir die auf die Kugel wirkende Kraft aus der Bedingung:

$$F\, dn + dW = o,$$

oder es ist

$$F = \frac{u\lambda}{2} \frac{d\Phi^2}{dn} \ldots (10).$$

Der Körper ist dann im Gleichgewichte, wenn

$$d\Phi^2 = o,$$

oder

$$\Phi . d\Phi = o$$

ist.

Dieser Gleichung kann entweder dadurch genügt werden, dass $\Phi = o$ oder $d\Phi = o$; das letztere kann wieder stattfinden, wenn Φ constant ist, das Feld also homogen ist, oder wenn die Kraft ein Maximum oder Minimum ist. Im Falle eines homogenen Feldes ist der Gleichgewichtszustand ein indifferenter; ist die Kraft ein Maximum, so ist der Gleichgewichtszustand stabil, labil hingegen an den Minimalstellen und an jenen Punkten, wo die Kraft Null ist.

Was wir an dieser Stelle von einer kleinen Kugel gesagt haben, gilt ebenso für einen beliebig gestalteten sehr kleinen Körper; auch er wird im Verhältnisse zur Kraft des Feldes elektrisch, die in jenem Punkte herrscht, in welchem er sich befindet; ferner ist ebenfalls die Variation seiner Energie der Variation des Quadrates der Kraft proportional. Ein beliebig gestalteter, nicht sphärischer Körper wird aber um sich selbst

eine Drehbewegung ausführen, so dass für ein stabiles Gleichgewicht um seinen Schwerpunkt die elektrische Energie ein Minimum und die Elektrisierung ein Maximum ist.

Zu bemerken ist, dass die Kraft in keinem Punkte eines variablen elektrischen Feldes, der außerhalb der wirkenden Massen liegt, ein Maximum sein kann. Nach dem früher erwiesenen Theoreme von Earnshaw kann nämlich ein elektrisierter Körper in einem variablen Felde nicht im stabilen Gleichgewichte sich befinden. Wir haben ferner soeben gesehen, dass ein kleiner Körper nur dann im stabilen Gleichgewichte sein kann, wenn er sich an Punkten befindet, in welchen der Kraftwert ein Maximum ist; dies kann daher niemals für eine Stelle eintreten, welche außerhalb der wirksamen Massen liegt.

354. Verhalten von dielektrischen und leitenden Nadeln in einem variablen elektrischen Felde. Wir wollen im weiteren Verlaufe nach Mascart und Joubert(1) das Verhalten von dielektrischen und leitenden Nadeln in einem variablen elektrischen Felde näher untersuchen.

Früher sollen noch einige einleitende Bemerkungen gemacht werden.

Betrachtet man nach der Poisson-Faraday'schen Hypothese die dielektrischen Körper als bestehend aus sehr kleinen leitenden Kugeln, die in ein isolierendes Medium eingebettet sind und die aufeinander keinen Einfluss ausüben, und fassen wir einen dielektrischen Körper von dem Volumen Ω, der sich in einem homogenen elektrischen Felde befindet und n derartige kleine leitende Kugeln umfasst, von denen jede das Volumen u hat, ins Auge, so ist, wie wir gesehen haben, das elektrische Moment jeder von diesen leitenden Kugeln:

$$\varepsilon = u \,.\, \frac{3}{4\pi}\,\Phi \;...\; (1),$$

somit das elektrische Moment des ganzen dielektrischen Körpers

$$E = nu \,.\, \frac{3}{4\pi}\,\Phi = \Omega \,.\, \frac{nu}{\Omega} \,.\, \frac{3}{4\pi}\,\Phi \;...\; (2).$$

(1) Mascart et Joubert l. c. (p. 195 u. f.)

Nun ist nach den Entwicklungen des §. 349

$$\frac{nu}{\Omega} = h \ldots (3),$$

somit:

$$E = \frac{3h}{4\pi} \Omega . \Phi$$

oder:

$$E = \lambda . \Omega . \Phi \ldots (4),$$

wenn man abkürzungshalber

$$\lambda = \frac{3h}{4\pi} \ldots (5)$$

setzt.

Es wird deshalb das elektrische Moment eines beliebig großen dielektrischen Körpers, der sich in einem homogenen Felde befindet, durch dieselbe Formel ausgedrückt, wie das Moment einer Kugel. Ein solcher Körper wird somit, wenn wir an der Poisson-Faraday'schen Hypothese über die Beschaffenheit dielektrischer Körper festhalten, mag er von irgend welcher Gestalt sein, im homogenen elektrischen Felde auch im Gleichgewichte bezüglich seines Massenmittelpunktes sein, wie auch immer seine Lage in diesem Felde ist. Er wird keine Rotationsbewegung erfahren, weil keine der elementaren, den Körper zusammensetzenden Kugeln einen Impuls zu einer solchen Bewegung erfährt.

Ganz anders jedoch verhält sich ein dielektrischer Körper im variablen elektrischen Felde. Ein jedes Volumenelement des Dielektricums, welches nur der Wirkung des Feldes unterworfen ist, hat die Tendenz, sich an Stellen zu begeben, in welchen die Kraft eine Vergrößerung erfährt und zwar ist die Wirkung auf ein solches Element von Seite des elektrischen Feldes nach den früheren Entwicklungen ausgedrückt durch:

$$F = \frac{\lambda}{2} dv \frac{d\Phi^2}{dn} \ldots (6).$$

355. Anwendung der obigen Betrachtungen auf die Berechnung der Gleichgewichtslage einer kleinen dielektrischen Nadel. Als speciellen Fall betrachten wir nun eine kleine unendlich dünne dielektrische Nadel AB (Fig. 143), die sich um ihren Schwerpunkt in einer horizontalen Ebene, die wir als XY-Ebene wählen, um die Z-Axe drehen kann. Die Länge der Nadel sei $2l$. Nehmen wir an, das Quadrat der Intensität des variablen elektrischen Feldes sei im Mittelpunkte der Nadel Φ_0^2, dann wird es an der Stelle eines Volumelementes der dielektrischen Nadel, welches im Punkte M mit den Coordinaten x und y liegt, sein:

$$\Phi^2 = \Phi_0^2 + ax + by \ldots (1),$$

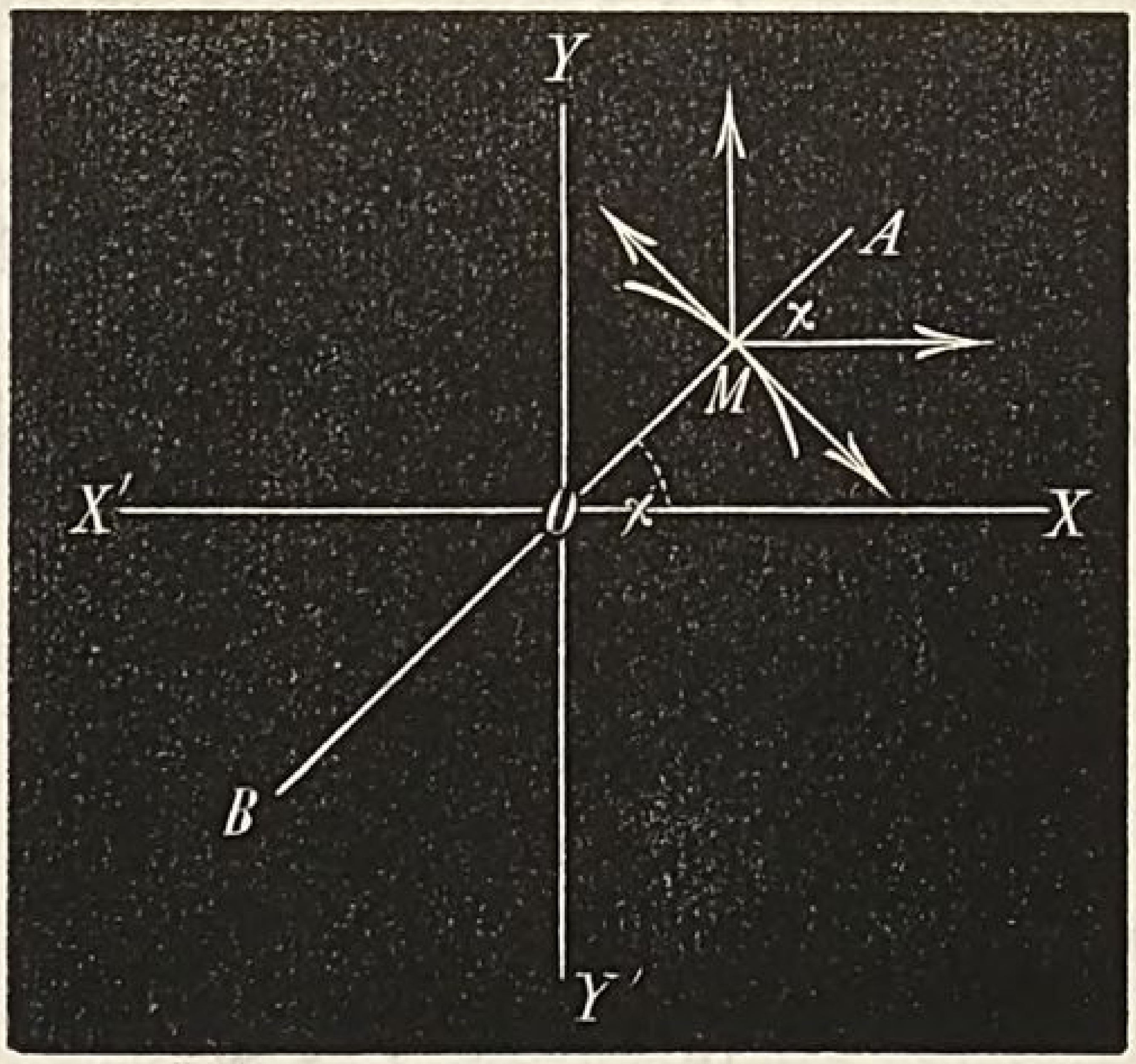


Fig. 143.

wenn wir nach dem Lehrsatze von Maclaurin entwickeln und annehmen, dass die höheren Potenzen von x und y wegen der Kleinheit der Nadel vernachlässigt werden können. Die im Punkte M wirkende Kraft zerlegen wir in Componenten längs der X- und Y-Axe und erhalten für dieselben:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\lambda}{2}\, dv \frac{\partial}{\partial x}(\Phi^2) = \frac{a\lambda}{2}\, dv \\ Y &= \frac{\lambda}{2}\, dv \frac{\partial}{\partial y}(\Phi^2) = \frac{b\lambda}{2}\, dv \end{aligned}\right\} \ldots (2).$$

Zeichnen wir vom Mittelpunkte O mit dem Radius OM einen Kreis, so sind die zu diesem Kreise tangentialen Componenten dieser Kräfte, wenn die Nadel mit der X-Axe den Winkel χ bildet:

$$-\,X \sin\chi \text{ und } Y \cos\chi,$$

wobei die erstere Componente negativ bezeichnet wurde, weil sie eine Verminderung des Winkels χ veranlassen würde. Soll die Nadel im Gleichgewichte sein, so muss jedenfalls:

$$X \sin\chi = Y \cos\chi \ldots (3)$$

werden; hieraus folgt:

$$tg\,\chi = \frac{Y}{X} = \frac{b}{a} \ldots (4).$$

Dieser Winkel χ bestimmt somit diejenige Richtung, längs welcher die Variation der Kraft am allergrößten ist. Eine solche Nadel, wie die eben betrachtete, wird um ihre Gleichgewichtslage OA Schwingungen ausführen und wir wollen im Nachstehenden noch die Dauer dieser Schwingungen berechnen.

Die tangentielle Kraft, welche auf das betrachtete Volumenelement der kleinen dielektrischen Nadel wirkt, wenn man dieselbe von der durch den Winkel χ bestimmten Gleichgewichtslage noch um einen Winkel ψ weiter dreht, wird sein

$$P = Y \cos(\chi + \psi) - X \sin(\chi + \psi) \ldots (5)$$

oder nach passender Reduction:

$$P = -\sin\psi\,(X \cos\chi + Y \sin\chi) \ldots (6).$$

Setzen wir die früher angegebenen Werte von X und Y, ebenso von χ in die letztere Gleichung ein, so erhalten wir:

$$P = -\sin\psi \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot dv \sqrt{a^2 + b^2} \ldots (7).$$

Ist r die Entfernung OM, so ist der Wert des Drehungsmomentes absolut genommen gleich

$$r \sin\psi \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, dv.$$

Das gesammte Drehungsmoment ist daher:

$$D = \lambda \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, \sin\psi \int_0^l r dv \ldots (8),$$

oder, da

$$dv = q\,dr$$

ist, wenn man den Querschnitt der Nadel mit q bezeichnet, hat man als Ausdruck für das Gesammtdrehungsmoment

$$\sin\psi \,.\, \lambda \,.\, \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, q \int_0^l r dr = \lambda \,.\, q \frac{l^2}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \,.\, \sin\psi \ldots (9).$$

Bezeichnet man die Schwingungsdauer der Nadel T, so ist bekanntlich

$$T^2 = \pi^2 \frac{K}{D} \quad ..(10),$$

wenn K das Trägheitsmoment der Nadel, D das Maximaldrehungsmoment bedeutet. Nennt man ρ die Dichte der dielektrischen Substanz, so ist

$$K = 2 \int_0^l \rho \, dv \, . \, r^2 = 2\rho q \int_0^l r^2 \, dr = 2 \, q\rho \, . \, \frac{l^3}{3} \ldots (11)$$

und nun

$$T^2 = \frac{4}{3} \frac{\pi^2 \rho l}{\lambda \sqrt{a^2 + b^2}} \ldots (12).$$

Vorausgesetzt ist, dass die Schwingungen der Nadel unendlich klein sind.

Eine dielektrische Nadel, die sich um ihren Schwerpunkt drehen kann, nimmt im Gleichgewichtszustande nicht die Richtung der Kraftlinien an, sondern folgt jener Richtung, in welcher die Kraft am allerstärksten variiert. Das Quadrat der Schwingungsdauer ist der Länge der Nadel proportional, aber nicht umgekehrt der Intensität des elektrischen Feldes an der betrachteten Stelle, sondern abhängig von dem Gesetze der Variation des Feldes, der Dichte der betrachteten Substanz und dem Factor λ.

Mascart und Joubert betrachten (l. c. p. 198, 199) noch den Fall, dass eine dielektrische Nadel in ein elektrisches Feld derart gestellt wird, dass das letztere symmetrisch bezüglich der Stelle ist, an welcher die Nadel sich befindet. Dies kann z. B. in der Weise realisiert werden, dass man die Nadel in den Mittelpunkt jener Geraden stellt, welche zwei gleiche und entgegengesetzt bezeichnete elektrische Massen verbindet. Eine der vorigen analoge Untersuchung dieses Falles liefert das Resultat, dass es zwei Lagen gibt, in denen die Nadel im Gleichgewichte sich befindet, nämlich im stabilen, wenn sie in die Verbindungsgerade der beiden elektrischen Massenpunkte fällt, im labilen, wenn sie in die senkrechte Richtung zur ersteren Linie fällt; eine Berechnung der Schwingungs-

dauer dieser Nadel liefert das Ergebnis, dass dieselbe unabhängig von der Länge der Nadel ist, aber von der Dichte der betrachteten Materie, dem Gesetze der Variation des Feldes und dem Coefficienten λ abhängt[1].

356. Gleichgewichtslage einer leitenden Nadel. Eine leitende Nadel, die unendlich klein ist, so dass man ihre Elektrisierung jener identisch betrachten kann, welche sich in einem homogenen Felde hervorrufen würde, verhält sich ganz anders. Eine solche Nadel befindet sich dann im Gleichgewichte und zwar im labilen, wenn sie eine Richtung angenommen hat, die senkrecht zu jener der Kraftlinien ist; die Elektrisierung der Nadel ist dann ein Minimum.

Bildet eine solche Nadel einen Winkel mit der Kraftrichtung des Feldes, dann wird durch die Wirkung des letzteren ein Drehungsmoment erzeugt und dasselbe trachtet die Nadel in die Richtung der Kraftlinien zu bringen. Jede der durch Polarisation hervorgerufenen Schichten ist proportional der Kraft; daraus folgt, dass das erzeugte Drehungsmoment dem Quadrate der Kraft proportional ist und dass die Schwingungsdauer einer derartigen Nadel im umgekehrten Verhältnisse zur Intensität der Kraft des elektrischen Feldes steht; außerdem hängt die Oscillationsdauer von dem Verhältnisse der Längen- und Querdimensionen der Nadel ab.

357. Anwendung der Theorie der Dielektrica auf die Theorie der Leydnerflasche. Es wurde früher (§. 325) gezeigt, dass das Potential in einem außerhalb eines homogenen Dielektricums liegenden Punkte durch die Gleichung:

$$V_e = \varkappa \int (V_1 + V_2) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS \ldots (1)$$

ausgedrückt wird. In dieser Formel bedeutet $\varkappa$ den Coefficienten der inducierten Elektricitätsmenge, V_1 das Potential des Feldes, V_2 jenes, welches durch die inducierten Elektrici-

[1] Man sehe bezüglich dieses Problemes auch Thomson: Reprint of papers Art. 670 (Remarques sur les oscillations d'aiguilles non cristallisées de faible pouvoir inductif paramagnétique ou diamagnétique, et sur d'autres phénomènes magnétiques produits par des corps cristallisés ou non cristallisés).

tätsmengen hervorgerufen wird; die Normale ist ferner nach innen gerechnet.

Für einen innerhalb des Dielektricums gelegenen Punkt hat das Potential nachstehenden Wert:

$$V_i = -4\pi\varkappa (V_1 + V_2)_0 + \varkappa \int (V_1 + V_2) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS \; . \; . \; . \; (2).$$

Hierbei bedeutet der dem ersten Klammerausdruck beigesetzte Index *o*, dass man den Wert des ersteren auf den ins Auge gefassten Punkt bezieht.

Im Nachfolgenden wollen wir nach Clausius (¹) zeigen, wie diese Gleichungen in der Theorie der Leydnerflaschen angewendet werden können. Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, es sei die Beziehung zwischen den auf den Armaturen einer Franklin'schen Tafel mit kreisförmigen Belegungen angesammelten Elektricitätsmengen und der dadurch bestimmten Potentialdifferenz zu bestimmen.

Es ist nicht nöthig, die Betrachtung auf die ganze zwischen den Belegungen befindliche Glasscheibe auszudehnen, sondern nur auf jenen kreisförmigen Theil derselben, der gerade zwischen den Belegungen liegt, denn der über die Belegungen hinausragende Theil der Glasplatte wird durch die auf den Belegungen befindlichen Elektricitätsmengen nur in geringem Maße elektrisch polarisiert werden und dieser Theil wird nur einen sehr geringen Antheil zum Werte V_2 beitragen. Die vorstehenden Oberflächenintegrale müssen somit auf die Oberfläche eines sehr schmalen Kreiscylinders ausgedehnt werden.

Um für einen Punkt P den Wert des Potentiales V_e zu bestimmen, gehen wir in folgender Weise vor: Wir denken uns im Mittelpunkte der Kreisfläche, auf welcher die Belegung I sich befindet, eine auswärts gehende Normale errichtet; der Punkt P soll in dieser Normale der Kreisfläche so nahe liegen, dass die Entfernung des Punktes von der letzteren unendlich klein gegen die Ausdehnungen der Platte ist. Wenn P in dieser Weise bestimmt ist, soll dieser Punkt die Mitte der Belegung I genannt werden.

(¹) Clausius, die mechanische Behandlung der Elektricität; Braunschweig 1879; p. 80 u. f.

Wir haben die in der Formel für V_e angegebene Integration auf folgende drei Oberflächen auszudehnen:

1. Die Kreisfläche, die mit der Belegung I überdeckt ist;

2. die gegenüberliegende Kreisfläche, auf welcher die Belegung II liegt;

3. die Cylinderfläche, welche die Peripherien der beiden Kreisflächen verbindet.

Auf jeder der Belegungen hat $V_1 + V_2$ einen constanten Wert und dieser Umstand erleichtert die Integration wesentlich.

Zuerst sei die Rechnung, welche auf die mit der Belegung I bedeckte Kreisfläche Bezug hat, ausgeführt. Nehmen wir an, der Punkt P liege in der im Mittelpunkte auswärts errichteten Normalen um die Distanz l entfernt. In einem beliebigen Punkte der Kreisfläche, der etwa vom Mittelpunkte der letzteren die Entfernung ρ habe, errichten wir eine Normale, die in den isolierenden Körper hineingeht und die Länge n habe; bezeichnet man dann r die Entfernung des Punktes P vom Endpunkte der letztgenannten Normale, so hat man:

$$r = \left\{ \rho^2 + (l + n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (3)$$

und deshalb

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -(l+n)\left\{ \rho^2 + (l+n)^2 \right\}^{-\frac{3}{2}}.$$

Der Wert dieses Differentialquotienten für die Oberfläche ist:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -l\left\{ \rho^2 + l^2 \right\}^{-\frac{3}{2}} \quad \ldots (4).$$

Bezeichnet man den Wert von $V_1 + V_2$ auf der Kreisfläche I, der nach den früheren Bemerkungen constant ist, mit A, so hat man, wenn man noch v_e den Theil des äußeren Potentiales bezeichnet, der sich auf die betrachtete Kreisfläche bezieht:

$$v_e = \varkappa A \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -2\pi\varkappa A \int_0^R \frac{l\rho\, d\rho}{(\rho^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

oder:

$$v_e = -2\pi\varkappa A \left[1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right] \ldots (5).$$

R bedeutet hierbei den Radius der Kreisfläche. Nimmt man nun den bisher in der Entfernung l von der Kreisfläche gedachten Punkt so nahe an dieser Fläche an, dass diese Distanz gegen die Dimensionen der Platte vernachlässigt werden kann, so wird aus der vorigen Formel

$$v_e = -2\pi\varkappa A \ldots (6).$$

Eine ganz ähnliche Betrachtung liefert für die zweite Kreisfläche den entsprechenden Theil v_e' des Potentiales V_e in der nachfolgenden Formel:

$$v_e' = 2\pi\varkappa B\left\{1 - \frac{e}{\sqrt{R^2 + e^2}}\right\},$$

wenn B den constanten Wert $V_1 + V_2$ auf der Kreisfläche II bedeutet und die Entfernung der beiden Kreisflächen, d. i. die Dicke des isolierenden dielektrischen Mediums e genannt wird. Näherungsweise hat man:

$$v_e' = 2\pi\varkappa B\left(1 - \frac{e}{R}\right) \ldots (7).$$

Nun ist noch jener Theil des Oberflächenintegrales v_e'' zu bestimmen, der sich auf die Cylinderfläche bezieht, welche die beiden Kreisperipherien verbindet. Betrachten wir einen Punkt auf dieser Fläche, der von der ersten Kreisfläche einen Abstand z besitzt, und zeichnen in diesem Punkte eine einwärts (in das dielektrische Medium) gehende Normale von der Länge n; der Endpunkt dieser Normale hat von dem ganz nahe der ersten Kreisbelegung angenommenen Punkte die Entfernung r, bestimmt durch:

$$r = \sqrt{(R - n)^2 + z^2}$$

und deshalb:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = (R - n)\left\{(R - n)^2 + z^2\right\}^{-\frac{3}{2}}.$$

Bezieht man diesen Differentialquotienten wieder auf die Oberfläche der cylindrischen Fläche, so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = R\left(R^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \ldots (8).$$

Während auf jeder der beiden Kreisflächen $V_1 + V_2$ einen constanten Wert hat, wird dies auf der Cylinderfläche nicht mehr der Fall sein. Immerhin kann man bei kleinem Werte von e annehmen, dass der Wert dieser Potentialsumme beim Fortschreiten in einer die beiden Kreisperipherien verbindenden Seite des Cylinders sich gleichmäßig ändert und dass man demnach für den Punkt, der sich in der Entfernung z von der Kreisfläche I befindet, hat:

$$V_1 + V_2 = A + \frac{B - A}{e} z \ldots (9).$$

Mit Berücksichtigung der eben entwickelten Formeln erhält man nun:

$$v_e'' = 2\pi\varkappa R \int_0^e \left(A + \frac{B - A}{e} z \right) \frac{R dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und demnach:

$$v_e'' = \frac{2\pi\varkappa R}{\sqrt{R^2 + e^2}} \left\{ A \frac{e}{R} + (B - A) \frac{\sqrt{R^2 + e^2} - R}{e} \right\}.$$

Berücksichtigt man die Kleinheit des Bruches $\frac{e}{R}$ und vernachlässigt höhere Potenzen desselben, so ergibt sich:

$$v_e'' = \pi\varkappa (A + B) \frac{e}{R} \ldots (10).$$

Es ist nun

$$V_e = v_e + v'_e + v''_e$$

und durch Substituierung der entsprechenden Werte in diese Formel:

$$V_e = - 2\pi\varkappa A + 2\pi\varkappa B \left(1 - \frac{e}{R} \right) + \pi\varkappa (A + B) \frac{e}{R} =$$

$$= 2\pi\varkappa (B - A) \left(1 - \frac{e}{2R} \right) \ldots (11).$$

Wir haben die Potentialfunctionen V_1 und V_2 nur in den Mittelpunkten der beiden Belegungen zu betrachten und wollen speciell jene Werte, welche die Potentiale in der Mitte der

Belegung I haben, mit V_1' und V_2', jene, welche die Potentiale in der Mitte der Belegung II haben, mit V_1'' und V_2'' bezeichnen.

Es ist nun:

$$A = V_1' + V_2', B = V_1'' + V_2'' \ldots (12),$$

und, weil der Punkt P in der Mitte der ersten Belegung liegen soll, ist ferner:

$$V_e = V_2' \ldots (13).$$

Es geht nun die oben für V_e aufgestellte Gleichung über in:

$$V_2' = 2\pi\varkappa\,(V_1'' + V_2'' - V_1' - V_2')\left(1 - \frac{e}{2R}\right) \ldots (14).$$

In ähnlicher Weise wird man für einen Punkt, der im Mittelpunkte der zweiten Belegung sich befindet, erhalten:

$$V_2'' = 2\pi\varkappa\,(V_1' + V_2' - V_1'' - V_2'')\left(1 - \frac{e}{2R}\right) \ldots (15),$$

und durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen:

$$V_2' - V_2'' = -4\pi\varkappa\,(V_1' + V_2' - V_1'' - V_2'')\left(1 - \frac{e}{2R}\right) ..(16).$$

Mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung wird weiter, wenn man wie früher

$$1 + 4\pi\varkappa = \mu$$

das specifische Inductionsvermögen der Substanz setzt:

$$V_2' - V_2'' = \frac{1-\mu}{\mu}\left\{1 - \frac{1}{2\mu}\frac{e}{R}\right\}(V_1' - V_1''). \quad (17).$$

Die Differenz $V_1' - V_1''$ besitzt bei einer geladenen Franklinschen Tafel einen Wert, welcher sich um etwas von jenem unterscheidet, den man erhalten würde, wenn die beiden Belegungen ebenso große Elektricitätsmengen, das Glas aber nur als Isolator und nicht als polarisiertes Medium wirken würde. Doch ist diese Differenz sehr gering und von der Größenordnung des Bruches $\frac{e}{R}$.

Wenn wir uns mit einer Näherungsformel begnügen und $\frac{e}{R}$ vernachlässigen, also auch den Wert der Differenz $V_1' - V_1''$ jenem gleichsetzen, welchen man bei denselben Ladungen der

Belegungen ohne die Polarität des Glases erhalten würde, so vereinfacht sich die obige Gleichung und wird:

$$V_2' - V_2'' = \frac{1-\mu}{\mu}(V_1' - V_1'') \ldots (18).$$

Die gesammte Potentialdifferenz auf den beiden Belegungen wird:

$$(V_1' + V_2') - (V_1'' + V_2'') = (V_1' - V_1'') + (V_1' - V_1'')\frac{1-\mu}{\mu} =$$

$$= \frac{1}{\mu}(V_1' - V_1'') \ldots (19),$$

welche Gleichung uns das schon mehrfach bemerkte Resultat angibt, dass die Capacität einer solchen Franklin'schen Tafel mit einem Dielektricum als Zwischensubstanz μ-mal größer ist, als wenn Luft zwischen den Belegungen wäre oder die Zwischensubstanz keine elektrische Polarisation erführe.

Bemerkt man noch, dass bei dem Genauigkeitsgrade, den wir voraussetzten, die auf den beiden Belegungen befindlichen Elektricitätsmengen dem absoluten Werte gleich, aber vom entgegengesetzten Zeichen sind und nennt Q die Ladung auf der einen Belegung, so ist nach der früher entwickelten Theorie der Condensatoren:

$$Q = \frac{s}{4\pi e}(V_1' - V_1'')$$

und es gelten deshalb auch die Gleichungen:

$$V_2' - V_2'' = \frac{4\pi e}{s}\frac{1-\mu}{\mu} Q \ldots (20)$$

und die gesammte Potentialdifferenz auf den beiden Belegungen ist:

$$\frac{4\pi e}{s} \cdot \frac{1}{\mu} Q \ldots (21);$$

s bedeutet in diesen Ausdrücken den Flächeninhalt einer Belegung.

Die Näherungsgleichungen, welche hier für Franklin'sche Tafeln mit kreisförmigen Belegungen aufgestellt wurden, sind

auch für Franklin'sche Tafeln mit beliebig gestalteten Belegungen und für Leydnerflaschen giltig. Es sind nämlich in den früheren Rechnungen die von der Gestalt der Belegungen abhängigen Glieder von der Ordnung $\frac{e}{\sqrt{S}}$, wenn S der Flächeninhalt der Belegungen ist. Die Glieder, die von der Krümmung der Fläche abhängen, sind bei nicht starken Krümmungen auch nur von der Ordnung $\frac{e}{\sqrt{S}}$. Vernachlässigt man $\frac{e}{\sqrt{S}}$, wie wir oben bei der Deduction der Näherungsgleichungen gethan haben, so erhält man Gleichungen, welche von der Gestalt und den Krümmungen der Belegungen unabhängig sind.

358. Ableitung der vollständigen Gleichungen für die beiden Belegungen einer Leydnerflasche bei Rücksichtnahme auf die elektrische Polarisation des isolierenden Mediums. Bezeichnen wir, wie es im §. 205 bereits geschehen ist, das gesammte Potentialniveau der inneren Belegung einer Leydnerflasche F, jenes der äußeren Belegung G, die Elektricitätsmengen auf diesen beiden Belegungen M und N, so gelten, im Falle wir die elektrische Polarisation des zwischen den Belegungen liegenden isolierenden Körpers in Betracht ziehen, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} M &= a(F - G) + \alpha F \\ N &= a(G - F) + \beta G \\ F &= V_1' + V_2' \\ G &= V_1'' + V_2'' \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

Wir hatten in dem erwähnten §. die Voraussetzung gemacht, dass in der Nähe der beiden Belegungen sich noch andere Leiter befinden können, die entweder zur Erde abgeleitet sind oder — wenn sie isoliert sind — keine Elektricität mitgetheilt erhalten. Das letztere ist für die im Innern des Dielektricums nach der Poisson'schen Hypothese befindlichen leitenden Körpertheilchen der Fall.

Man wird leicht durch Vergleichung der früher (ohne Rücksichtnahme auf die dielektrische Polarisation) und der im §. 357

abgeleiteten Gleichungen ersehen, dass überall, wo im ersten Falle $\frac{s}{4\pi e}$ stand, jetzt

$$\frac{s}{4\pi e}(1+4\pi\varkappa)=\frac{s}{4\pi e}\mu$$

gesetzt werden muss. Nach dieser Bemerkung gestalten sich die im §. 207 abgeleiteten Gleichungen in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{s(1+\delta)}{4\pi e}\mu(F-G)+\alpha F \\ N &= \frac{s(1+\delta)}{4\pi e}\mu(G-F)+\beta G \end{aligned}\right\}\ldots(2),$$

wo δ eine nicht für alle Flaschen gleiche Größe ist, die gegen die Einheit klein ist. α und β stellen auch hier die Elektricitätsmengen dar, welche man den beiden Belegungen ertheilen muss, um sie auf den gemeinschaftlichen Potentialwert 1 zu laden.

Setzen wir nun abkürzungshalber:

$$\frac{4\pi e}{(1+\delta)\mu}=k\ldots(3),$$

so ergeben sich für die Elektricitätsmengen auf den beiden Belegungen der Leydnerflasche genau dieselben Formeln, die in §. 207 (I. Abtheilung) abgeleitet wurden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{s}{k}(F-G)+\alpha F \\ N &= \frac{s}{k}(G-F)+\beta G \end{aligned}\right\}\ldots(4).$$

Es hat in diesen Gleichungen nur k einen anderen Wert, der, da μ für die in Anwendung stehenden dielektrischen Zwischensubstanzen größer als 1 ist, in dem jetzt betrachteten Falle kleiner ausfällt.

359. Entladung der Leydnerflaschen. Rückstandsfunken. Wenn wir die beiden Belegungen der Leydnerflasche in Verbindung setzen, so wird eine Bewegung der entgegengesetzten auf den Belegungen befindlichen Elektricitäten eintreten, bis der Potentialwert auf denselben von gleicher Größe sein

wird, kurz es wird eine Entladung zustande kommen. Dauert die Verbindung der Belegung eine so kurze Zeit, dass während derselben die Polarisation des Dielektricums als nicht geändert angesehen werden kann, so wird auf den beiden Belegungen nach der Entladung noch freie Elektricität zurückbleiben. Bezeichnet man die Potentialwerte der freien Elektricität auf den beiden Belegungen mit v_1' und v_1'', so hat man jedenfalls

$$v_1' + V_2' = v_1'' + V_2'',$$

wenn V_2' und V_2'' die oben angegebene Bedeutung besitzen; es ist nun:

$$v_1' - v_1'' = -(V_2' - V_2'')\ldots(1).$$

Es war nun

$$V_2' - V_2'' = \frac{4\pi e}{s} \frac{1-\mu}{\mu} Q$$

und deshalb ist:

$$v_1' - v_1'' = \frac{4\pi e}{s} \frac{\mu - 1}{\mu} Q\ldots(2).$$

Sind Q_1 und Q_1' jene Elektricitätsmengen, welche auf den beiden Belegungen zurückgeblieben sind, so wird man haben:

$$Q_1' = -Q_1 = \frac{v_1' - v_1''}{4\pi e} s = \frac{\mu - 1}{\mu} Q\ldots(3).$$

Nun unterdrücken wir die gegenseitige Verbindung der beiden Belegungen und überlassen die Leydnerflasche eine genügend lange Zeit sich selbst, so dass der Polarisationszustand, welcher den jetzt auf den beiden Belegungen angesammelten freien Elektricitäten entspricht, sich herstellen kann. Bezeichnet man mit v_2' und v_2'' die Werte des Potentiales des Dielektricums auf den beiden Belegungen, so haben wir nach einer früheren Formel:

$$v_2' - v_2'' = \frac{4\pi e}{s} \frac{1-\mu}{\mu} Q_1 = -\frac{1-\mu}{\mu}(v_1' - v_1'').$$

Wird eine neue Entladung eingeleitet, so bleiben auf den beiden Belegungen die freien Elektricitäten Q_2 und Q_2' zurück und dieselben werden durch die Gleichungen

$$Q_2' = -Q_2 = -\frac{\mu - 1}{\mu} Q_1 = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^2 Q \ldots (4)$$

bestimmt und so weiter. Es ist ersichtlich, dass die Elektricitätsmengen, welche auf den Condensatoren nach den auf einander folgenden Entladungen zurückbleiben, eine geometrische Progression bilden, deren Exponent durch den Ausdruck:

$$\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{4\pi\varkappa}{1 + 4\pi\varkappa} \ldots (5)$$

dargestellt ist.

Wir wollen im Nachstehenden noch das Gesetz bestimmen, nach welchem die Energie des Condensators infolge der einzelnen Entladungen abnimmt. Das Potential W des ganzen Systemes wird gleich sein der Hälfte des Integrales der Potentialfunction $V_1 + V_2$ auf die freien Elektricitäten bezogen mehr dem Potentiale der isolierenden dielektrischen Zwischenschichte. Wir gehen zunächst an die Bestimmung des letzteren.

Dasselbe kann [1] in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$P = \frac{1}{2}\int\Big[- A\frac{\partial}{\partial x}(V_1 + V_2) - B\frac{\partial}{\partial y}(V_1 + V_2) - \\ - C\frac{\partial}{\partial z}(V_1 + V_2) - \frac{1}{\varkappa}(A^2 + B^2 + C^2)\Big] dS \ldots (6),$$

wobei die Integration über die Oberfläche des Dielektricums ausgedehnt werden muss. Bedenkt man, dass

$$\left.\begin{aligned} A &= -\varkappa\frac{\partial}{\partial x}(V_1 + V_2) \\ B &= -\varkappa\frac{\partial}{\partial y}(V_1 + V_2) \\ C &= -\varkappa\frac{\partial}{\partial z}(V_1 + V_2) \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

ist, so erhält man

$$P = o \ldots (8)$$

und es bleibt für die potentielle Energie der Leydnerflasche übrig:

(1) Man sehe: Enrico Betti, teorica delle forze Newtoniane e sue applicazioni all' Elettrostatica e al Magnetismo. Pisa, 1879; p. 353.

$$W = \frac{1}{2}\int (V_1' + V_2')\,\rho_1\, d\sigma_1 + \frac{1}{2}\int (V_1'' + V_2'')\,\rho_2\, d\sigma_2 \ldots (9),$$

wenn ρ_1 und ρ_2 die elektrischen Dichten in den Elementen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ der beiden Belegungen bedeuten. Nun ist

$$V_1' + V_2' = F,\ V_1'' + V_2'' = G$$

und es wird, wenn man noch die Elektricitätsmengen auf den beiden Belegungen der Leydnerflasche mit Q und $-Q$ bezeichnet,

$$W = \frac{Q}{2}(F - G) \ldots (10).$$

Da ferner annähernd die Potentialdifferenz auf den beiden Belegungen durch die Formel

$$F - G = \frac{4\pi e}{s\mu} Q$$

ausgedrückt wird, so erhält man schließlich:

$$W = \frac{Q}{2} \cdot \frac{4\pi e}{s\mu} Q = \frac{2\pi e}{s\mu} Q^2 \ldots (11).$$

Die potentielle Energie der Leydnerflasche nach der ersten Entladung ist:

$$W_1 = \frac{2\pi e}{s\mu} Q_1^2 = \frac{2\pi e}{s\mu}\frac{(\mu - 1)^2}{\mu^2} Q^2 \ldots (12).$$

Die zur ersten Entladung verbrauchte Energie ist nun:

$$W - W_1 = \frac{2\pi e}{s\mu} Q^2 \left[1 - \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^2}\right] \ldots (13).$$

Die potentielle Energie nach der zweiten Entladung wird sein:

$$W_2 = \frac{2\pi e}{s\mu} Q_2^2 = \frac{2\pi e}{s\mu}\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^4 Q^2 \ldots (14).$$

Zur zweiten Entladung wird die Energie

$$W_1 - W_2 = \frac{2\pi e}{s\mu}\frac{(\mu - 1)^2}{\mu^2} Q^2 \left[1 - \frac{(\mu - 1)^2}{\mu^2}\right] \ldots (15)$$

verbraucht. Hieraus ersieht man, dass die zu den aufeinander folgenden Entladungen verbrauchten Energien eine abneh-

mende geometrische Progression bilden, deren Exponent

$$\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{4\pi\varkappa}{1 + 4\pi\varkappa}\right)^2 \ldots (16)$$

ist. Es stimmt dieses theoretische Ergebnis mit der experimentellen Thatsache überein, dass die sogenannten Rückstandsfunken immer schwächer werden.

Wir hatten bei den vorhergehenden Entwicklungen die Voraussetzung gemacht, dass die Gleichung

$$v_1' - v_1'' = -(V_2' - V_2'')$$

giltig ist, dass also während der leitenden Verbindung der beiden Belegungen die Polarisation des Dielektricums sich nicht ändert; dies wird in aller Strenge nicht richtig sein; es wird vielmehr an Stelle der obigen Gleichung folgende treten müssen:

$$v_1' - v_1'' = -p\,(V_2' - V_2'') \ldots (17),$$

wo p einen von der Natur der die Batterie bildenden Flaschen abhängigen Coefficienten bedeutet, dessen Wert zwischen 0 und 1 liegen wird. Unter dieser Voraussetzung werden die für die einzelnen Entladungen geltenden Formeln eine Modification erleiden(¹).

Es erklären sich die Phänomene des Rückstandes wohl in der Weise, dass der polare Zustand des isolierenden Zwischenmediums sich nicht im Momente der Entladung völlig verliert, ein Theil dieser Polarisation besteht nach der Entladung noch fort und bewirkt, dass ein gewisses Quantum Elektricität auf den Belegungen des Condensators noch zurückgehalten wird. Wenn nach der Entladung noch einige Zeit verfließt, so wird die Polarität geringer und diese letztere reicht nicht mehr hin, um die Elektricitätsmengen auf den Belegungen festzuhalten, wenn zwischen denselben eine neue Verbindung hergestellt wird; es tritt deshalb ein neuer Elektricitätsausgleich ein u. s. w. Ebenso ist die Capacität eines Condensators, in welchem das Dielektricum ein fester Körper ist, eine Func-

(¹) Man sehe diesbezüglich: Clausius, l. c. p. 109, 110.

tion der Zeit; ladet man nämlich einen solchen Condensator, so nimmt die Capacität zuerst zu und scheint dann gegen eine Grenze zu convergieren, je mehr man die Ladungsdauer vergrößert. Wir werden gegen Ende des ersten Bandes noch ausführlicher auf diesen Umstand zurückkommen.

Es wurde von Boltzmann (1) die allmählige Veränderung des polaren elektrischen Zustandes des Dielektricums mit der elastischen Nachwirkung verglichen. Maxwell (2) vergleicht diese Erscheinungen, welche Dielektrica darbieten, ebenfalls mit dem Verhalten vieler Drähte, die, wenn sie einige Augenblicke tordiert und dann frei gelassen werden, sich wieder zurückdrehen, aber um einen kleineren Winkel, als jener war, um welchen die ursprüngliche Torsion erfolgte. Im Laufe der Zeit erfolgt die Zurückdrehung weiter, aber sehr langsam und die Drähte kehren erst nach langer Zeit in den normalen Zustand zurück. — Eingehend wurde auch die Rückstandsbildung und deren Analogie mit den Phänomenen, welche unvollkommen elastische Körper zeigen, von Hopkinson (3) studiert.

360. Leitung der Elektricität in Dielektrica. In den dielektrischen Körpern tritt die Leitung der Elektricität nicht in dem Maße wie in guten Leitern ein, doch sind sie niemals aller Leitungsfähigkeit bar. Wir haben früher den Satz von der Erhaltung des Inductionsflusses auf ein Volumenelement des Dielektricums in Anwendung gebracht und sind zu folgender Gleichung gelangt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\rho=o\ldots(1),$$

wenn in dem betrachteten Volumelemente das Potential V und die elektrische Dichte ρ herrscht; μ bedeutet das specifische Inductionsvermögen. Ist dasselbe von x, y, z unabhängig, so hat man

$$\mu\Delta V+4\pi\rho=o.$$

(1) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 68, 1873.

(2) Maxwell. Die Elektricität in elementarer Behandlung; herausgegeben von William Garnett; übersetzt von Dr. L. Graetz (Braunschweig 1883).

(3) Hopkinson, Phil. Trans. 167, 1876.

Nehmen wir das Volumelement in dem betrachteten Punkte M parallelipipedisch an, so ist die in der Zeit dt durch die in M zur Ebene $y\,z$ parallel gezeichnete Seitenfläche dieses Volumelementes eintretende Elektricitätsmenge jedenfalls dem Querschnitte $dy\ dz$ und der X-Componente der Kraft proportional; man kann also setzen:

$$Q = -\,c\,dy\,dz\,\frac{\partial V}{\partial x}\,dt;$$

die aus dem gegenüberliegenden ebenso großen Flächenelemente in derselben Zeit austretende Elektricitätsmenge ist gegeben durch:

$$Q' = -\,c\,dy\,dz\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\right)dt.$$

Der Überschuss der eintretenden über die austretende Elektricitätsmenge ist demnach:

$$Q - Q' = c\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv\,dt\ldots(2),$$

unter dv das betrachtete Volumenelement verstanden. Der in diesen Gleichungen auftretende Proportionalitätsfactor c, welcher die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit bei der elektrischen oder elektromotorischen Kraft gleich der Einheit strömende Elektricitätsmenge bedeutet, führt den Namen „Coefficient der elektrischen Leitungsfähigkeit.“ Es ist leicht einzusehen, dass der gesammte Überschuss der in das Element eintretenden über die austretenden Elektricitätsmengen durch den Ausdruck

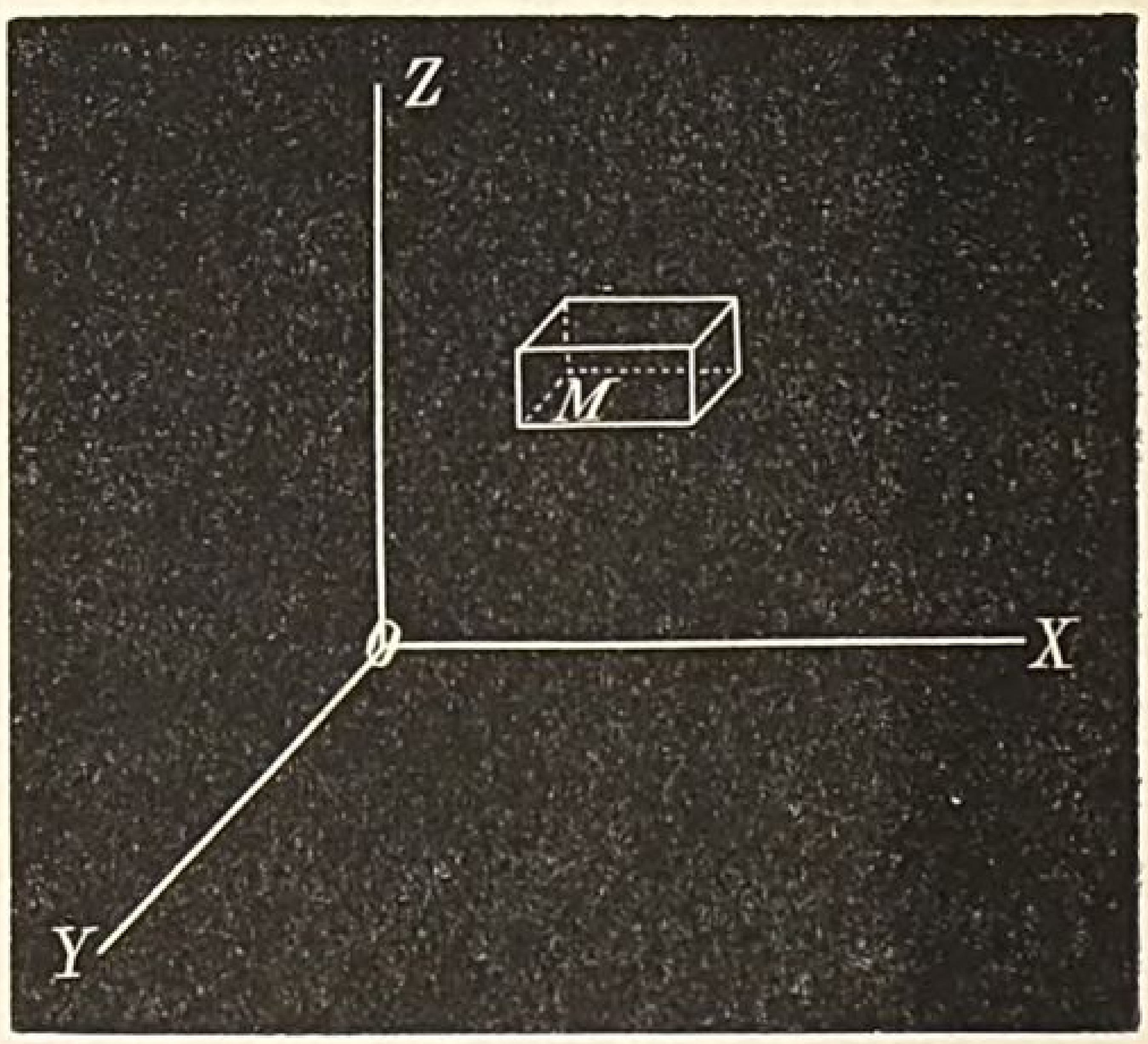


Fig. 144.

$$c\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dv\, dt = c\,\Delta V\, dv\, dt \ldots (3)$$

dargestellt wird. Andererseits kann die im Elemente jetzt vorhandene Elektricitätsmenge auch ausgedrückt werden durch:

$$dv . d\rho \ldots (4),$$

wenn $d\rho$ den Zuwachs der elektrischen Dichte in der Zeit dt bedeutet. Man hat deshalb:

$$c\,\Delta V . dv . dt = dv . d\rho$$

oder

$$c\,\Delta V = \frac{d\rho}{dt};$$

Aus der ersten Gleichung

$$\mu\,\Delta V + 4\,\pi\,\rho = o$$

erhält man:

$$\Delta V = -4\,\pi\,\frac{\rho}{\mu};$$

aus der jetzt abgeleiteten:

$$\Delta V = \frac{1}{c}\frac{d\rho}{dt}$$

und somit als Differentialgleichung zur Bestimmung der Dichte:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{4\pi c}{\mu}\,\rho \ldots (4).$$

Nennt man

$$\frac{\mu}{4\pi c} = \lambda \ldots (5),$$

so ist:

$$\rho = A e^{-\frac{t}{\lambda}} \ldots (6).$$

Es nimmt also die Dichte ρ in continuierlicher Weise ab; hat das Dielektricum durch irgend welche Umstände eine innere Ladung erhalten, so wird es dieselbe nicht unbegrenzt lange behalten; nach einiger Zeit schon wird die Elektricitäts-

menge sich ganz und gar auf der Oberfläche ansammeln, wie es bei einem guten Leiter der Fall ist.

Je größer das Verhältnis $\frac{c}{\mu}$, d. h. das Verhältnis der Leitungsfähigkeit zum specifischen Inductionsvermögen ist, desto rascher nimmt die Dichte der Elektricität in einem innerhalb des Dielektricums gelegenen Punkte ab.

361. Die vorstehenden Rechnungen, welche von Maxwell(¹) und anderen ausgeführt wurden, zeigen, dass die Geschwindigkeit des Verschwindens der in einem Dielektricum befindlichen Elektricität nur von λ, also von dem Verhältnisse $\frac{c}{\mu}$ der Leitungsfähigkeit zum specifischen Inductionsvermögen abhängig ist; von der Intensität der ursprünglichen inneren Elektrisierung ist diese Geschwindigkeit insoferne unabhängig, als c und μ sich nicht mit der Stärke der Elektrisierung ändern. Die successive Verminderung der elektrischen Ladungen, welche sich auf den Belegungen eines Condensators vorfinden, kann man nicht einer Ausgleichung der entgegengesetzten Elektricitäten im Innern des Dielektricums vermöge einer langsamen Leitung zuschreiben, weil die verschwundene Ladung nach der Entladung des Condensators in die Belegungen desselben zurückkehrt. Man kann auch ein allmähliges Eindringen der Elektricität in das Innere des Dielektricums und Heraustreten derselben nach Entladung des Condensators nach den oben geführten mathematischen Entwicklungen nicht annehmen. Dass eine Absorption der Elektricität vom Dielektricum und ein Zurücktreten der ersteren beim Ableiten der Belegungen nicht stattfinden kann, kann durch folgenden Versuch(²) demonstriert werden. Bringt man auf das Dielektricum irgendwie freie Elektricität, hängt dasselbe in eine isolierte allseits zu schließende Metallumhüllung, welche mit einem Elektroskope in leitender Verbindung steht und leitet diese Hülle vorübergehend

(¹) Maxwell, l. c. art. 325, p. 468 (der deutschen Übersetzung); Rowland, Americ. Journ. of Math. 1, p. 53, 1878; man sehe auch Mascart und Joubert, l. c. p. 265.

(²) Wiedemann, die Lehre von der Elektricität, II. Bd. p. 97; Braunschweig, 1883.

ab, so dass das Elektroskop keinen Ausschlag macht, so zeigt sich auch ein solcher nach längerer Zeit nicht; es kann also die freie Elektricität des Dielektricums weder vermehrt noch vermindert worden sein; es kann keine Absorption dieser dem Dielektricum zugeführten Elektricität eingetreten sein. Bei homogenen und isotropen dielektrischen Substanzen kann also unter den Voraussetzungen, die wir bezüglich der Polarisation des Mediums gemacht haben, im Innern des Dielektricums sich keine freie Elektricität ansammeln.

In seiner Theorie der zusammengesetzten Dielektrica, deren Erörterung uns zu weit führen würde, zeigt nun Maxwell(¹), dass ein aus parallelen dielektrischen Schichten gebildetes System oder sogar ein System, das aus verschiedenen dielektrischen Elementen, die in irgendeiner Weise gemengt sind, besteht und in dem somit das oben bezeichnete Verhältnis $\frac{c}{\mu}$ nicht constant bleibt, Anlass zum Eindringen der Elektricität in das zusammengesetzte Dielektricum und somit zu den Rückstandsladungen geben kann, wenn auch jedes der das System zusammensetzenden Dielektrica für sich diese Erscheinung nicht zeigt. Es kann das Verhältnis $\frac{c}{\mu}$ auch dann an den verschiedenen Stellen eines Dielektricums verschieden sein, wenn die influencierende elektrische Kraft an diesen Stellen verschieden ist und c und μ in verschiedener Weise von dieser Kraft abhängen. Für den Umstand, dass der Mangel an Homogenität des Dielektricums die Veranlassung zur Bildung des Rückstandes sein kann, sprechen auch neuerer Zeit von Rowland und Nichols(²) angestellte Versuche an Condensatoren, in welchen als dielektrische Zwischensubstanz senkrecht zur Axe geschnittene Bergkrystallplatten oder Doppelspathplatten angewendet wurden, die sich in optischer Beziehung äußerst homogen erwiesen. Sie fanden im Kalkspath keinerlei elektrische Absorption auftreten.

(¹) Maxwell, l. c. p. 471 u. d. f. (deutsche Übersetzung).
(²) Phil. Mag. 11, 1881.

Doch scheint, wie schon oben bemerkt, das Fehlen der Homogenität keineswegs die alleinige Ursache des elektrischen Rückstandes zu sein, sondern der letztere muss wohl in den meisten Fällen auch einer gewissen elastischen Deformation, die eine Folge der Polarisation des Dielektricums ist, zugeschrieben werden; dafür sprechen die in den ersten Abtheilungen geschilderten Variationen des Rückstandes unter mechanischen Einflüssen. Die Lösung der Frage ist noch nicht zu einem genügenden Abschlusse gelangt.

362. Ladung und Entladung eines Condensators [1]. Die Erscheinungen der elektrischen Absorption und der Rückstandsladung, wie wir sie an Condensatoren mit dielektrischen Zwischensubstanzen beobachten, kann man also nicht als Folgen der Leitungsfähigkeit der Dielektrica betrachten. Wir wollen die Ladung und Entladung eines Condensators näher erörtern.

Bezeichnet man C die Capacität des Condensators, W den Widerstand des Dielektricums, E die Potentialdifferenz der beiden Condensatorbelegungen in einem bestimmten Zeitmomente t, w den Widerstand des Drahtes, welcher die beiden Belegungen verbindet und in welchem eine Elektricitätsquelle, der die elektromotorische Kraft E_0 zukommt und welche die Ladung des Condensators veranlasst, sich befindet. In der Zeit dt nimmt die Ladung des Condensators um $C\,dE$ zu; diese Zunahme ist dem Überschusse der Elektricitätsströmung $\frac{E_0 - E}{w}dt$, welche durch die Elektricitätsquelle hervorgerufen wird über jene Strömung, welche das Dielektricum durchsetzt und gleich $\frac{E}{W}dt$ ist, gleich. Man hat nun:

$$C\frac{dE}{dt} = \frac{E_0 - E}{w} - \frac{E}{W},$$

oder nach Integration dieser Differentialgleichung:

$$E = E_0 \frac{W}{W + w}\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\right),$$

(1) **Maxwell**, l. c. p. 469 (der deutschen Übersetzung); auch **Mascart** und **Joubert**, l. c. p. 266.

wenn man

$$\lambda_1 = C \frac{Ww}{W + w}$$

setzt. Unterbricht man im Momente t_1 den Schließungskreis, welcher die Condensatorbelegungen verbindet, und überlässt man den Condensator eine Zeit t_2 hindurch sich selbst, so hat man die Gleichung

$$o = \frac{E}{W} + C\frac{dE}{dt}$$

zu integrieren. Nennt man die zur Zeit t_1 herrschende Potentialdifferenz der beiden Belegungen E_1, jene, welche am Schlusse der Zeit t_2 herrscht, E_2, so ist

$$E_2 = E_1 e^{-\frac{t_2}{\lambda_2}},$$

wobei $\lambda_2 = CW$ gesetzt wurde.

Nun setzt man die Belegungen des Condensators durch einen Draht von dem geringen Widerstand w_1 in Verbindung und wird die neue Gleichung

$$\frac{E}{w_1} + \frac{E}{W} = - C\frac{dE}{dt}$$

erhalten. Die Potentialdifferenz der beiden Belegungen am Schlusse der Zeit t_3 wird sein

$$E_3 = E_2 e^{-\frac{t_3}{\lambda_3}},$$

wobei

$$\lambda_3 = \frac{CWw_1}{W + w_1}$$

ist. Während dieser Zeit t_3 hat der Condensator die Elektricitätsmenge $C\,(E_2 - E_3)$ verloren; der Theil dieser Menge, welche durch den äußeren Schließungskreis fließt und die Entladung ausmacht, ist $C\,(E_2 - E_3)\frac{W}{W + w_1}$.

Durch Substitution der verschiedenen Werte erhält man:

$$Q = E_0 \frac{CW^2}{(W+w)(W+w_1)}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\lambda_1}}\right) e^{-\frac{t_2}{\lambda_2}}\left(1 - e^{-\frac{t_3}{\lambda_3}}\right).$$

Soll die Entladung vollständig sein, so muss $t_3 = \infty$ werden und dann ist

$$Q = E_0 \frac{CW^2}{(W+w)(W+w_1)}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\lambda_1}}\right) e^{-\frac{t_2}{\lambda_2}}.$$

Meist wird t_1 auch groß gewählt, damit die Ladung eine vollständige sei, dann reduciert sich obige Gleichung auf folgende einfachere Form:

$$Q = E_0 \frac{CW^2}{(W+w)(W+w_1)} e^{-\frac{t_2}{\lambda_2}}.$$

Wir haben bei Entwicklung dieser Formel vorausgesetzt, dass in einem so zuerst geladenen, dann durch einen Draht von schwachem Widerstande entladenen Condensator keine Elektricität zum Vorschein kommt, wenn er wieder isoliert wird.

363. Vorstellungen von Faraday und Maxwell über den Zwangszustand, in welchen ein dielektrisches Medium durch elektrische Kräfte gelangt. Die Wirkung zweier elektrischen Systeme z. B. zweier Leiter aufeinander haben wir bisher in der Weise gerechnet, dass wir die Voraussetzung machten, es setze sich diese Wirkung aus elementaren Kräften, welche je zwei verschiedene Elektricitätsmengen, die den beiden Systemen angehören, direct in die Entfernung aufeinander ausüben, zusammen. Schon Faraday(¹) hat aber die Hypothese gemacht, dass diese Wirkung sich mittelst des zwischenliegenden dielektrischen Mediums zufolge eines gewissen Zwangszustandes oder einer gewissen Spannung in diesem Medium überträgt. Maxwell hat in seinem Werke gelegentlich der Aufstellung der Theorie der mechanischen Kräfte zwischen zwei elektrischen Systemen(²) diesen Zwangszustand in dem dielektrischen Zwischenmedium zur Erklärung der Kraftwirkung elektrischer Systeme aufeinander zu Hilfe

(¹) Experimental Researches, serie XI.

(²) l. c. Art. 103 u. f. (deutsche Übersetzung).

genommen und ist zu Resultaten gelangt, die mit den Faraday-schen Ansichten über den Zustand des zwischen den elektrischen Körpern befindlichen Mediums in vollkommener Übereinstimmung sich befinden.

Den oben erwähnten Zwangszustand in den dielektrischen Medien charakterisiert Faraday in seinen Experimental Researches genau; er nimmt an, dass von der Oberfläche eines mit Elektricität geladenen Conductors die inducierende Wirkung desselben auf einen anderen Leiter längs Curven sich äußere, welche zwischen den beiden Leitern gezogen gedacht werden müssen; diese Wirkung wird von einer seitlichen oder transversalen Kraft begleitet, die eine Abstoßung oder Dilatation der genannten Curven hervorruft. Es ist also nach Faraday die in der Richtung dieser Curven zwischen den Theilchen des dielektrischen Mediums herrschende Anziehung von einer in lateraler Richtung wirkenden und eine Divergenz dieser Linien hervorrufenden Abstoßungskraft begleitet.

Der in dem dielektrischen Medium auftretende Zustand ist ein Zwangszustand und erhält sich so lange, als die Kraft wirkt, und hört dann auf, wenn die Kraft verschwindet.

Maxwell leitet in seiner Theorie der mechanischen Kräfte zwischen zwei elektrischen Systemen den Satz ab, dass das dielektrische Medium in jedem Punkte einen Zug erfährt, dessen Richtung durch die in diesem Punkte zur Kraftlinie gezogene Tangente bestimmt ist und der dem Quadrate der Intensität der elektrischen Kraft proportional ist, außerdem aber noch einen dem Zuge numerisch gleichen Druck erfährt, der senkrecht auf die Richtung des eben genannten Zuges sich äußert.

Es kann also die Maxwell'sche Theorie als eine Übertragung der Faraday'schen Hypothesen in die Sprache der Mathematik betrachtet werden.

Bei der Deduction der obigen Sätze wollen wir der Darstellungsweise folgen, welche von Mascart und Joubert in ihrem vortrefflichen Werke gebraucht wurde und die directer zum Resultate führt, als die Maxwell'schen Rech-

nungen. Früher sollen einige einleitende Betrachtungen im Nachfolgenden ihren Platz finden.

364. Resultierende der elektrischen Drücke, welche auf die Oberfläche eines Leiters ausgeübt werden. Wir haben bereits früher gesehen, dass der auf die Einheit der Oberfläche in einem Punkte eines Leiters ausgeübte Druck durch die Formel

$$P = 2\pi\sigma^2$$

bestimmt wird, in welcher σ die elektrische Dichte im betrachteten Punkte bedeutet; wie auch immer die auf dem Elemente befindliche Elektricität bezeichnet sein möge, immer ist dieser Druck auswärts vom Leiter gegen das umgebende Medium gerichtet. Da die elektrische Kraft F in dem erwähnten Punkte gegeben ist durch:

$$F = 4\pi\sigma,$$

so wird

$$P = \frac{1}{8\pi} F^2$$

und es ist hiermit der Druck durch die Kraftintensität ausgedrückt.

Betrachten wir nun ein Oberflächenelement des Conductors dS, so ist der in demselben wirkende Druck PdS die Resultierende der Wirkungen, welche auf die in diesem Elemente befindliche Elektricitätsmenge σdS durch die Elektricitätsmengen ausgeübt werden, welche außerhalb des Conductors liegen und denselben bedecken. Für alle Elemente der Oberfläche, d. h. für die ganze Oberfläche des Conductors ist die Resultierende aller Drücke daher der Resultierenden der auf den Conductor ausgeübten Wirkungen gleich, welche sowohl von den äußeren Elektricitätsmengen, als auch von der dem Conductor angehörenden Elektricität herrühren. Es ist leicht einzusehen, dass die Wirkungen, welche die verschiedenen Elektricitätsmengen des Conductors aufeinander ausüben, eine Resultante Null haben, denn wenn das elektrische Gleichgewicht auf dem Conductor eingetreten ist, können diese Elektricitätsmengen auf dem Conductor als fix betrachtet werden und die von den-

selben ausgehenden Elementarkräfte werden sich zwei zu zwei aufheben; man kann deshalb den Satz aufstellen, dass die Resultierende der Drücke gleich der Resultierenden der Wirkungen der äußeren Elektricitätsmengen ist.

365. Einige Theoreme über die Wechselwirkung elektrischer Systeme. Es lässt sich nun jetzt leicht zeigen, dass wenn ein elektrisches System von einer Niveaufläche S_1 eingehüllt ist, die auf dieses System wirkende Kraft die Resultierende der Drücke ist, welche sich in einer Elektricitätsschichte äußern würden, die gleich der gesammten Elektricitätsmenge des Systemes ist und im Gleichgewichtszustande sich auf der Oberfläche S_1 vorfindet.

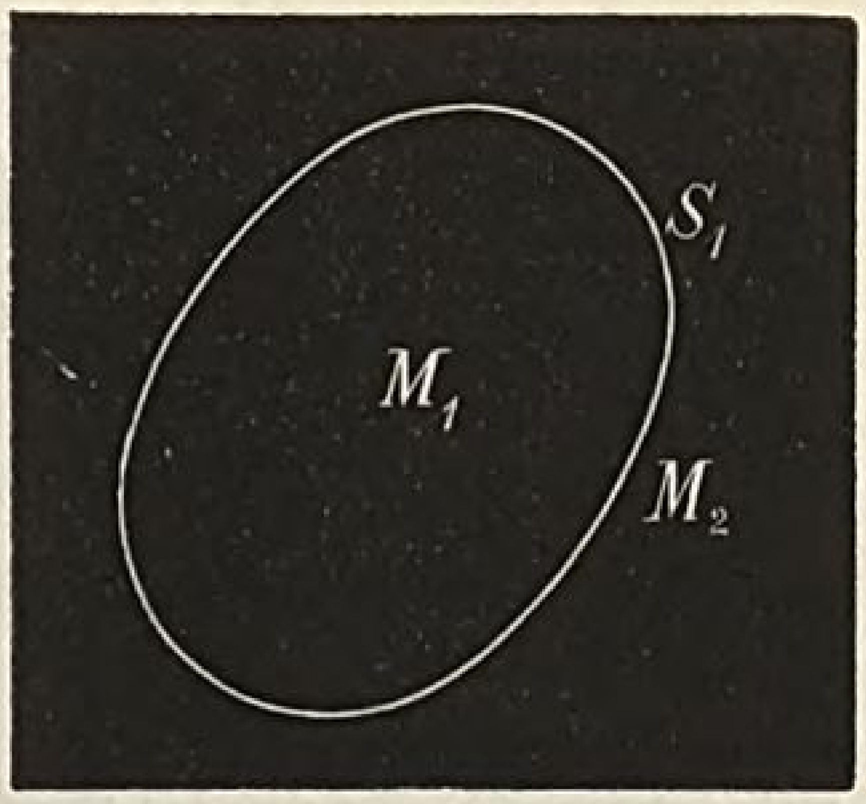


Fig. 145.

Um diesen Satz zu erweisen, nehmen wir an, eine Niveaufläche S_1 theile sämmtliche wirkende Massen in zwei Massensysteme, von denen das eine M_1 innerhalb der Niveaufläche, das andere M_2 außerhalb dieser Fläche liege. Es wurde bereits an einer früheren Stelle gezeigt, dass man die Wirkung der innerhalb S_1 liegenden Elektricitätsmengen auf alle außerhalb S_1 befindlichen Punkte durch eine Elektricitätsschichte von der Menge M_1, die sich im Gleichgewichte auf S_1 befindet, ersetzen kann; auch wurde früher nachgewiesen, dass das äußere Elektricitätsmengen-System M_2 auf diese Elektricitätsschichte M_1, die wir auf der Niveaufläche S_1 befestigt denken, so wirken wird, wie auf die inneren Elektricitätsmengen M_1. Nach dem Satze des vorhergehenden §. ist nun die Wirkung der äußeren Massen auf die Schichte S_1 und demzufolge auf das System M_1 der inneren Elektricitätsmengen nichts anderes als die Resultierende der elektrostatischen Drücke dieser Schichte.

Da nun die Gesammtwirkung des Systemes M_1 auf alle außerhalb liegenden Elektricitätsmengen der Kraft, welcher dieses System unterworfen ist, gleich und vom entgegen-

gesetzten Zeichen ist, so erkennt man, dass die Wirkung des Systemes M_1 auf die äußeren Körper der Resultierenden der auf der Oberfläche S_1 herrschenden elementaren Drücke, von denen ein jeder nach innen gerichtet wird, gleich ist.

Aus diesem Theoreme folgt noch das nachfolgende, von dem wir bei der Erläuterung der Faraday'schen Hypothese Gebrauch machen werden: Die Wechselwirkung zweier elektrischen Systeme M_1 und M_2 ist der Wirkung zweier Elektricitätsschichten $+M_1$ und $-M_1$ gleich, die sich auf zwei Niveauflächen S_1 und S_2 befinden, welche das Elektricitätsmengen-System M_1 einschließen und M_2 ganz außerhalb lassen.

Wenn wir auf die Niveaufläche S_1 eine Schichte $+M_1$ bringen, die sich auf derselben im Gleichgewichte befindet, so wird nach früheren Bemerkungen diese Schichte das innere System $+M_1$ für alle außerhalb S_1 liegenden elektrischen Massenpunkte ersetzen. Bringen wir ferner eine Elektricitätsschichte $-M_1$ auf S_2, auf welcher Fläche sich diese Schichte im Gleichgewichte befinden soll, so kommt — wie wir früher gesehen haben — die Elektricitätsschichte S_2 dem äußeren Systeme M_2 für alle jene Punkte gleich, die innerhalb der Fläche S_2 liegen.

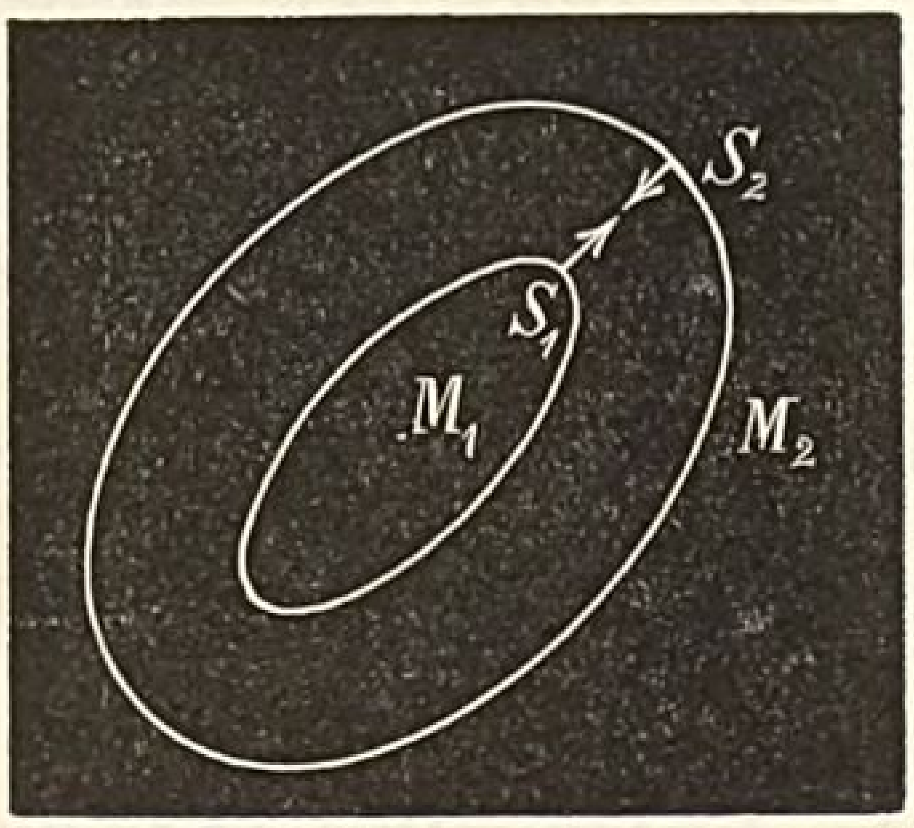


Fig. 146.

Die beiden auf S_1 und S_2 ausgebreiteten Elektricitätsschichten liefern innerhalb S_1 ein constantes Potential V_1 und außerhalb S_2 ebenfalls ein constantes Potential V_2; innerhalb des von den Flächen S_1 und S_2 gebildeten Raumes variiert das Potential innerhalb der Grenzen V_1 und V_2; daraus folgt, dass die elektrische Kraft mit Ausnahme des eben bezeichneten Raumes überall Null ist. In diesem zwischen S_1 und S_2 liegenden Raume behält die Kraft denselben Wert, ob man die beiden ursprünglichen Elektricitätsmengen-Systeme M_1 und M_2, oder die diesen äquivalenten auf S_1 und S_2 befindlichen Elektricitätsschichten in Rechnung zieht.

Die elektrisierte Fläche S_1 wirkt daher auf die Schichte S_2 ebenso wie auf das System M_2; die elektrisierte Fläche S_2 wirkt ferner auf S_1 sowie auf M_1; es sind daher die Wechselwirkungen der elektrisierten Oberflächen S_1 und S_2 genau dieselben, wie jene der beiden ursprünglich in Betrachtung gezogenen Systeme M_1 und M_2. Nach dem Theoreme des §. 364 sind aber die von den elektrisierten Oberflächen S_1 und S_2 erfahrenen Wirkungen nichts anderes, als die Resultierenden der elektrischen Drücke $P_1 dS_1$ und $P_2 dS_2$, welche sich auf die Elemente dieser Oberflächen äußern. Nennt man die Kräfte in dem Medium in der Nähe der betrachteten Elemente F_1 und F_2, so ist nach dem früheren

$$P_1\, dS_1 = \frac{1}{8\pi} F_1^2\, dS_1,$$

$$P_2\, dS_2 = \frac{1}{8\pi} F_2^2\, dS_2$$

und diese beiden Formeln bestimmen die Drücke, von denen der erste von der Fläche S_1 auswärts, der zweite von der Fläche S_2 ebenfalls auswärts, also entgegengesetzt dem ersten gerichtet ist. Es ist begreiflich und folgt aus dem Principe der gleichen Action und Reaction, dass die Resultierenden dieser beiden normalen Kraftsysteme gleich und vom entgegengesetzten Zeichen sind.

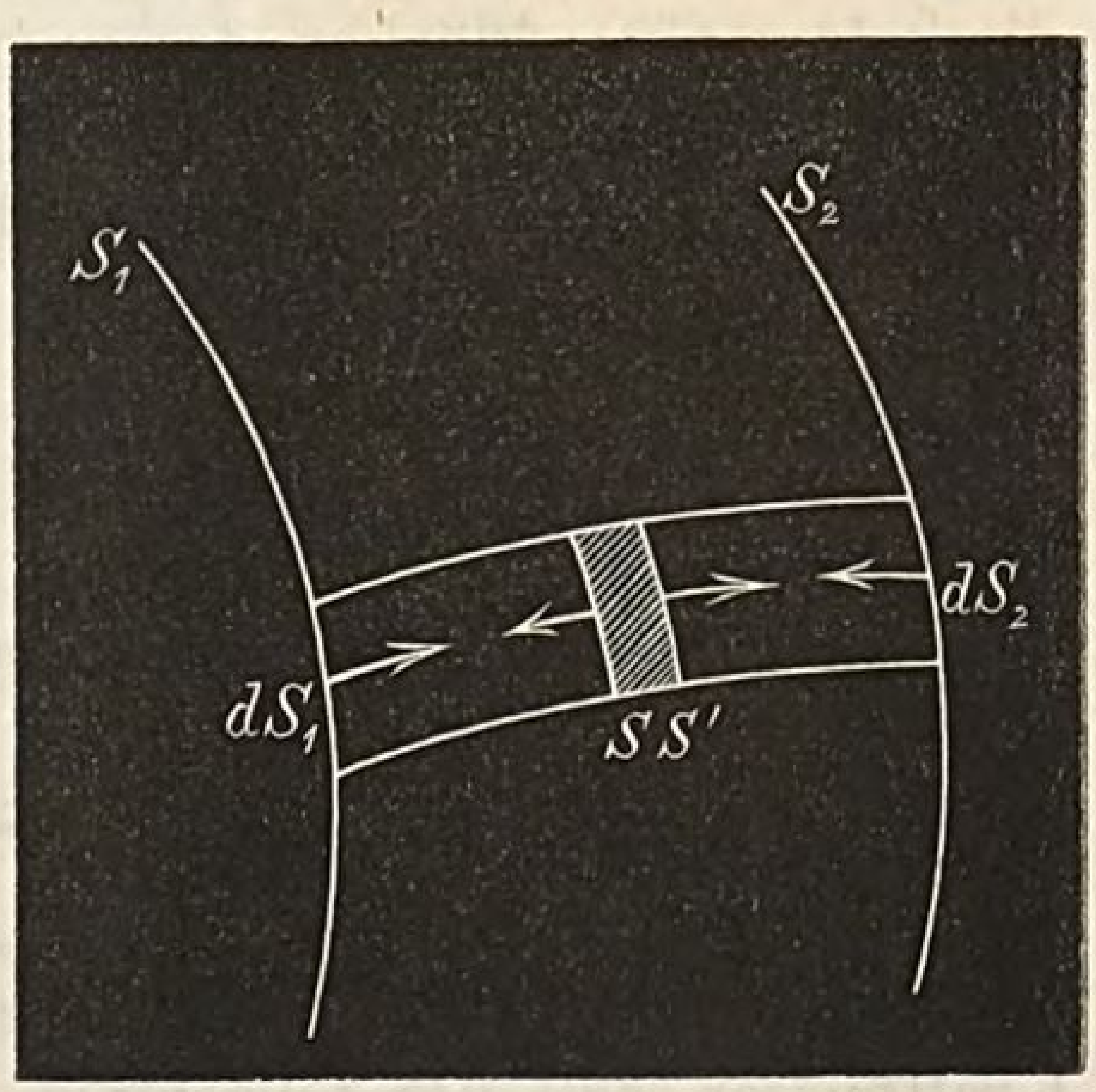


Fig. 147.

366. Wir können nun mittelst der vorhergehenden Betrachtungen die Hypothese weiter erläutern, nach welcher zwei elektrische Systeme keine directe Wirkung aufeinander ausüben, sondern diese Wirkung *vermöge eines in dem Zwischenmedium continuierlich vertheilten Zwangszustandes erfolgt*. Zwischen den beiden Oberflächen S_1 und S_2 zeichnen wir uns einen orthogonalen Canal,

welcher aus der ersten Oberfläche das Element dS_1, aus der zweiten das Element dS_2 ausschneidet.

Der von dS_1 ausgehende Kraftfluss $F_1 dS_1$ setzt sich in dieser orthogonalen Röhre fort, behält einen constanten Wert und wird im Elemente dS_2 absorbiert. Es sind die beiden Elemente dS_1 und dS_2 genau in demselben Zustande, als ob sie durch elastische Schnüre verbunden wären, die parallel zu den Kraftlinien gespannt sind und die beiden Elemente gegeneinander mit einer Kraft P_1 (auf die Einheit der Fläche bezogen), die auf dS_1 wirkt, und einer zweiten auf dS_2 wirkenden Kraft P_2 ziehen.

Zeichnen wir uns nun in dem orthogonalen Canale zwei unendlich nahe liegende Niveauflächen S und S'; der Canal schneide aus denselben die Flächenelemente dS und dS' heraus; auf diese Weise wird ein kleines Volumenelement dv gebildet, das einen unendlich kleinen Cylinder mit der Höhe dn darstellt. Wir nehmen dieses Raumelement fest an. Die elektrische Kraft im Elemente dS sei F, jene im unendlich benachbarten Elemente dS' sei F'. Zunächst betrachten wir die Wirkungen auf die beiden Grundflächen des unendlich kleinen Cylinders; dieselben werden in den in der Figur angedeuteten Richtungen Spannungen erfahren, welche nach den früheren Entwicklungen durch die Formeln

$$\frac{1}{8\pi} F^2 dS \text{ und } \frac{1}{8\pi} F'^2 dS'$$

dargestellt werden. Die Resultierende dieser Spannungen ist:

$$dR = \frac{1}{8\pi} (F'^2 dS' - F^2 dS)$$

oder mit Beachtung des Theoremes von der Erhaltung des Kraftflusses, also der Gleichung

$$F dS = F' dS'$$

erhält man:

$$dR = \frac{1}{8\pi} F dS (F' - F).$$

Nun ist

$$F' = F + \frac{dF}{dn} dn$$

und, wenn man beachtet, dass

$$dv = dS . dn$$

ist, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$dR = \frac{1}{2} \frac{dP}{dn} dv,$$

wenn

$$P = \frac{1}{8\pi} F^2$$

den elektrostatischen Druck (auf die Flächeneinheit bezogen) in dem Elemente dS bedeutet.

Nennt man die auf die Volumseinheit des Dielektricums in einem Punkte desselben bezogene Wirkung R, so ist:

$$R = \frac{1}{2} \frac{dP}{dn} = -\frac{d}{dn} \left(-\frac{1}{2} P \right).$$

Man gelangt hiermit zu dem wichtigen Ergebnisse, dass die Wirkung der beiden Flächen S_1 und S_2 dieselbe ist, als ob auf das Dielektricum selbst Kräfte wirken würden, deren Potential in jedem Punkte durch $-\frac{P}{2}$ bestimmt ist; das Element dv zeigt daher das Bestreben, sich nach einer Richtung zu bewegen, in welcher der Wert der Function P im Zunehmen ist. Soll das Volumenelement im Gleichgewichte sein, so müssen deshalb noch andere Kräfte auf dasselbe einwirken. Die Bestimmung derselben ist unsere nächste Aufgabe.

Wir müssen annehmen, dass in jedem Punkte des Dielektricums ein Druck Q herrsche, welcher der eben dargestellten Spannung widerstrebt. Der auf das Oberflächenelement dS ausgeübte Druck ist QdS; der auf das Element dS' wirkende Druck wird in ähnlicher Weise dargestellt durch

$$\left(Q + \frac{dQ}{dn} dn \right) dS;$$

die Resultierende dieser beiden Drücke ist nun:

$$\frac{dQ}{dn}\,dn\,dS = \frac{dQ}{dn}\,dv.$$

Für den Gleichgewichtszustand gilt dann die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\frac{dP}{dn} = \frac{dQ}{dn}$$

und daraus folgt schließlich:

$$P = 2Q.$$

Es besteht somit die Wirkung auf das Raumelement dv aus einem seitlichen Drucke von der Größe $Q = \frac{P}{2}$ und einer Spannung auf die beiden Grundflächen dS und dS', die gleich $P - Q = P - \frac{P}{2}$ oder ebenfalls $\frac{P}{2}$ ist.

Denkt man sich nun die zwischen den Niveauflächen S_1 und S_2 liegende Schichte des Dielektricums durch eine orthogonale Oberfläche in zwei Theile getheilt, so wird sich zwischen denselben eine Repulsion geltend machen, die gleich der Resultierenden der seitlichen Drücke ist.

Fassen wir das in den vorhergehenden Artikeln Gesagte zusammen, so ergibt sich der wichtige Satz: Man kann sich die leitenden Körper durch elastische Fäden verbunden denken, welche längs der Kraftlinien gespannt sind und welche sich gegenseitig abstoßen. Dies ist aber die Hypothese, welche Faraday bezüglich des Thätigkeitszustandes der dielektrischen Medien aufgestellt hat.

367. Einige Bemerkungen über die von Maxwell in seine Theorie eingeführte elektrische Verschiebung. Maxwell, der die Elektricität als ein incompressibles, allen Raum erfüllendes Fluidum betrachtet, stellt sich vor, dass bei der Ladung eines Körpers mit Elektricität die Elektricität des den Körper umgebenden Dielektricums eine Verschiebung oder Verrückung im Sinne der Induction erleidet. Es wird durch diese Verschiebung bewirkt, dass ein Volumelement nicht mehr und nicht weniger Elektricität unter der Einwirkung

der influencierenden Kräfte besitzt, als früher, so lange noch der Körper unelektrisch war. Wenn wir etwa einen Condensator, z. B. eine Leydnerflasche betrachten, deren innere Belegung positive Ladung erhielt, so hat man sich nach den Anschauungen Maxwells vorzustellen, dass die in der Substanz des Glases vor sich gehende elektrische Verschiebung von dieser inneren Belegung gegen die äußere stattfindet. Jede Vergrößerung der Ladung auf der inneren Belegung des Condensators würde eine Verstärkung der elektrischen Verschiebung zur Folge haben, was einem Strome positiver Elektricität von der inneren Belegung gegen die äußere entsprechen würde, umgekehrt wird eine Verminderung der Ladung der inneren Belegung einen Strom veranlassen, der die entgegengesetzte Richtung besitzt und ebensolange wie die Variation der Ladung andauert.

Maxwell misst die elektrische Verschiebung, welche durch eine Oberfläche stattfindet, durch die Elektricitätsmenge, welche die Fläche durchsetzt. Nennen wir dS das Flächenelement der Oberfläche eines Leiters, in welchem die elektrische Dichte σ herrscht, so ist daher die elektrische Verschiebung

$$\sigma dS = \frac{1}{4\pi} F dS,$$

wenn man erwägt, dass die Größen F und σ durch die Formel:

$$F = 4\pi\sigma$$

zusammenhängen. Da nun FdS jene Größe ist, welcher wir früher den Namen Kraftfluss ertheilt haben, so kann man auch sagen: Die elektrische Verschiebung ist dem Kraftflusse dividiert durch 4π gleich.

An der Berührungsfläche eines Dielektricums hat die Elektricitätsmenge den Wert $\frac{\mu F dS}{4\pi}$, wenn μ die obige Bedeutung hat. Es ist also ganz allgemein die elektrische Verschiebung in irgend einem Punkte eines Dielektricums gleich dem Quotienten des Inductionsflusses durch 4π und besitzt eine Richtung, welche mit jener der inducierenden Kraft in Übereinstimmung ist.

Es ist, wie man aus dem obigen Ausdrucke ersieht, im allgemeinen die Verschiebung der elektromotorischen Kraft proportional, wesentlich aber von der Dielektricitätsconstante des betreffenden Mediums abhängig; so wird bei festen und flüssigen Körpern, bei denen μ, wie später gezeigt werden soll, einen bedeutend größeren Wert als bei Gasen hat, die elektrische Verschiebung bei letzteren bedeutender als bei ersteren sein.

Maxwell nimmt nun in seinen theoretischen Erörterungen weiter an, dass die Verschiebung der Elektricität des Mediums eine elastische Gegenkraft hervorruft, welche die verschobenen Elektricitätstheilchen wieder in ihre ursprünglichen Positionen zurückzuführen strebt.

Es wird somit der Verschiebung der Elektricitätstheilchen durch die sogenannte „elektrische Elasticität" des Mediums eine Grenze gesetzt und es tritt dann der Gleichgewichtszustand ein, wenn die elastische Gegenkraft in jedem Punkte gleich der elektrischen Kraft ist. Wenn man als Coefficienten der elektrischen Elasticität das Verhältnis der elektrischen Kraft zur Verschiebung der Elektricitätstheilchen, welche sie hervorruft, betrachtet, wenn man ferner die Annahme macht, dass das Medium vollkommen elastisch ist, so ist offenbar der Coefficient der elektrischen Elasticiät ε durch den Ausdruck

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{\mu}$$

dargestellt.

Die letzte Gleichung lehrt uns, dass die Dielektricitätsconstante oder das specifische Inductionsvermögen umgekehrt proportional dem Coefficienten der elektrischen Elasticität des Mediums ist. Man erkennt auch aus der letzten Gleichung, dass der Elasticitätscoefficient in Leitern Null ist, da die Größe μ in diesen Körpern einen unendlich großen Wert erreicht. Dies heißt aber nichts anderes, als dass in leitenden Körpern der elektrischen Verschiebung kein Widerstand entgegenwirkt.

Unter der Annahme der elektrischen Elasticität erklärt Maxwell die Kräfte, welche elektrisierte Körper aufeinander

ausüben. Wir müssen bezüglich der damit zusammenhängenden Erörterungen und Rechnungen den Leser auf das mehrfach genannte grundlegende Werk dieses Forschers verweisen.

Die elektrische Verschiebung ist es, welche die Polarisation des Mediums und die fictive Ladung der Conductoren bestimmt.

Betrachten wir eine zwischen zwei Leitern sich erstreckende Inductionsröhre. In der letzteren ist durchwegs die elektrische Verschiebung von constantem Werte, es wird jeder Querschnitt der Inductionsröhre, welcher orthogonal zu den Inductionslinien gelegen ist, von derselben Elektricitätsmenge durchflossen. An dem einen Ende der Inductionsröhre findet die Verschiebung der Elektricitäten in der Richtung vom Conductor gegen das Dielektricum statt; man bezeichnet dann das entsprechende Leiterflächenelement als mit positiver Elektricität geladen. Am anderen Ende der Inductionsröhre vollzieht sich die elektrische Verschiebung in der Richtung vom Dielektricum gegen den Leiter; das correspondierende Element des letzteren ist dann mit negativer Elektricität geladen. Innerhalb der betrachteten Inductionsröhre ist, wenn das Dielektricum in derselben von gleicher Beschaffenheit ist, keine Elektricität, welche wahrgenommen werden kann; nichtsdestoweniger ist aber dieses Medium polarisiert. Denkt man sich nämlich einen Theil der Inductionsröhre, welcher zwischen zwei orthogonalen Flächen sich befindet, für sich, so vollzieht sich die elektrische Verschiebung an den beiden Endflächen des ausgeschnitten gedachten Stückes im entgegengesetzten Sinne und es würden diese Endflächen entgegengesetzt elektrisiert erscheinen, wenn nicht deren Ladung durch die gleiche und entgegengesetzte Ladung der mit dem ausgeschnittenen Stücke in Contact stehenden Theile der Inductionsröhre aufgehoben würde.

Wenn die Inductionsröhre die Trennungsfläche zweier dielektrischen Körper durchschneidet, so ist allerdings die elektrische Verschiebung in den beiden Medien dieselbe, die Polarisation ist aber in diesen Medien nicht von gleichem Werte und die erwähnte Trennungsfläche wird eine Elektrisierung zeigen, welche gleich dem Unterschiede der elektrischen Schichten der Oberflächen der beiden in Berührung stehenden Medien ist.

Es ist also nach den Anschauungen Maxwell's die Ladung eines Conductors als die Ladung der an den Conductor anstoßenden Fläche des Dielektricums anzusehen. Die Wirkungen der elektrischen Polarisation treten nur an jenen Stellen hervor, an welchen eine Neutralisierung entgegengesetzter Elektricitäten nicht stattfinden kann, also nicht im Innern des Dielektricums, sondern an jenen Stellen, wo ein Conductor die Continuität des Mediums unterbricht.

Da die Elektrisierung des Leiters eine nur scheinbare ist, muss die ganze der Elektrisierung entsprechende Energie ihren Sitz im Medium haben. Diese Energie ist gleich jener Arbeit, welche man aufwenden muss, um die Verschiebung der Elektricitätstheilchen in einer Richtung zu vollziehen, welche jener der elastischen Kräfte entgegengesetzt ist. Wir haben bereits an früherer Stelle diese Arbeit bestimmt und durch die Formel:

$$\frac{\mu}{8\pi}.F^2$$

ausgedrückt. Schreiben wir diesen Ausdruck in der nachfolgenden Form:

$$\frac{1}{2}.\frac{\mu F}{4\pi}.F,$$

so erkennen wir, dass die zur Erzeugung der elektrischen Energie erforderliche Arbeit dem halben Producte aus der elektrischen Kraft in die Verschiebung gleichkommt.

Die von Maxwell geschaffene Theorie gibt auch Rechenschaft von der Thatsache, dass es unmöglich ist, einem Körper eine absolute Ladung einer Elektricitätsart zu ertheilen; denn jedes Theilchen des dielektrischen Mediums wird unter dem Einflusse der elektrischen Polarisation an entgegengesetzten Stellen mit gleichen aber entgegengesetzten Elektricitätsmengen geladen sein. Die Elektricität verhält sich nach den Anschauungen Maxwell's wie ein incompressibles Fluidum.

Es ist begreiflich, dass Maxwell, der zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen die Existenz eines im ganzen Raume verbreiteten incompressiblen Mediums als nothwendig betrach-

tet, dieses Medium mit dem Äther identificiert, durch dessen Bewegungen die Licht- und Wärmephänomene zustande kommen. Auf diese Weise wurde der erwähnte Forscher zu Studien geleitet, deren Resultate die engen Beziehungen zwischen Licht- und elektrischen Erscheinungen illustrieren.

368. Mechanische Erläuterung und Veranschaulichung des Verhaltens dielektrischer Medien. Bevor wir den wichtigen theoretischen Abschnitt über Dielektrica schließen, wollen wir noch einer sinnreichen mechanischen Veranschaulichung der Eigenschaften eines Dielektricums gedenken, wie sie von Maxwell in seinen Schriften(¹) gegeben wurde.

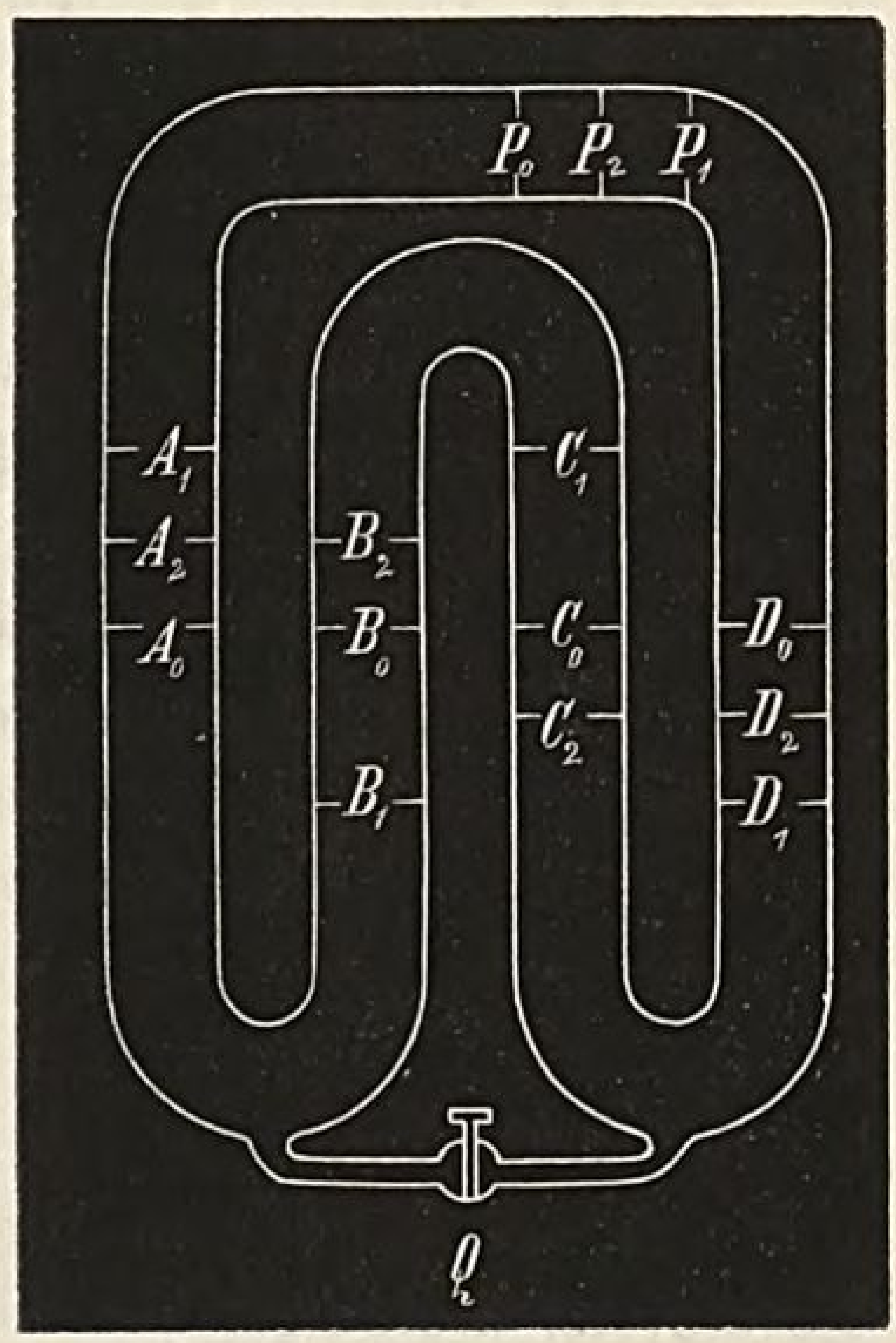


Fig. 148.

Wir stellen uns fünf gleichweite Röhren (Fig. 148) A, B, C, D und P vor, von denen die vier erstgenannten vertical, die letzte horizontal ist. Die verticalen Röhren denken wir uns in ihrer unteren Hälfte mit Quecksilber gefüllt; die oberen Hälften derselben, sowie die horizontale Röhre P enthalten Wasser. Die beiden Röhrensysteme AB und CD sind durch eine mit einem Sperrhahne Q versehene Röhre miteinander verbunden. In der horizontalen Röhre P kann ein Stempel gleiten.

Denken wir uns zuerst jenen Zustand, in welchem das Quecksilber in den vier verticalen Röhren gleich hoch (etwa bei A_0, B_0, C_0, D_0) stehe. Der Sperrhahn Q sei geschlossen und der bewegliche Kolben sei in P_0. Bewegen wir nun den letzteren von dieser Position in die durch P_1 angegebene, wobei $P_0P_1 = a$ ist, so wird wegen der Gleichheit der Röhren ein Steigen des Quecksilbers um diese Größe in den Röhren

(¹) Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. (Deutsche Übersetzung von Dr. B. Weinstein) I. Bd. p. 481; auch in Maxwell's Werke: „Die Elektricität in elementarer Behandlung“ (p. 119).

A und C eintreten, während ein Sinken um dieselbe Größe in den beiden anderen Röhren B und D stattfindet. Die jetzigen Quecksilberniveaus seien A_1, B_1, C_1, D_1. Zu beiden Seiten des Stempels herrscht eine Druckdifferenz, die offenbar $4a$ ist.

Wir können durch diese hydraulische Vorrichtung in ihrer jetzigen Beschaffenheit den Zustand eines dielektrischen Körpers darstellen, auf welchen eine elektromotorische Kraft $4a$ wirksam ist; den Überschuss an Wasser in der Röhre D denken wir uns als positive Ladung der Elektricität auf einer Seite des Dielektricums, den Überschuss von Quecksilber in der Röhre A als negative Ladung auf der anderen Seite des Dielektricums. Der Stempel erfährt an jener Stelle, welche der Röhre D am nächsten liegt, einen Drucküberschuss, durch welchen der Überschuss des Potentiales auf der positiven Seite des Dielektricums repräsentiert ist.

Lassen wir nun den Stempel frei, so wird er sich zurückbewegen und in P_0 zur Ruhe gelangen; die Flüssigkeiten gelangen in ihre ursprünglichen Positionen zurück und es stellt uns dieser hydraulische Vorgang eine vollständige Entladung des Dielektricums vor. Es herrscht jetzt eine der früheren entgegengesetzten Bewegung der Flüssigkeiten, was auch in der That mit den Elektricitäten eines Dielektricums bei der Entladung des letzteren stattfindet.

Maxwell wählte in dieser mechanischen Illustration des Verhaltens dielektrischer Körper incompressible Flüssigkeiten, um die Grundeigenschaft jeder elektrischen Verschiebung darzustellen, dass durch letztere nämlich keine wirkliche Anhäufung von Elektricität an einer Stelle stattfindet.

Denken wir uns nun den Hahn Q geöffnet, während der Stempel in der Lage P_1 gehalten wird. Die Niveaus von A_1 und D_1 werden keine Änderung erfahren, jene von B und C werden aber gleich werden und mit B_0 und C_0 zusammenfallen. Es wird nun die Druckdifferenz auf den beiden Seiten des Stempels sinken, und dieselbe ist gegeben durch $2a$.

Der jetzige Versuch entspricht dem Vorhandensein eines Theiles des Dielektricums, welcher ein geringes Leitungsvermögen hat, welcher sich aber nicht durch das ganze Dielektricum erstreckt. Es bleiben somit in diesem Falle die Ladungen

auf den entgegengesetzten Seiten des Dielektricums isoliert, deren Potentialdifferenz wird aber einen kleineren Wert annehmen. Es könnte der erwähnte Fall dadurch leicht realisiert werden, dass man einzelne Flaschen einer Franklin'schen Batterie in der Mitte der Einschaltung für sich entladet.

Nun machen wir mit dem hydraulischen Apparate einen dritten Versuch. Wir schließen den Hahn und lassen den Stempel P sich frei bewegen. Es wird der letztere in der Lage P_2 ins Gleichgewicht kommen und die Entladung wird jetzt nur die Hälfte der Ladung sein. Das Niveau des Quecksilbers in A und B wird um $\frac{a}{2}$ über dem Anfangsniveau sein und das Niveau in C und D wird um $\frac{a}{2}$ tiefer als C_0 und D_0 sein. Die neuen Niveaus des Quecksilbers in den vier Röhren seien durch A_2, B_2, C_2 und D_2 angedeutet.

Es werde nun der Stempel in der Position P_2 festgestellt und der Sperrhahn geöffnet, dann wird Quecksilber von B nach C fließen, und zwar so lange, bis wieder das Quecksilber in diesen Röhren bei B_0 und C_0 sich befindet. Der Kolben P wird in diesem Falle eine Druckdifferenz gleich a erfahren. Schließt man nun wieder den Hahn und lässt den Stempel sich frei bewegen, so gelangt dieser genau in der Mitte zwischen P_2 und P_0 ins Gleichgewicht.

Der erwähnte Vorgang entspricht der Rückstandsladung, welche man zu beobachten Gelegenheit hat, wenn man ein geladenes Dielektricum zuerst entladet, dann sich selbst überlässt. Es sammelt allmählich wieder einen Theil seiner Ladung und bei der Entladung bildet sich eine dritte Ladung u. s. w. Die einzelnen Ladungen nehmen an Größe ab und es ist jede Ladung die Hälfte der vorhergehenden und die Entladungen, die eine abnehmende geometrische Progression mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ bilden, geben in ihrer Summe eine Größe, welche gleich der ursprünglichen Ladung ist. Dieser Fall wurde früher eingehend erörtert.

Wir hätten den Hahn, statt ihn zu öffnen und zu schließen, nur etwas, aber nicht ganz während des Versuches geschlossen

halten können; dieser Fall würde jenem der Elektrisierung eines dielektrischen Körpers entsprechen, der ein vollkommener Isolator ist, dabei aber die Erscheinungen der elektrischen Absorption zeigt.

Machen wir endlich den Stempel undicht oder stellen eine Verbindung zwischen den höchsten Punkten der Röhre A und D her, so würde dieser hydraulische Versuch jenem entsprechen, in welchem wirkliche Leitung durch die Masse des Dielektricums stattfindet.

Wir haben in den vorhergehenden Experimenten die beiden Elektricitäten durch zwei wirkliche Flüssigkeiten, das elektrische Potential durch den Flüssigkeitsdruck dargestellt; die Bewegung des Stempels entsprach der Ladung und Entladung des Dielektricums; die elektromotorische Kraft war durch den Drucküberschuss auf den Stempel dargestellt.

IX. Kapitel.

Instrumente zur Beobachtung und Messung.

369. Wir hatten schon mehrmals Gelegenheit, beim Studium der Grunderscheinungen der Elektricität Messinstrumente in Verwendung zu ziehen; es ist aber nützlich, eingehender die verschiedenen Formen, welche man diesen Instrumenten gegeben hat, zu untersuchen und die Fälle anzugeben, in welchen jedes von ihnen specielle Vortheile bieten wird.

Man nennt allgemein Elektroskop einen Apparat, welcher gestattet zu erkennen, ob ein Körper elektrisiert ist, und die Natur der Elektricität, welche er besitzt, zu bestimmen. Ein Elektrometer ist andererseits ein Apparat, der nicht allein zur qualitativen Bestimmung dient; ein solches Instrument erlaubt die Menge der Elektricität zu bestimmen, welche ein Körper besitzt, oder auch die Capacität eines Conductors oder dessen elektrisches Potential ausfindig zu machen.

Es sei hier bemerkt, dass diese verschiedenen Probleme sich auf die Messung des Potentiales eines Conductors und noch allgemeiner auf die Messung der Potentialdifferenz, welche auf zwei verschiedenen Leitern herrscht, zurückführen lassen.

Man kann gleichwohl diese Instrumente nicht in zwei gesonderte Classen, die Elektroskope und Elektrometer, theilen, weil eine solche Eintheilung die Analogien zerstören würde, welche zwischen mehreren von ihnen bestehen

und weil überdies ein und derselbe Apparat die eine oder andere Rolle haben kann, je nach der Art seiner Anwendung.

William Thomson hat sie in anderer Weise in zwei Gruppen getheilt([1]), in die idiostatischen und heterostatischen Apparate. In den ersteren wendet man nur eine einzige Art von Elektricität an: zwei Leiter, von denen wenigstens der eine beweglich ist, sind in derselben Weise elektrisiert und stoßen sich ab; die anderen sind aus zwei oder mehreren Leitern zusammengesetzt, welche in verschiedener Weise elektrisiert sind. Thomson bemerkt bezüglich dieses Gegenstandes, dass, wenn zwei Leiter, in constante Entfernung gebracht, sich auf demselben Potentiale befinden, die Abstoßung, welche zwischen ihnen herrscht, der Elektricitätsmenge proportional ist, welche jeder von ihnen besitzt, und demzufolge dem Quadrate der Elektricitätsmenge oder dem Quadrate des Potentiales des einzelnen Conductors. Befinden sich andererseits diese beiden Conductoren auf verschiedenen Potentialen, von denen das eine constant erhalten ist, so kann man den Versuch in der Weise anordnen, dass die Variationen der elektrischen Kraft genau proportional den Änderungen des variablen Potentiales und dem absoluten Werte des constanten Potentiales sind. Man hat so das Mittel, nach Belieben die Empfindlichkeit der Instrumente zu modificieren, und die Grenzen zu entfernen, innerhalb welcher die Messungen direct vergleichbar sein werden.

Doch kommt es in der Praxis auch vor, dass ein und dasselbe Instrument, je nach den Umständen, in die eine oder andere Gruppe zurückkehren kann, so dass man keine absolute Unterscheidung zwischen ihnen aufstellen kann.

Es bietet sich auch ein anderes Problem dar, nämlich die Bestimmung der Elektricitätsmenge, welche durch einen Conductor innerhalb einer gegebenen Zeit entweicht; man kann z. B. die von einer Elektrisiermaschine gelieferte Elektricitätsmenge auswerten wollen. Man kann auch auf diese Art von Untersuchungen die Apparate anwenden, deren Construction auf das Princip des elektrischen Gleichgewichtes sich gründet;

([1]) Reprint of papers, p. 308.

da aber dieser continuierliche Elektricitätsfluss eine Erscheinung ist, welche mit jenen Phänomenen identisch ist, die man unter dem Namen der elektrischen Ströme umfasst, so wird man zu jenen Apparaten greifen können, welche speciell für das Studium der Ströme bestimmt sind, d. h. zu den Galvanometern.

Eine Classification, gegründet auf theoretische Überlegungen, ist daher fast unmöglich, und um der ganzen Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen, werden wir die verschiedenen Apparate zur Messung und Beobachtung in einer willkürlichen Weise gruppieren, indem wir uns an die Gestaltsanalogien, die zwischen ihnen bestehen, halten. Diese Übersicht der Instrumente wird nicht vollkommen erschöpfend sein und wir werden später die Beschreibung einiger von ihnen vornehmen, sei es wegen der Principien, auf welche sie sich stützen, sei es wegen der speciellen Versuche, für welche sie bestimmt sind.

Elektrische Pendel.

370. Einfaches Pendel. Eines der ältesten in Anwendung gebrachten Instrumente ist das elektrische Pendel, das aus einer leichten Kugel A (Fig. 149) besteht, die im allgemeinen aus Hollundermark ist und mittelst eines isolierenden oder leitenden Fadens aufgehängt ist. Wenn der Faden leitend und mit der Erde in Verbindung ist, wird das Pendel einfach dazu dienen, um zu erkennen, ob ein Körper elektrisch ist oder nicht, je nachdem sich eine Anziehung offenbaren wird oder nicht. Ist das Pendel wohl isoliert, also die Kugel mittelst eines Seidenfadens an einem Glasstative, das mit Schellack überzogen ist, aufgehängt und nähert man der Kugel einen elektrisierten Körper C, so wird zuerst Anziehung, dann Berührung und schließlich Abstoßung eintreten. Nähert man dann diesem Pendel einen Glasstab oder eine Harzstange, die

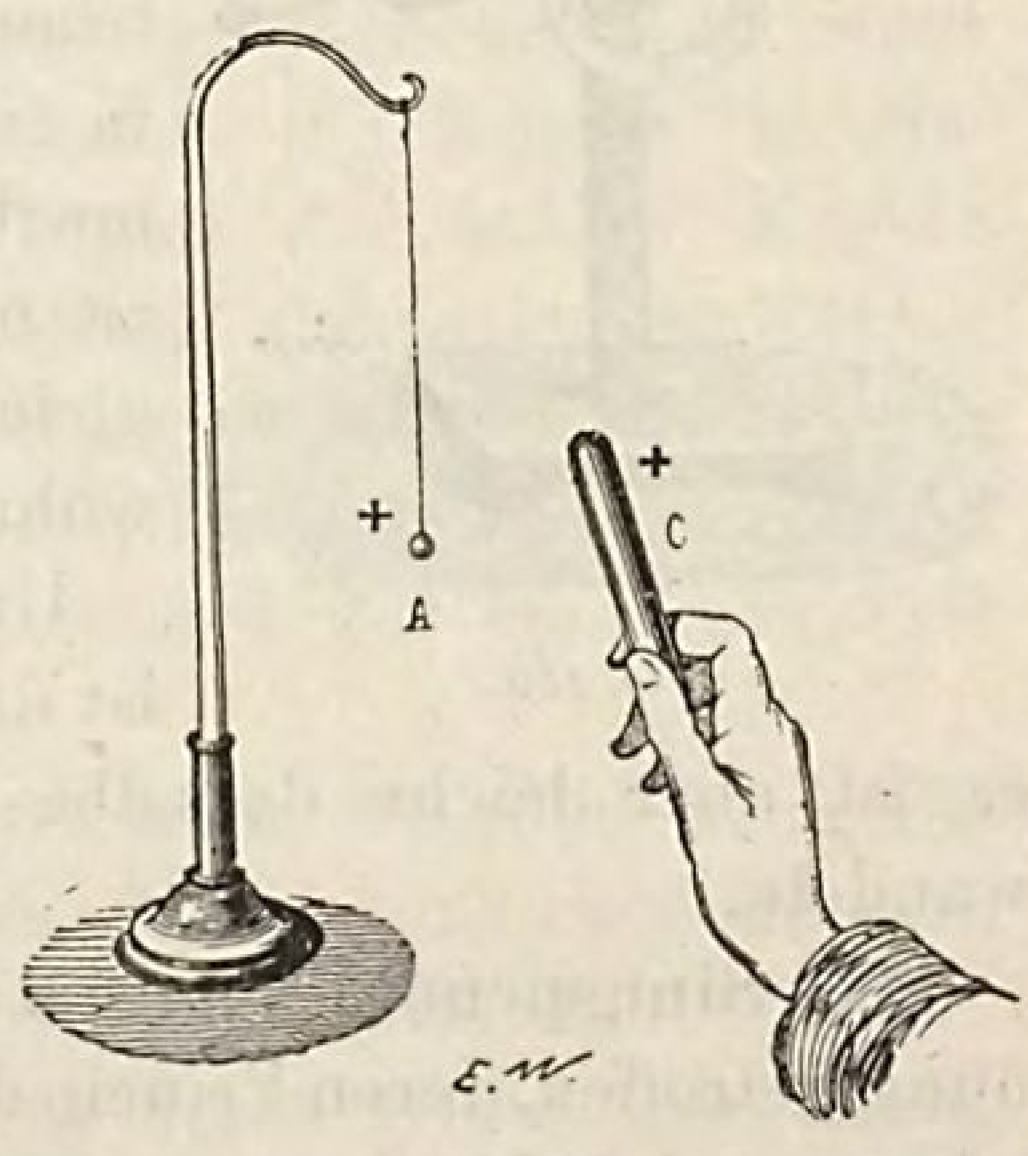


Fig. 149.

mit Tuch gerieben wurden, so wird man sehen, welcher von den beiden Stäben eine Abstoßung hervorruft; dieser ist dann ebenso elektrisch wie der vorausgesetzte Körper.

Man kann auch das Pendel mit bekannter Elektricität laden und demselben den Körper nahebringen, dessen elektrischer Zustand unbekannt ist; vollzieht sich eine Abstoßung, so ist der Körper ebenso elektrisch wie das Pendel; beobachtet man andererseits eine Anziehung, so muss man, bevor man den Schluss zieht, dass der Körper in entgegengesetzter Weise elektrisch ist, sich überzeugen, dass diese Anziehung nicht einer Influenzwirkung entspringt, dass beide Körper elektrisch sind und dass in einer größeren Entfernung keine Abstoßung stattfinden würde.

Einigemale construierte man eine Art von Pendeln mit einem verticalen Stäbchen, das am oberen Ende in eine Kugel ausgeht und sich um zwei Spitzen oder auf einer schneidigen Kante wie ein Wagebalken drehen kann. Diese Apparate können, wenn sie große Dimensionen haben, mit Vortheil gebraucht werden, um die Erscheinungen in eine große Entfernung ersichtlich zu machen, aber sie sind im allgemeinen zu massenreich und besitzen nicht die gleiche Empfindlichkeit wie das gewöhnliche Pendel.

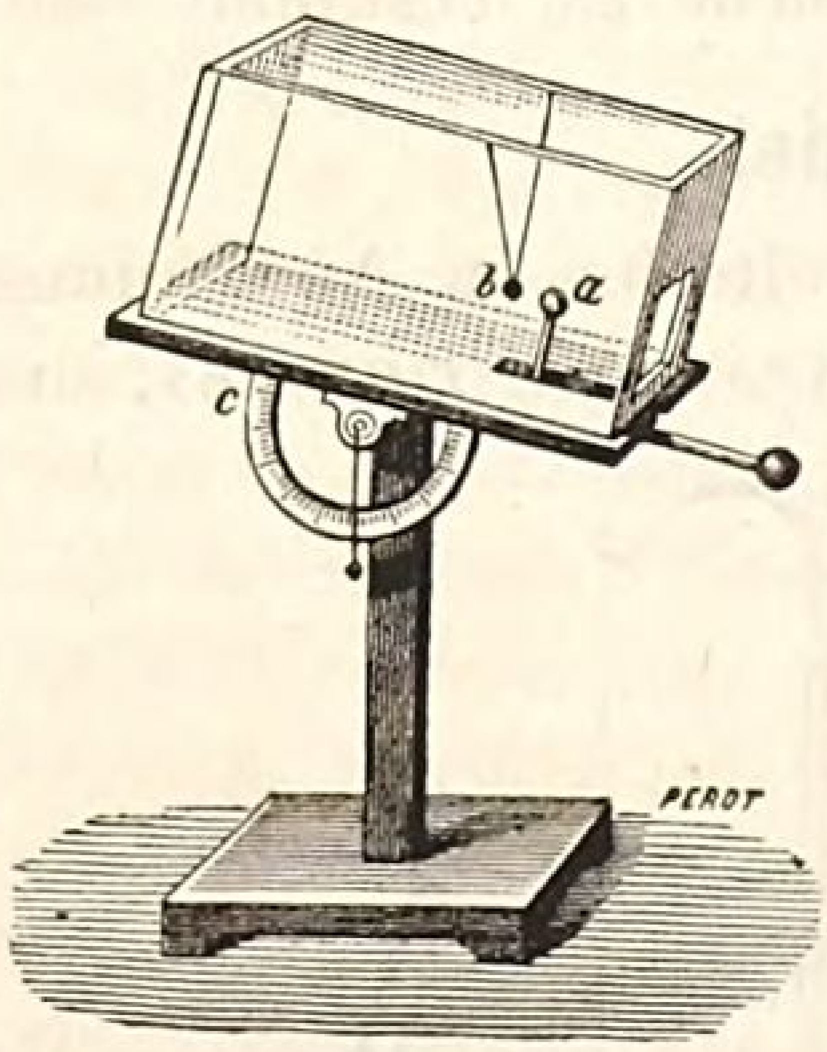


Fig. 150.

Unter der eben beschriebenen Form ist das Pendel nur ein Elektroskop, es ist aber leicht dasselbe in einen Messapparat zu verwandeln.

371. Sinuspendel. August[1] hat z. B. die folgende Anordnung getroffen, deren Princip der Sinusboussole von Pouillet entlehnt wurde. In einem rechtwinkeligen Glasgehäuse (Fig. 150) hängt man eine kleine Hollundermark-Kugel *b* an zwei Seidenfäden auf, die an der Oberseite des Gefäßes festgemacht sind; zur Seite dieser beweglichen Kugel ist eine andere fixe Kugel *a*,

(1) Rieß, Reibungselektricität, Bd. I., p. 61.

die von einem Schellackfuß getragen wird und mittelst eines kleinen Schiebers, der durch ein äußeres Stäbchen reguliert wird, der beweglichen Kugel mehr oder weniger genähert werden kann. Eine an der Seite angebrachte Öffnung gestattet einen elektrischen Körper in das Gehäuse einzuführen und die Kugeln zu laden. Das Gehäuse lässt sich ferner auf einem Stative um eine horizontale Axe drehen und die Neigung wird bestimmt durch ein Bleiloth, hinter welchem sich ein getheilter Kreis, der mit dem Gehäuse beweglich ist, befindet.

Man beobachtet die Entfernung der beiden Kugeln, wenn sie im neutralen Zustande sind und das Gehäuse horizontal ist; dann elektrisiert man die Kugeln in derselben Weise, sie stoßen sich ab und man neigt das Gehäuse passend zur Seite, derart, dass dann die Kugeln in dieselbe Entfernung wie ursprünglich gebracht sind. Wenn man zu diesem Behufe das Gehäuse um den Winkel α drehen musste, so erkennt man leicht, dass die Componente des Gewichtes p der beweglichen Kugel, welche gegen die fixe Kugel gerichtet ist, $p . \sin \alpha$ ist und dass sie der abstoßenden elektrischen Kraft das Gleichgewicht hält. Wenn daher die Ladung der einen Kugel constant gehalten wird, so ist die Ladung der anderen proportional dem Sinus der Neigung, welche erforderlich ist, um die Kugeln in dieselbe Entfernung zu bringen. Werden die beiden Kugeln gleichzeitig mit einem und demselben elektrisierten Körper geladen, so ist das Product der Ladungen der beiden Kugeln proportional dem Sinus des Neigungswinkels, oder auch: es ist die Ladung jeder von ihnen proportional der Quadratwurzel dieses Sinus.

Die Empfindlichkeit des Apparates kann überdies nach Belieben modificiert werden, je nach der Entfernung, welche man ursprünglich zwischen den beiden Kugeln herstellt.

Der Apparat von August scheint keine große Anwendung gefunden zu haben, das Princip aber, auf welches er gegründet ist, wurde mehrfach angewendet.

372. Elektrometer von Henley. Das Quadrantenelektrometer von Henley(¹) stellt eine andere Lösung des Problems dar.

(¹) Phil. trans. abridged., vol. XIII, p. 323 (1772).

Dieses Instrument besteht aus einem Pendel A (Fig. 151), das aus einem Elfenbeinstäbchen, welches in eine Kugel aus Kork oder Hollundermark endigt und an einem verticalen Holzstative T befestigt ist, gebildet wird. Dieses Stativ trägt einen verticalen Theilkreis, dessen Mittelpunkt der Axe entspricht, um welche sich das Pendel drehen kann. Ist der Apparat im neutralen Zustande, so bleibt das Pendel vertical und zeigt auf den Nullpunkt der Theilung; wird er elektrisiert, so erhebt sich das Pendel umsomehr, je größer die Ladung ist. Ein solches Instrument, auf dem Conductor einer Elektrisiermaschine eingesetzt oder auf die innere Belegung einer Leydnerflasche gebracht, zeigt daher rasch an, ob die Ladung größer oder kleiner wird und kann dazu dienen, um zu bestätigen, ob in verschiedenen Versuchen die Conductoren sich auf demselben Potentiale befinden. Um mittelst dieses Elektrometers die Elektricitätsmenge oder das Potential eines Conductors auszuwerten, müsste man das Gesetz der Ablenkungen kennen oder auf experimentellem Wege eine theoretische Graduierung vornehmen. Die vollständige Berechnung würde zweifelsohne große Schwierigkeiten bieten und die Formeln, welche man mittelst einer Näherungsberechnung aufstellen könnte, würden von keinem großen Interesse sein; die folgenden Versuche werden wenigstens eine Idee des Ganges der Ablenkungen geben.

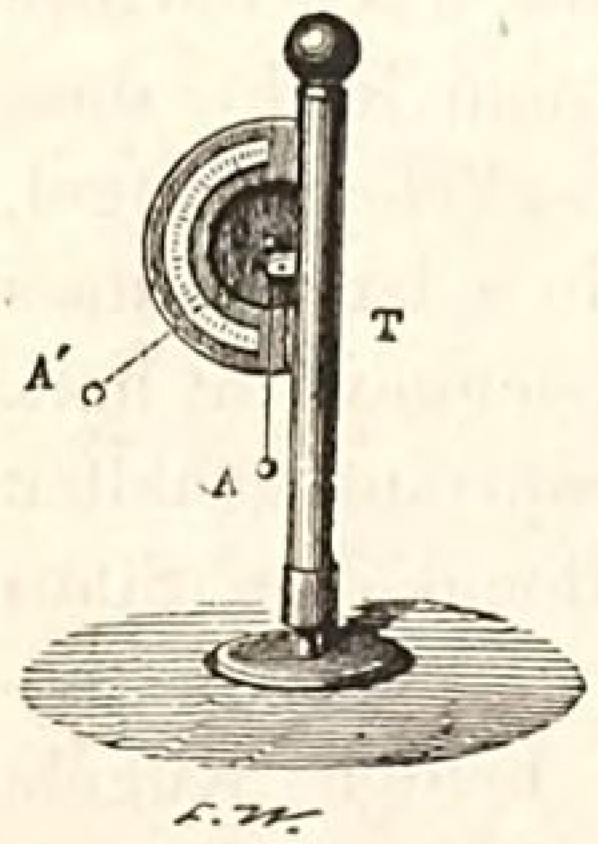


Fig. 151.

373. Marié Davy [1] bediente sich eines Quadrantenelektrometers, dessen Stativ oben eine Kugel trug, welche von der beweglichen Kugel berührt wurde; dieses Elektrometer wurde in leitende Verbindung mit der inneren Belegung einer Leydnerflasche gesetzt, welche mittelst einer Elektrisiermaschine geladen wurde. Die beiden Belegungen der Leydnerflasche waren einzeln mit den beiden Kugeln eines Entladungsmikrometers verbunden und man beobachtete die Ablenkung des Pendels in jenem Augenblicke, in welchem sich die Entladung in einer bestimmten Entfernung vollzog.

[1] Mémoire de l'Académie de Montpellier, section des sciences, t. I; p. 316.

Schlagweite D	Ablenkung des Pendels α	Entfernung der Mittelpunkte der Kugeln δ	$\frac{\sin\alpha . \sin\frac{\delta}{2} . \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{D^2}$
2^{mm}	6.3^0	7.8^0	17·6
3	8·5	10	16·8
4	10·5	12	16·7
5	12·4	13·6	16·7
6	14	15·5	16·4
7	15·7	17·2	16·3
8	16·9	18·4	15·3
9	18·1	19·6	14·7
10	19	20·5	13·5
11	19·8	21·1	12·3
12	20·5	22	11·6
13	21	22·5	10·8

Da das Potential der Belegung der Flasche fast der Schlagweite proportional ist, so würden, wenn die Ladungen der Kugeln den Potentialen proportional wären und wenn man diese Kugeln auf ihre Mittelpunkte reducieren könnte, die in der letzten Spalte gegebenen Producte constant sein; man sieht, dass diese Bedingung lange nicht erfüllt ist.

Ohne auf die auch complicierten Rechnungen zurückzukommen, kann man einfach das Verhältnis suchen, welches zwischen der Schlagweite und dem Ablenkungswinkel des Pendels besteht; man erhält auf diese Weise:

D	$\frac{\alpha}{D}$	$\frac{\delta}{D}$	$D_{gerechnet}$
2	3·15	3·90	2·11
3	2·83	3·33	3·02
4	2·62	3	3·96
5	2·48	2·72	5
6	2·33	2·58	6
7	2·24	2·46	7·19
8	2·11	2·30	8·14
9	2·01	2·18	9·17
10	1·90	2·05	10
11	1·80	1·92	10·79
12	1·71	1·83	11·51
13	1·61	1·73	12·05

Die in den ersten Spalten erhaltenen Verhältnisse sind nicht constant, man kann sich aber dieser Tabelle bedienen, um den Wert des Potentiales als Function der Ablenkung auszudrücken, sei es mittelst einer auf carriertem Papier gezeichneten Curve oder durch eine einfache empirische Formel von folgender Gestalt:

$$D = A\alpha + B\alpha^3.$$

Mittelst dieser Formel wurden die Zahlen der letzten Spalte gerechnet, wobei man für die Coefficienten A und B die Werte

$$A = 0{\cdot}312$$
$$B = 0{\cdot}000594$$

genommen hat, die aus den Versuchen bestimmt wurden, welche sich auf die Schlagweiten von 5 *mm* und 10 *mm* bezogen.

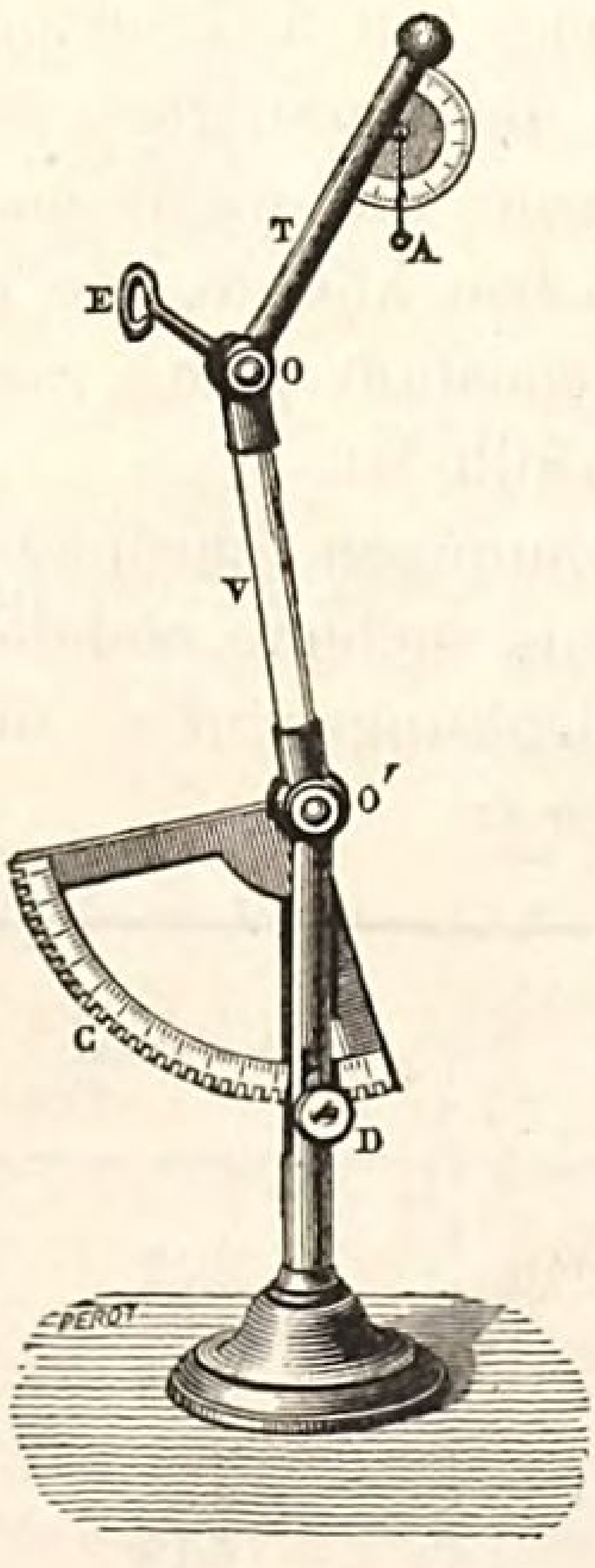


Fig. 152.

Man sieht, dass die Übereinstimmung der Rechnungen mit der Beobachtung hinreichend ist für Ablenkungen, welche kleiner als 20⁰ sind und dass das Elektrometer von Henley, wenn es gut angewendet wird, wobei die Kugeln mehr oder weniger schwer sind, große Dienste bei Versuchen leisten kann, für welche sich präcisere Instrumente nicht eignen würden.

374. Es ist noch leicht diesen Apparat in ein Elektrometer mit systematischer Graduierung zu verwandeln, wie es beim Instrumente von August der Fall ist. Zu diesem Behufe kann der Stab T (Fig. 152), welcher das Pendel A trägt, sich um eine horizontale Axe O auf einer Fassung drehen, welche wieder auf einem isolierenden Stabe V sich befindet, der selbst um eine horizontale Axe O′ beweglich ist. Ein Theilkreis, der mittelst eines Getriebknopfes D bewegt wird, zeigt den Winkel an, um welchen der Stab V gedreht worden ist.

Wenn der Apparat derart aufgestellt ist, dass das Pendel im neutralen Zustande auf einen bestimmten Theilstrich, etwa 10⁰,

des in der Figur oben gezeichneten Theilkreises zeigt, bringt man ihn mittelst des Ringes E mit einem elektrisierten Conductor in leitende Verbindung und das Pendel divergiert; man dreht dann den Träger V mittelst des Knopfes D um einen Winkel α so lange, bis das Pendel sich wieder auf demselben Theilstriche wie ursprünglich befindet. Das Moment des Gewichtes des Pendels bezüglich seiner Drehungsaxe ist dann proportional dem Sinα; da die relative Entfernung des Pendels von dem dasselbe tragenden Stabe in allen Fällen dieselbe ist, so ist die elektrische Kraft proportional dem Quadrat des Potentiales und wenn das Gleichgewicht eingetreten ist, so ist das Potential proportional der Quadratwurzel des Sinus des Winkels, um welchen der Apparat gedreht wurde. Man kann überdies die Empfindlichkeit dieses Elektrometers nach Belieben ändern, je nach der Abweichung, welche man für die constante Entfernung des Pendels von dem Aufhängestabe wählen wird.

375. Man wollte zuweilen dem Elektroskope von Henley eine größere Empfindlichkeit geben oder wenigstens die Angaben des Instrumentes ersichtlicher machen, indem man die Bewegung des Pendels auf eine Nadel überträgt, welche sich auf einer Kreistheilung befindet und mehrere Umdrehungen beschreibt, während das Pendel um einen Winkel von 90° abweicht. Zu diesem Behufe trägt die Axe des Pendels ein Zahnrad, welches in ein Getriebe von einem viel kleineren Durchmesser greift, das mit einer Nadel versehen ist. Es ist klar, dass man so die Ablenkungen vervielfacht, die bewegende Kraft ist aber dergestalt gering, dass die kleinsten Fehler im Mechanismus der Übertragung den Gang des Apparates stören und dessen Angaben ganz illusorisch machen können.

376. Harris hat ein Quadrantenelektrometer mit doppelter Abstoßung, welches empfindlicher ist, in Anwendung gebracht(¹). Es ist ein Kupferring (Fig. 153), über welchem eine fixe Kupfernadel AB sich befindet; letztere hat die Richtung eines der Durchmesser des Ringes und endet in zwei Kugeln. Eine andere Nadel aus Stroh *ab* ist versehen mit kleinen Laufgewichten *m*, welche sie zum Theil ins Gleichgewicht zu bringen

(¹) Phil. trans. (1834), part. II., p. 214.

erlauben; diese letztgenannte Nadel ist um eine Axe beweglich, die perpendiculär zur Ringebene ist. Der Ring wird schließlich von einem Stabe getragen, der auf einem Knie angebracht ist und alle möglichen Richtungen annehmen kann.

Wenn der Ring in eine verticale Ebene gestellt ist und mittelst der Kugel E in leitende Verbindung mit einem elektrisierten Körper gebracht wird, so ist es einleuchtend, dass die bewegliche Nadel von den fixen Kugeln abgestoßen werden wird und eine um so größere Ablenkung erfahren wird, je näher ihr Schwerpunkt der Drehungsaxe sein wird.

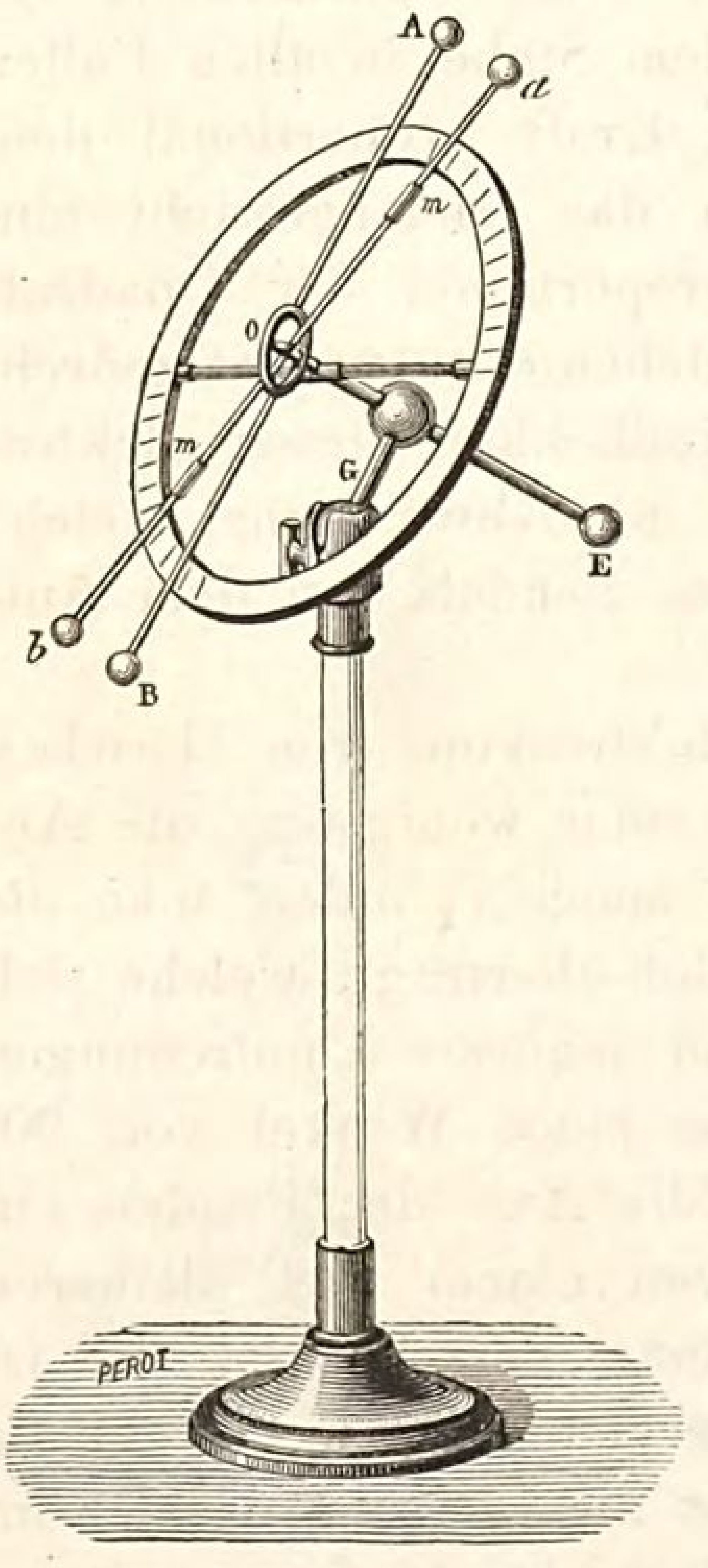


Fig. 153.

Dieser Apparat kann wie der vorhergehende graduiert werden; wir geben im Nachfolgenden das Resultat einiger Versuche (1), in welchen das Elektrometer mit einer Leydnerflasche in leitende Verbindung gebracht worden war und in welchen man die Elektricitätsmenge entweder nach der Zahl der Umdrehungen der Maschine oder nach ganz anderen Messmethoden schätzte.

Elektrische Ladung: . . . 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Pendelablenkung: . . . 1° 5° 12° 16° 20° 28° 30° 34° 38° 40°.

Neigt man die Ebene des Ringes, so wird die Ablenkung größer, da das Moment des Nadelgewichtes bezüglich der Rotationsaxe kleiner wird, während die elektrische Abstoßung keinerlei Änderungen erfährt. Man kann daher die Empfindlichkeit modificieren, entweder dadurch, dass man den Schwerpunkt der beweglichen Nadel verschiebt, oder dass man die Ebene des Ringes mehr oder weniger neigt; dieses letztere Mittel aber dürfte nicht ebenso gute

(1) Harris, Leçons élémentaires d'électricité, p. 110.

Resultate für ein Instrument liefern, dessen Spiel sehr empfindlich ist.

377. Doppelpendel. Um das Jahr 1733 ließ Du Fay zwei Fäden frei und parallel zueinander hängen oder er legte einen Faden um und befestigte ihn auf einen Metallstab; diese Fäden übten aufeinander eine Abstoßung aus, wenn der Metallstab elektrisiert wurde und sie wurden sogleich wieder parallel, wenn der Stab in den neutralen Zustand gebracht wurde.

Der Abt Nollet [1] hatte die Idee, dass dieser Versuch das Princip für ein Elektrometer abgeben könnte, in welchem die größere oder geringere Divergenz wenigstens in angenäherter Weise die Elektricitätsmenge anzeigen würde, welche ein Conductor besitzt. Zu diesem Zwecke befestigte er die zwei Fäden in einem und demselben Punkte und bestimmte ihre Divergenz, indem er den Schatten beobachtete, welcher von diesen Fäden auf einem Schirm entworfen wurde, wenn man sie mit einer Lampe oder mit Sonnenlicht beleuchtete.

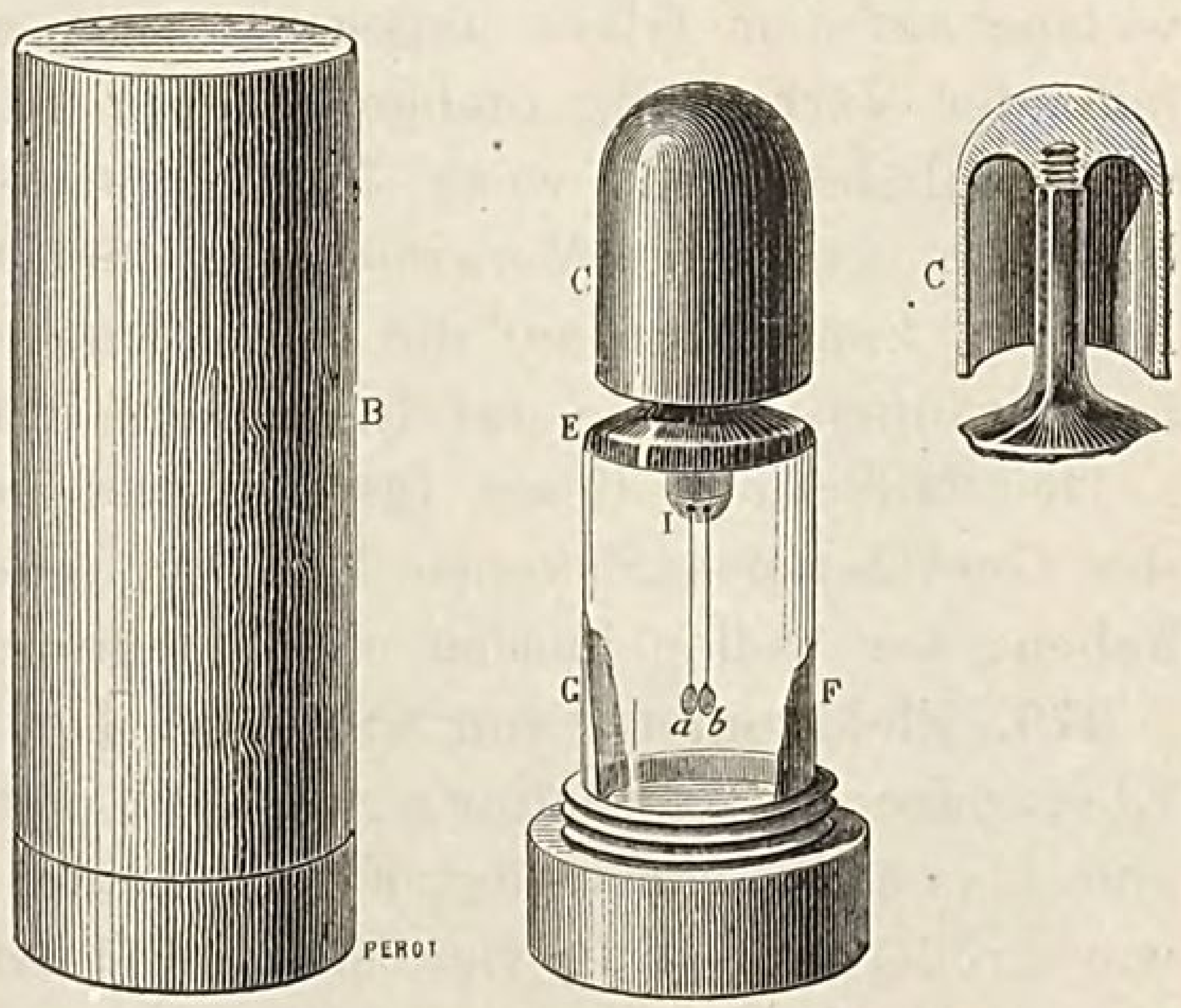


Fig. 154.

Dieses Doppelpendel aus Leinenfäden, welche an ihren Enden entweder mit Kugeln versehen waren oder auch keine solchen trugen, wurde seitdem allgemein angewendet, wie wir z. B. bei der Entdeckung der Influenz durch Canton gesehen haben.

378. Elektroskop von Cavallo. Cavallo [2] construierte im Jahre 1777 zum Studium der atmosphärischen Elektricität ein Elektroskop, welches man als den Typus aller jener Elektro-

(1) Leçons de Physique, T. VI., p. 323.

(2) Cavallo, Traité complet d'electricité, traduction française, p. 322.

skope ansehen kann, die noch heutigen Tages in Verwendung stehen. Dieser Apparat ist auf kleinere Dimensionen reduciert, um leichter transportabel zu sein. Er besteht (Fig. 154) aus zwei Pendeln von sehr feinem Silberdrahte, die kleine längliche Hollundermark-Körperchen *a* und *b* tragen; diese Pendel sind an einer Elfenbeinplatte J aufgehängt, die an einem Metallstäbchen festgemacht ist, welches man in die Tubulatur eines Glasgefäßes kittet. Das letztere ist auf einem Holz- oder Metallstative aufgekittet; der obere Theil des Glasgefäßes ist mit einer Schichte geschmolzenen Siegellackes E überdeckt und der Leiter endigt in einem Metallhelm, welcher den Zweck hat, die isolierende Schichte vor Regen zu schützen. Im Innern der Glasglocke sieht man zwei Stanniolblättchen F und G, welche auf dem Glase angeklebt sind und mit der Basis in leitender Verbindung stehen; diesen nähern sich die Pendel und entladen sich, wenn ihre Divergenz zu groß ist; sie bewirken auch eine Vergrößerung der Divergenz der Pendel. Endlich kann man auf die Basis eine cylindrische Kapsel B aufschrauben, welche das Instrument ganz bedeckt.

Der Gebrauch dieses Instrumentes ist derselbe wie jener des Goldblattelektroskopes, das wir schon früher besprochen haben; wir wollen hierbei nicht länger verweilen.

379. Elektrometer von Saussure. De Saussure[1] hat ein Elektroskop in Anwendung gebracht, das ein wenig von jenem von Cavallo construierten verschieden ist; die Glasglocke war größer, sie trug vier Stanniolblätter an Stelle der zwei, um zu verhindern, dass die Innenseite des Glases elektrisiert bleibt; ferner waren die Pendel hinreichend kurz, so dass sie niemals mit diesen Metallstreifen in Berührung kommen und sich hier entladen konnten.

De Saussure hat dieses Elektroskop in einen Messapparat verwandelt. Zu diesem Behufe zeichnete er auf einer Wand des Gefäßes, das in diesem Falle am besten viereckig sein wird, einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der Höhe des Befestigungspunktes der Fäden liegt, und theilte diesen Kreisbogen in gleiche Theile; bringt man das Auge in eine gewisse Entfernung, so kann man die Divergenz der Pendel schätzen.

(1) Voyage dans les Alpes, T. II., p. 165 und 175 (Neuchatel 18?4).

Die Fig. 155 stellt ein Elektroskop von dieser Form dar, dem eine Kuppe und ein Stab zum Studium der atmosphärischen Elektricität beigefügt ist. De Saussure hat dann ein sehr einfaches Mittel gefunden, um wenigstens eine näherungsweise Theilung zu erhalten: wenn man keine Methode hat, sagt er, um die elektrische Ladung des Instrumentes zu verdoppeln oder zu vervierfachen, kann man andererseits sehr leicht diese Ladung auf die Hälfte, den vierten Theil u. s. f. reducieren; es reicht zu diesem Zwecke hin, zwei identische Elektroskope zu nehmen und nachdem das eine von ihnen elektrisiert wurde, es mit dem anderen, ursprünglich im neutralen Zustande befindlichen zu berühren; die elektrische Ladung des ersten Instrumentes vertheilt sich dann in gleicher Weise zwischen beide und die neue Divergenz der Pendel entspricht daher einer halb so großen Elektricitätsmenge. Man verificiert überdies die Identität der beiden Apparate, indem man nachweist, dass sie, nachdem sie in Berührung gebracht, sodann getrennt wurden, beide dieselbe Divergenz aufweisen.

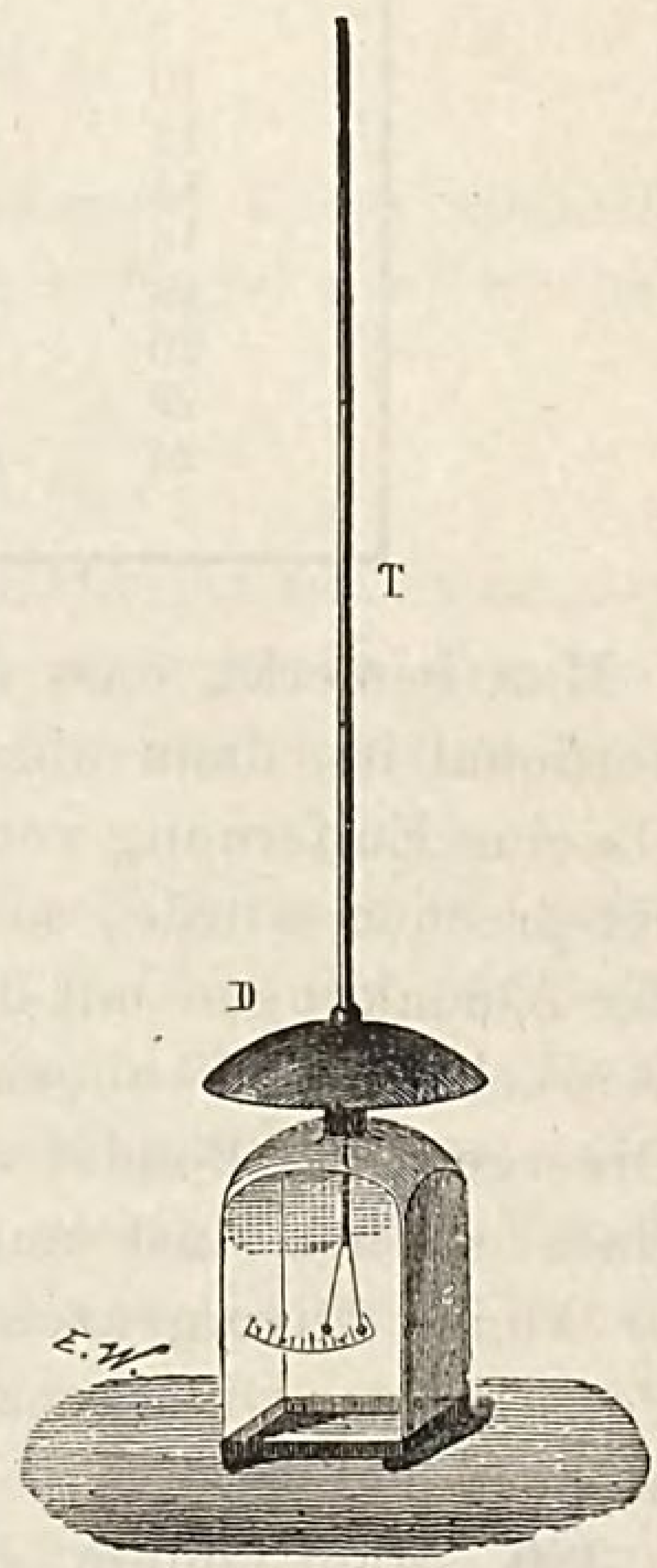


Fig. 155.

Aus einer Reihe solcher Beobachtungen hat Saussure eine Graduierungstabelle erschlossen, von welcher wir einen Auszug im Nachfolgenden geben: die Entfernung der Kugeln wurde in Viertellinien angegeben.

Entfernung der Kugeln	Elektrische Ladungen	Ablenkungen
1	1	1·56°
2	2	3·12
4	4	6·25
6	6	9·38
8	10	12·50
10	14	15·62
12	20	18·75
14	26	21·88
16	32	25
18	40	28·12
20	48	31·25
22	56	34·38
24	64	37·50

Man bemerkt, dass die Ablenkung zuerst der Ladung proportional ist, dann aber viel weniger schnell sich vergrößert. Da eine Entfernung von einer Linie einer Ablenkung von 6·25° entsprechen würde, so folgt daraus, dass die Proportionalität der Ablenkungen mit den elektrischen Ladungen bis zu einem Winkel von 12·5° angenommen werden kann, d. h. bis zu einer Divergenz der Pendel von 25°; außerdem variiert die Capacität eines solchen Instrumentes in keiner merklichen Weise für so kleine Divergenzen und man kann auch sagen, dass das Potential der Divergenz der Pendel zwischen denselben Grenzen proportional ist.

380. Man könnte auch die Doppelpendel-Elektroskope so anordnen, dass die Graduierung theoretisch vollzogen werden kann — wenigstens näherungsweise. Cavendish z. B. belastete die Pendel mit Ergänzungsgewichten, um ihre Empfindlichkeit zu vermindern. Wenn zwei Pendelpaare von derselben Form dieselbe Divergenz aufweisen, so ist die Abstoßung der Kugeln ihren Gewichten und dem Quadrate der Ladung proportional; die elektrische Ladung ist daher der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Pendel proportional. Gleichwohl ist eine derartige Graduierung schwer zu vollziehen.

Wenn andererseits die Kugeln der Pendel an hinlänglich entfernten Punkten befestigt sind, so dass sie sich nur dann berühren, wenn sie im neutralen Zustande sind, wobei dann

die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich d ist, so wird diese Entfernung übergehen in $d + 2l \sin \alpha$, wenn die Ablenkung jedes der Pendel von der Länge l gleich α sein wird. Sind die Elektricitätsmengen der Kugeln a und b und p das Gewicht jedes Pendels, so ist die Gleichgewichtsbedingung nahezu gegeben durch:

$$\frac{ab}{(d + 2l \sin \alpha)^2} = p \operatorname{tg} \alpha.$$

Die gesammte Ladung und das Potential V des Elektroskopes ist dann fast der Ladung jeder Kugel proportional, woraus man erhält:

$$V = H\,(d + 2l \sin \alpha) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha};$$

ein solcher Ausdruck aber ist erstens nicht genau, dann aber hat er auch nicht den Vortheil einfach zu sein, so dass man schließlich wieder lieber auf empirische Graduierungen zurückkommt.

Volta (1) ersetzte die Kugelpendel durch zwei sehr leichte Strohhalme, welche eine größere Empfindlichkeit der Apparate liefern; das beste Mittel aber, dessen man sich noch bedienen kann, besteht darin, dass man zwei Goldblättchen anwendet, welche man an die beiden Seiten eines plattgemachten Metallstabes anklebt: diese Anordnung rührt von Bennet (2) her.

Die Mehrzahl der heutigen Tages angewendeten Elektroskope sind Goldblatt-Elektroskope; sie können sich untereinander durch ihre Dimensionen unterscheiden, durch die Gestalt des Gefäßes, in welchem die Blättchen sich befinden, aber diese Einzelnheiten sind von keiner Wichtigkeit; das, was wir an früherer Stelle über das Goldblatt-Elektroskop gesagt haben, erlässt uns darauf wieder zurückzukommen.

381. Condensationselektroskop von Volta. Wenn man sehr schwache Elektricitätsquellen zu untersuchen hat, so geschieht es oft, dass das durch diese Quellen hervorgerufene Potential nicht hinreicht, um den Strohhalmen oder Goldblättchen eine merkliche Divergenz zu ertheilen. Volta hat deshalb dem

(1) Collezione dell' opere, 1816, 1 (2).

(2) Phil. trans. abridged, vol. XVI., p. 173 (1787).

Elektroskope einen Condensator beigefügt, welcher eine Anhäufung der von der Quelle erzeugten Elektricität gestattet, infolge dessen man daher viel stärkere Divergenzen erhält.

Das Condensationselektroskop besteht aus einem gewöhnlichen Elektroskope, meistens aus einem Goldblatt-Elektroskope, dessen Kugel durch eine Metallplatte A (Fig. 156) ersetzt ist, auf welche man eine andere mit einer isolierenden Handhabe versehene Metallplatte legt; diese beiden Platten sind auf den beiden sich berührenden Seiten mit Schellackfirnis überkleidet und bilden so einen Condensationsapparat, dessen condensierende Kraft sehr groß ist.

Um sich dieses Instrumentes zu bedienen, bringt man die Elektricitätsquelle, z. B. zwei aneinander gelöthete Streifen von Zink und Kupfer, wobei man das Zink in der Hand hält (Fig. 157), in leitende Verbindung mit der einen Platte, während die andere mit der Erde verbunden ist. Oder allgemein, man setzt die beiden Platten A und B einzeln in leitende Verbindung mit zwei Körpern, deren Potentiale V_1 und V_2 verschieden sind. Die Platten laden sich mit entgegengesetzten Elektricitäten; am Ende einer Zeit, die sich mit den Bedingungen des Versuches ändert, aber im allgemeinen sehr kurz ist, stellt sich dieselbe Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ zwischen ihnen her und der absolute Wert dieser Potentiale ist in der Regel zu klein, als dass die Blättchen in merklicher Weise eine Abstoßung aufeinander ausüben. Man hebt dann die Verbindungen auf, entfernt die obere Platte mittelst ihrer isolierenden Handhabe, dann breitet sich die Elektricität der unteren Platte in den Blättchen aus und ruft eine Divergenz derselben hervor; das gegenwärtige Potential der unteren Platte ist von demselben Zeichen wie die ursprüngliche Differenz $V_1 - V_2$ und es ist gleich dieser Differenz multipliciert mit der condensierenden

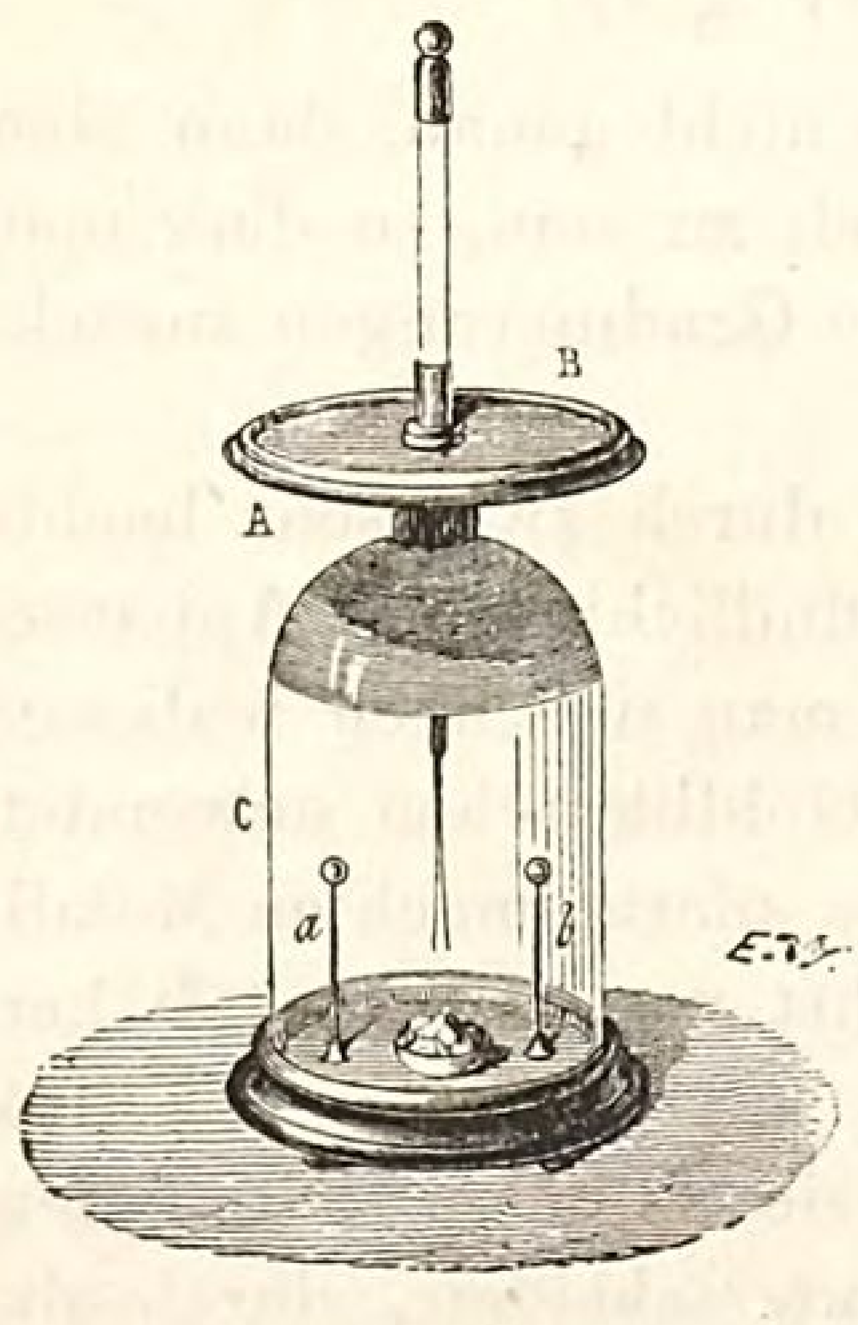


Fig. 156.

Kraft des Condensators. Man erkennt dann die Qualität der von der Quelle hervorgerufenen Elektricität, oder das Zeichen der Potentialdifferenz zwischen den beiden studierten Körpern, indem man in gewöhnlicher Weise die Natur der Elektricität bestimmt, mit der die Goldblättchen geladen sind.

Volta([1]) hat nachgewiesen z. B., dass die condensierende Kraft seines Apparates ungefähr 120 war, so dass, wenn eine in directe Verbindung mit dem Elektroskope gesetzte Elektricitätsquelle im Stande war, nur eine Divergenz der Blättchen um einen Viertelgrad hervorzurufen, welche kaum wahrgenommen werden kann, die Anwendung der Condensation gestattet, auf dem Apparate ein Potential herzustellen, das 120mal größer ist und eine Divergenz von 30° hervorzurufen, da die Proportionalität der Ablenkungen mit den Potentialen nahezu bis zu dieser Entfernung besteht. Ebenso wird, wenn die Platte A allein geladen ist mit einer Elektricitätsmenge, welche im Stande ist, eine Divergenz von 120° hervorzurufen oder besser noch eine Ablenkung, welche nach dem Gesetze der Proportionalität 120° entsprechen würde, und wenn man auf diese Platte die obere mit der Erde in Verbindung gesetzte Platte B auflegt, das Potential auf der ersteren Platte 120mal schwächer werden und die Divergenz der Blättchen wird nicht mehr als 1° betragen.

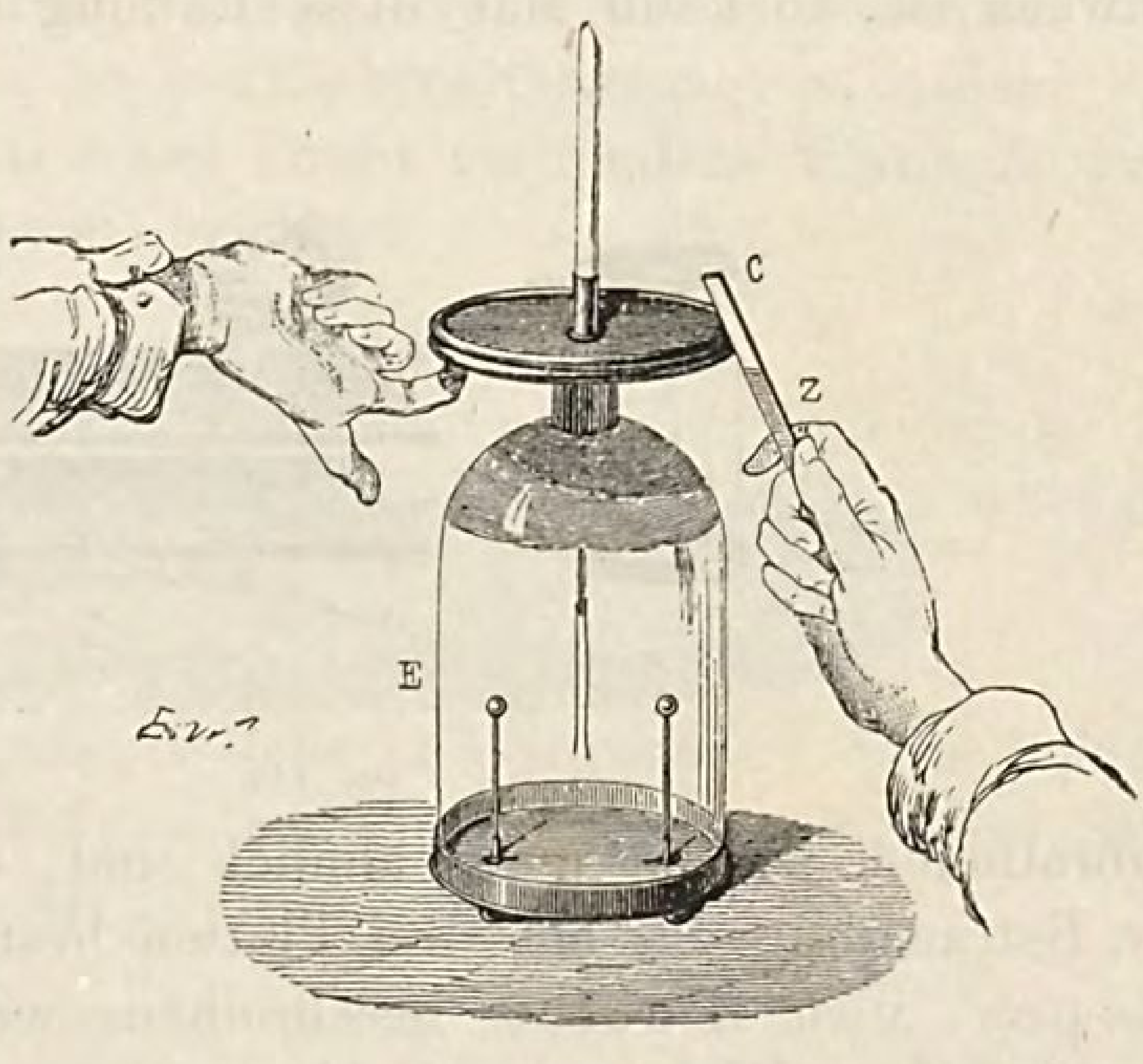


Fig. 157.

Dies ist genau der Vorgang, welchen Volta in Anwendung brachte, um die condensierende Kraft seines Apparates zu

([1]) Annales de Chimie, 1. série, t. XL., p. 241.

messen; er nahm als Elektricitätsquelle eine Leydnerflasche von großen Dimensionen, deren Verlust vernachlässigt werden konnte, wenn man sie mit dem Condensator des Elektroskopes in Verbindung setzte.

Es kann vorkommen, dass das Potential der Elektricitätsquelle zu schwach ist, um eine hinlängliche Deviation zu erhalten und dass die Anwendung der Condensation eine zu starke Ladung liefert. Es ist leicht, dieser Unzukömmlichkeit aus dem Wege zu gehen, wenn man die beiden Platten nicht vollständig aufeinander einwirken lässt; die Ladung der unteren Platte ist nahezu proportional der Größe der gegenüberstehenden Flächen. Wenn andererseits die Ablenkung der Blättchen noch nach der Wirkung der Condensation sehr schwach ist, so kann man diese Ladung vervielfachen durch

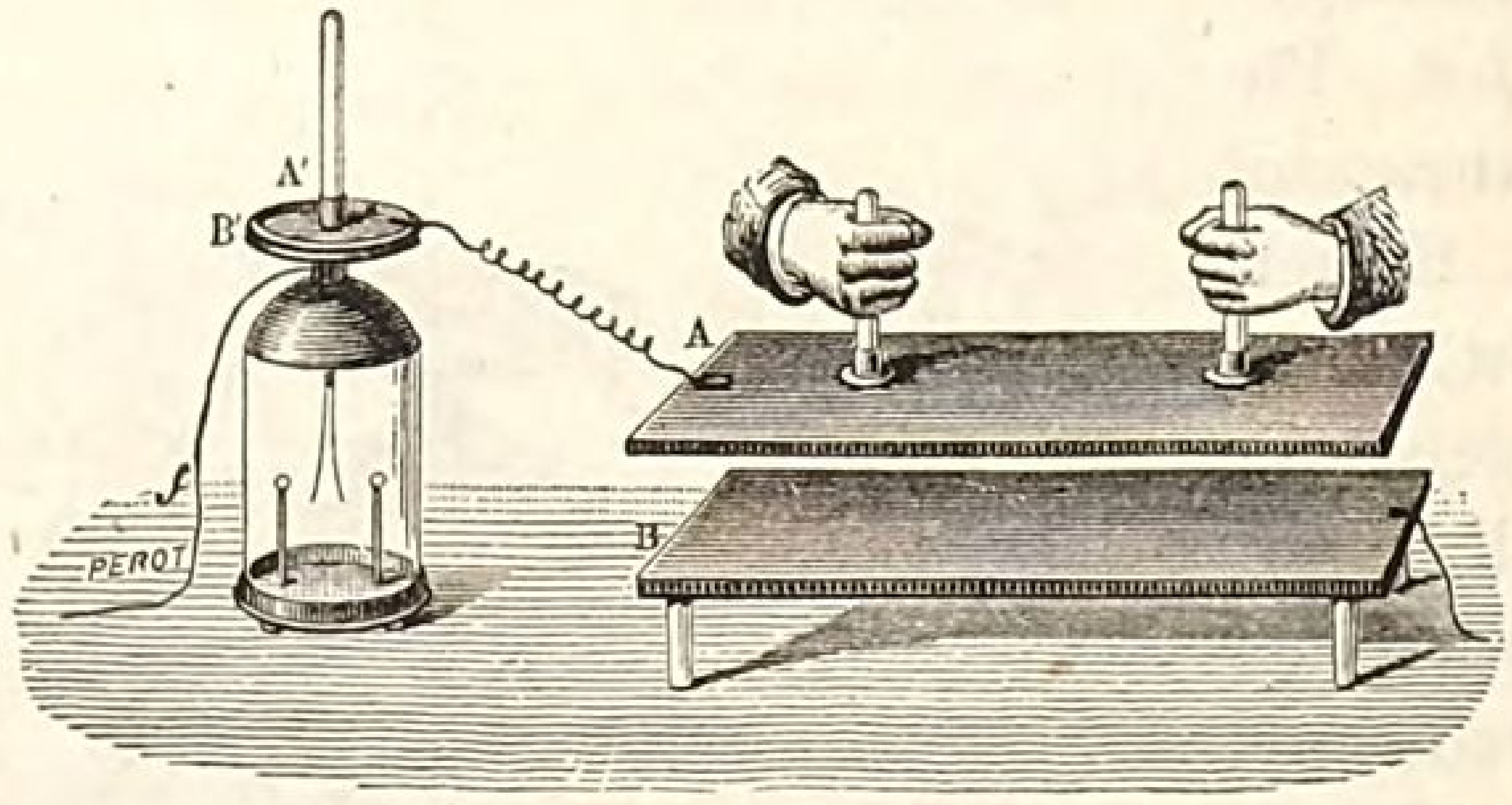


Fig. 158.

Operationen, welche jenen ähnlich sind, die wir gelegentlich der Betrachtung des aus drei Platten bestehenden Elektroskopes von Peclet beschreiben werden; man führt aber in dieser Weise neue Fehlerquellen ein und es ist besser eine Anordnung zu treffen, der Gaugain den Namen „Doppelcondensation" (1) ertheilt hat.

382. Elektroskop mit Doppelcondensation von Gaugain. Gaugain bringt in leitende Verbindung mit der Elektricitätsquelle die obere Platte A' (Fig. 158) eines sehr kleinen Condensationselektroskopes und die obere Platte A eines Condensators von viel größeren Dimensionen (dieser bestand aus zwei quadratförmigen Platten von 40 *cm* Seite); die beiden anderen

(1) Annales de Chimie et de Physique, 3. serie, t. XLVIII, p. 170.

Belegungen B und B′ blieben in Verbindung mit dem Erdboden. Entfernt man dann die Quelle, hebt mittelst isolierender Handhaben die obere Belegung A des großen Condensators, so begibt sich der größte Theil der Elektricität, welche dieser Leiter besitzt, auf die Platte A′. Man trennt dann diese beiden Platten, dann hebt man die Verbindung *f* des Elektroskopes mit der Erde auf, entfernt die obere Platte A′ und beobachtet die Divergenz der Blättchen.

Man erkennt leicht, dass die Empfindlichkeit auf diese Weise bedeutend gesteigert wurde und es ist leicht eine diesbezügliche Rechnung anzustellen. Seien *c* und C die Capacitäten der beiden Platten A′ und A, wenn sie isoliert vorausgesetzt sind, und $\mathfrak{F}$ die condensierende Kraft, welche wir für beide als gleich voraussetzen wollen. Wenn V das Potential der Elektricitätsquelle ist, ist die Elektricitätsmenge *m*, welche die mit der Quelle durch einen Draht verbundene Platte A′ aufnehmen würde, gegeben durch:

$$m = cV;$$

die Elektricitätsmenge M, welche die beiden miteinander in Verbindung stehenden Platten A und A′ aufnehmen würden, wäre

$$M = (c + C)V.$$

Die Elektricitätsmenge, welche in Wirklichkeit diese beiden Platten unter dem Einflusse der Condensation aufnehmen, ist:

$$M' = (c + C) \cdot \mathfrak{F} \cdot V.$$

Im zweiten Theile der Operation, wenn die beiden Platten des großen Condensators getrennt sind, ist die Capacität des Leiters AA′... $\mathfrak{F}c + C$ geworden und da sich die Elektricitätsmenge nicht geändert hat, ist das neue Potential V′ bestimmt durch die Gleichung:

$$M' = (c + C)\mathfrak{F} \cdot V = (\mathfrak{F}c + C)V';$$

die Elektricitätsmenge der kleinen Platte ist $\mathfrak{F}cV'$. Wenn schließlich alle leitenden Verbindungen aufgehoben sind, und die Platte A′ entfernt ist, wird das Potential V″ der Platte B′ sein:

$$cV'' = \mathfrak{F} \cdot c \cdot V'.$$

Hieraus erhält man:

$$V'' = \mathfrak{F}V' = \mathfrak{F}V\frac{c\mathfrak{F} + C\mathfrak{F}}{c\mathfrak{F} + C} = \mathfrak{F}V\frac{1 + \frac{C}{c}}{1 + \frac{C}{\mathfrak{F}}}.$$

Hätte man nur die einfache Condensation in Anwendung gebracht, so würde man als schließliches Potential erhalten haben:

$$V''' = \mathfrak{F}V.$$

Der Vortheil der Doppelcondensation ist daher dargestellt durch das Verhältnis:

$$\frac{V''}{V'''} = \frac{1 + \frac{C}{c}}{1 + \frac{C}{c\mathfrak{F}}}.$$

Da der Coefficient $\mathfrak{F}$ immer sehr groß ist, so unterscheidet sich der Nenner nicht merklich von der Einheit; andererseits stehen die Capacitäten der Platten, wenn sie kreisförmig vorausgesetzt werden, fast in dem Verhältnisse ihrer Durchmesser d und D und man kann schreiben:

$$\frac{V''}{V'''} = 1 + \frac{C}{c}, \text{ oder } \frac{V'' - V'''}{V'''} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}.$$

Das Verhältnis der Zunahme des Potentiales zu jenem Potentiale, welches die einfache Condensation liefern würde, ist daher gleich dem Quotienten des Durchmessers des großen Condensators durch den Durchmesser des kleinen Condensators.

383. Man wird noch besser die Nützlichkeit dieser Methode einer einzigen Berührung erfassen, wenn man durch einige Versuche, welche wir ebenfalls Gaugain entnehmen, zeigt, mit welcher Leichtigkeit die beiden Firnisschichten sich durch Reiben elektrisieren können, und welche Vorsicht man gebrauchen muss, damit ein Condensationselektroskop sichere Angaben liefere.

Wenn man mit einem Katzenfelle sehr leicht die Firnisschichte der unteren Platte reibt, so divergieren die Blättchen augenblicklich und man erfährt, dass die Elektricität negativ

ist. Es genügt, zart die Hand über die ganze Oberfläche des Firnisses zu legen, um das Instrument vollständig zu entladen.

Findet die Reibung mit dem Katzenfelle länger mit einem größeren Drucke statt, so divergieren die Blättchen noch mehr und man bringt sie wieder in die Verticale, wenn man die Oberfläche des Firnisses mit der Hand berührt; aber diesmal ist der Apparat nicht entladen. Es genügt in der That, die obere Platte aufzusetzen und die beiden Platten mit der Hand zu verbinden, sodann sie von neuem zu trennen, um nachzuweisen, dass die Blättchen sich energisch abstoßen und noch mit negativer Elektricität geladen sind. Legt man die Hand neuerdings auf die Firnisschichte, so würde man die Blättchen wieder zum Fallen bringen, sie würden sich aber wieder von neuem nach einem ähnlichen Vorgange erheben und so fort, beinahe unendlich oft könnte man die Operation vornehmen. Die durch das Reiben mit dem Katzenfelle entwickelte Elektricität ist in die Firnisschichte gedrungen und es genügt die Berührung mit der Hand oder irgendeinem Körper nicht, um sie zu entfernen. In diesem Zustande könnte das Instrument keine Dienste mehr leisten und man müsste längere Zeit, oft mehrere Tage warten, damit es langsam wieder in den neutralen Zustand zurückkehrt.

Man gelangt zu demselben Resultate in schnellerer Weise, wenn man auf die Firnisschichte haucht, so dass sich eine continuierliche Thauschichte darauf ansetzt; das ein- oder zweimalige Anhauchen genügt, um die ganze Platte in den neutralen Zustand zu bringen. Man bewahrheitet dies, indem man denselben Versuch mit der oberen Platte wiederholt; die Blättchen divergieren nicht mehr.

Das folgende Experiment zeigt in anderer Weise das Eindringen der Elektricität in die isolierende Schichte. Man reibt auf Seidenpapier einige Zeit hindurch und genügend stark die obere Platte, welche man mit der isolierenden Handhabe hält; diese Platte wird mit einer großen Menge positiver Elektricität geladen. Man berührt mit der Hand die ganze Oberfläche des Firnisses und die Platte liefert keine Anzeichen von Elektricität auf einem gewöhnlichen Elektroskope. Man reibt sie dann leicht mit einem Katzenfelle und weist nach,

dass sie sich mit negativer Elektricität ladet. Ohne auch diese negative Schichte zu entfernen, setzt man diese Platte auf die andere, verbindet die beiden Platten mit der Hand und trennt sie hierauf wieder; die Blättchen stoßen sich heftig ab und sind negativ elektrisch. Es war daher noch in der Firnisschichte der oberen Platte unter der Oberflächenschichte negativer Elektricität eine viel größere Menge positiver Elektricität. Diese Elektricität übte überdies keine merkliche Wirkung auf äußere Körper aus wegen einer entgegengesetzten Elektricitätsschichte, welche sich durch Influenz in der Platte selbst entwickelte. Auch jetzt wird ein ein- oder zweimaliges Anhauchen genügen, um jede Spur von Elektricität zum Verschwinden zu bringen.

384. Wegen dieser Fehlerquellen ist es daher nothwendig, dass man, bevor man sich eines Condensationselektroskopes bedient, zuerst durch ein „manoeuvre a blanc," d. h. dadurch, dass man die beiden Platten mit der Hand verbindet, sie dann trennt, nachweist, dass die Blättchen nicht divergieren und dass keine Elektricität sich in der Schellackschichte vorfindet. Wenn man in den Versuchen die Platten nähert und trennt, entstehen wohl Spuren von Elektricität infolge der unausweichlichen Reibung der Firnisschichten, aber diese Elektricität befindet sich nur an der Oberfläche, sie entsteht immer fast in derselben Weise und ruft keine Störung hervor.

Ebenso ist es in dem Apparate mit Doppelcondensation, man muss aber nach jedem Versuche dafür sorgen, dass die Leiter in den neutralen Zustand zurückkehren.

Man kann noch besorgen, dass die chemischen Wirkungen, welche sich zwischen der Luft und den Metallplatten vollziehen, eine Ursache zufälliger Elektricität sind. Um sich von diesem Umstande zu schützen, genügt es, die Platten auf ihrer ganzen Oberfläche mit Schellackfirnis zu überziehen und an jede von ihnen eine Platinlamelle zu löthen, welche man in Berührung mit den zu untersuchenden Körpern setzen wird.

385. Dreiplatten-Elektroskop von Peclet. Wir haben uns bis jetzt auf die Anwendung der Condensatoren zum Studium der Elektricität einer Quelle beschränkt, d. h. einer Erscheinung,

in welcher die Elektricität das Potential eines Leiters constant erhält. Die Condensation kann auch noch dazu dienen, wenn man die Elektricität studieren will, welche auf einen Körper von großen Dimensionen ausgebreitet ist, dessen elektrische Capacität bezüglich jener des Elektroskopes sehr groß sein würde. Die Theilung der Elektricität, welche sich dann zwischen dem Apparate und dem elektrisierten Körper vollziehen würde, würde das Potential auf diesem letzteren nur in unmerklicher Weise fallen machen und die Wirkung des Instrumentes würde fast dieselbe sein. Dies ist z. B. der Fall der atmosphärischen Elektricität.

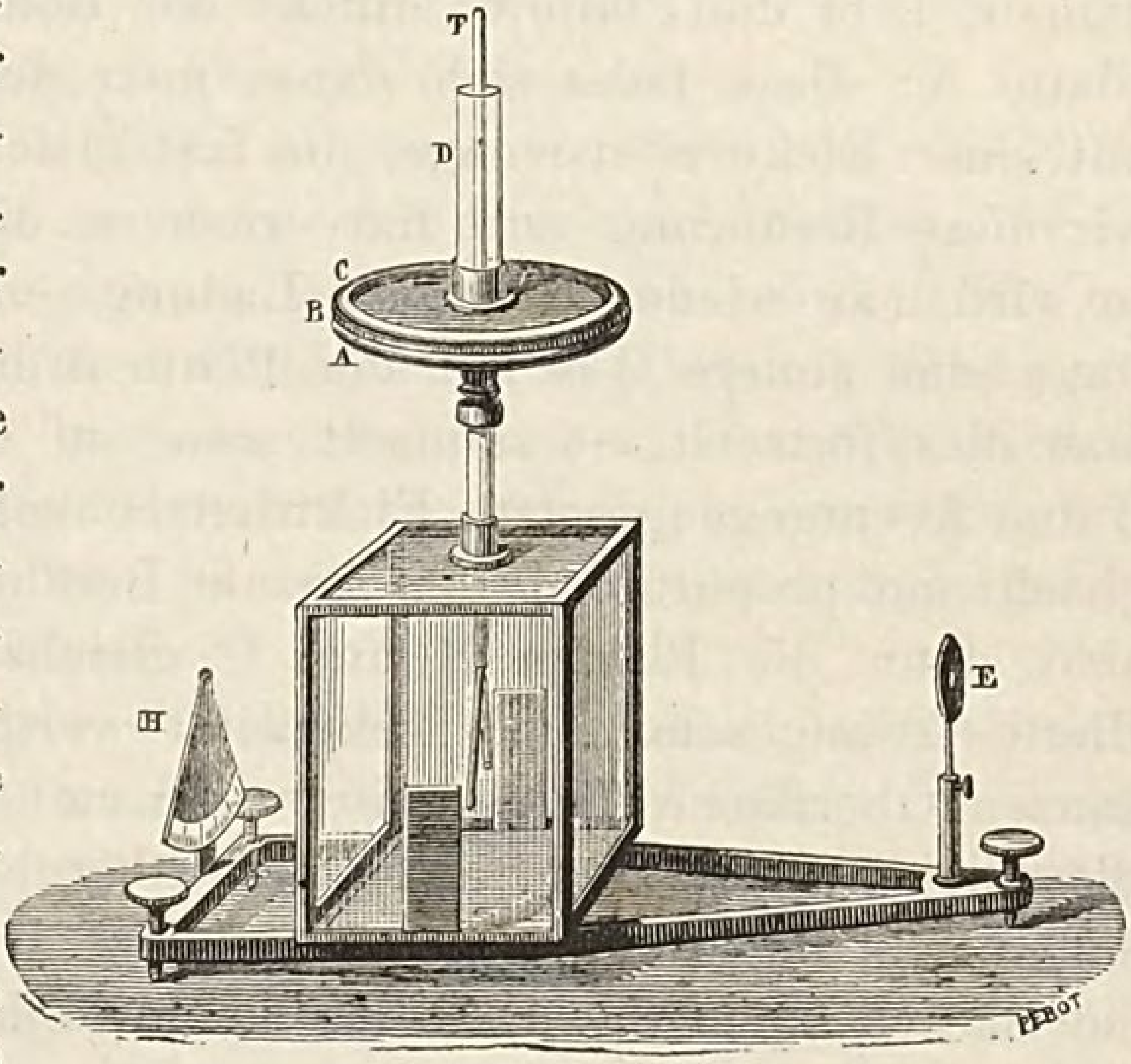


Fig. 159.

Will man aber eine geringe Elektricitätsmenge, die auf einem Körper von kleinen Dimensionen ausgebreitet ist, beobachten, so würden die gewöhnlichen Condensationsapparate sich nicht nützlich erweisen. Peclet[1] hat gesucht, diese Elektricitätsmenge durch eine Reihe von successiven Influenzen zu vervielfachen. Sein Elektroskop besteht aus drei Platten: eine untere Platte A (Fig. 159), welche die Goldblättchen wie gewöhnlich trägt; eine obere gewöhnliche Platte C, welche mit einer Glasröhre D versehen ist, durch welche die Platte gehoben werden kann, und eine zwischenliegende Platte B, welche auf ihren beiden Seiten gefirnisst ist und nur am Rande vom Schellack entblößt ist. Diese letztere Platte ist mit einem Glasstäbchen T versehen, welches die vorher erwähnte Röhre durchsetzt und erlaubt, beide beweglichen Platten auf einmal zu heben.

(1) Annales de Chimie et de Physique, 3. serie, t. II., p. 100.

Wenn ein Körper mit einer Elektricitätsmenge geladen ist, die zu schwach ist, um in merklicher Weise auf ein gewöhnliches Elektroskop zu wirken, so bringt man diesen Körper in Berührung mit der oberen Platte C, welche auf diese Weise z. B. eine Ladung $+m$ empfängt; dies ist jene Ladung, welche man vervielfachen muss. Man bringt dann die Platte B in Verbindung mit dem Erdboden, indem man den Rand dieser Platte mit dem Finger berührt; diese Platte ladet sich mit einer Elektricitätsmenge, die fast gleich $-m$ ist. Man entfernt den Finger, hebt die Platte C mittelst der Röhre und berührt die Platte A; diese ladet sich dann unter dem Einflusse von B mit einer Elektricitätsmenge, die fast gleich $+m$ ist. Heben wir diese Berührung auf und erneuern die erste Operation, so wird man wieder eine neue Ladung $-m$ auf der Platte B, dann eine andere $+m$ auf der Platte A hervorrufen. Wenn man dies fortsetzt, so sammelt man auf den beiden Platten B und A entgegengesetzte Elektricitätsmengen an, die nahezu gleich und proportional der Anzahl Berührungen sind. Man hebt dann die Platten B und C gleichzeitig; die auf der Platte A angesammelte Elektricität vertheilt sich auf der ganzen Oberfläche dieses Leiters und ruft eine Divergenz der Blättchen hervor. Man beobachtet überdies diese Divergenz, indem man das Auge hinter eine kleine Öffnung E stellt und die Blättchen auf einen Theilkreis H projiciert.

Peclet hat nachgewiesen, dass, wenn er in der angezeigten Weise operierte, die Ablenkung bis zu einer bestimmten Entfernung der Anzahl Contacte proportional ist, was die Theorie dieses Apparates rechtfertigt; gleichwohl hat man dieses Elektroskop von Peclet nahezu aufgegeben.

In der Praxis hat man nicht geringe Elektricitätsmengen, wohl aber Elektricitätsquellen von sehr kleinem Potential zu studieren. Es ist richtig, dass ein Condensationselektroskop, welches schon in leitende Verbindung mit einer Elektricitätsquelle gesetzt ist, noch eine zu geringe Elektricitätsmenge besitzen kann und das Instrument von Peclet würde erlauben diese Ladung zu vervielfachen, aber die Anzahl der successiven Contacte, welche man zu wiederholen gezwungen ist, macht den Versuch sehr ungewiss. In der That genügt es, wenn

das aus drei Platten bestehende Elektroskop im guten Zustande in trockener Luft sich befindet, mehreremal hintereinander den angezeigten Vorgang auszuführen, um Elektricität nachzuweisen, deren Zeichen selbst nicht mehr constant ist; diese zufällige Elektricität rührt von der unvermeidlichen Reibung der Firnisschichten her oder rührt spurenweise von älteren Experimenten her, kann also die Erscheinung, welche man studiert, gewaltig beeinflussen und deshalb sehr schwere Fehler verursachen.

Wenn man daher eine sehr geringe Elektricitätsmenge beobachten will, gibt es kein gewisseres Mittel als ein Instrument anzuwenden, welches so genau ist, dass man die Elektricitätsmenge direct mittelst desselben nachweisen kann. Wenn man eine Elektricitätsquelle studiert, die zu schwach ist, um mit einem gewöhnlichen Condensationselektroskop genügende Anzeigen zu geben, so muss man zu einem Vorgange zurückgreifen, welcher der doppelten Condensation von Gaugain analog ist und sorgfältig es vermeiden, die Contacte zwischen den isolierenden Substanzen zu vervielfachen.

386. Elektroskop von Behrens. Alle früher beschriebenen Elektroskope geben nur discontinuierliche Anzeigen, d. h. um die Natur der Elektricität, welche sich auf einem Körper vorfindet, zu bestimmen, muss man immer zwei Versuche machen: man ladet z. B. zuerst das Instrument mit bekannter Elektricität und nähert dann dem ersteren jenen Körper, den man auf seinen elektrischen Zustand bestimmen will. Es wäre nützlich, wenn die Elektricitätsmenge des Elektroskopes unbegrenzt lang erhalten werden könnte und dies hat Behrens(1) durch die Anwendung der trockenen Säulen erreicht.

387. Eine trockene Säule ist eine Volta'sche Säule, die aus Körpern gebildet ist, welche hinlänglich wenig Feuchtigkeit enthalten und zwischen welchen die chemischen Wirkungen so schwach sind, dass der Apparat eine sehr lange Zeit hindurch einen unveränderlichen elektrischen Zustand behalten kann. Die ersten trockenen Säulen wurden von Hachette und Desormes construiert und bestanden aus einer sehr großen Zahl von Scheiben, die aus einer Kupferplatte und

(1) Gilbert, Ann. der Physik, t. XXIII, p. 25.

einer Zinkplatte gebildet waren, welche Blätter mit Stärkekleister vereinigt und immer in derselben Reihenfolge aufeinander gelegt waren. Die trockene Säule von Zamboni([1]) besteht einfacher aus Papier, das auf der einen Seite mit einem Stanniolblatte überkleidet war und auf der anderen Seite eine dünne Schichte von pulverisiertem Manganhyperoxyd trug. Man schneidet aus diesem Papier eine große Anzahl runder Scheibchen, welche man immer in derselben Ordnung aufeinanderlegt, derart z. B., dass das Stanniol jeder Scheibe die obere Seite bildete. Man legt auf die beiden Enden dieser Säule Metallplatten, welche man miteinander durch Seidenfäden verbindet und man bedeckt die ganze Oberfläche mit Ausnahme der Endleiter mit einer dicken Schichte Schwefel oder Schellack.

Ohne für den Augenblick auf die Theorie dieses Instrumentes näher einzugehen, können wir seine Eigenschaften feststellen. Wenn die Säule einige Zeit hindurch isoliert ist, so sind die beiden Endleiter, oder die beiden Pole mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen, der eine positiv, der andere negativ, und zwar in gleichen Mengen; diese Elektricität erzeugt sich immer von neuem mehr oder weniger langsam, wenn man die Pole entladet, indem man sie mit dem Erdboden in leitende Verbindung setzt. Allgemeiner, die Säule stellt eine bestimmte Potentialdifferenz zwischen zwei Leitern her, mit denen die Pole einzeln verbunden sind. Wenn der eine von diesen Leitern auf das Potential Null durch Verbindung mit dem Erdboden gebracht ist, nimmt der andere Conductor ein dem absoluten Werte nach doppelt so großes Potential an, so dass die Potentialdifferenz sich nicht geändert hat. Diese Potentialdifferenz ist außerdem der Anzahl der Elemente proportional, welche die Säule zusammensetzen und unabhängig von ihrer Dicke. Da jedes Element der Säule nur einen schwachen Effect hervorruft, so muss man ihrer eine große Anzahl nehmen: die trockenen Säulen, welche man gewöhnlich construiert, umfassen 500 oder 1000 Elemente, die aus so dünnen runden Scheibchen gebildet sind, dass die

([1]) Annales de Chimie et de Physique, 2. serie, t. XI., p. 190.

gesammte Länge der Säule nicht 10 oder 20 Centimeter überschreitet.

Man begreift den Vortheil, welchen man aus diesen Säulen ziehen kann, um eine ungeachtet der Elektricitätszerstreuung durch die Luft constante elektrische Ladung zu erhalten, wenn man nur nicht schneller Elektricität verbraucht, als sich wieder erzeugen kann. Man construiert z. B. Apparate mit continuierlicher Rotation oder mit Pendelschwingungen, welche dem elektrischen Rädchen oder dem elektrischen Glockenspiele ähnlich sind, deren Bewegung durch die Elektricität einer trockenen Säule erhalten wird. Delezenne hatte in der Weise einen Rotationsapparat construiert, der 28 Jahre ohne jede Unterbrechung im Gange war. Das physikalische Cabinet des „Collège de France" besitzt eine trockene Säule, welche das Datum von 1827 trägt und welche noch im Jahre 1875, d. h. am Ende von 48 Jahren, energische Effecte gab. Gleichwohl erschöpfen sich die trockenen Säulen allmählig, sei es wegen des Feuchtigkeitsverlustes, der langsam eintritt, sei es überhaupt wegen der chemischen Reactionen, welche immer die Hervorrufung der Elektricität begleiten und welche den Zustand der im Contacte befindlichen Substanzen modificieren. Was aber noch schwerer ins Gewicht fällt, die Energie der Säule erfährt auch unregelmäßige Veränderungen, sie vergrößert sich bei Temperaturserhöhung und wird durch Temperaturserniedrigung geringer; dieser Umstand verhindert, dass man die Säule in Messversuchen verwendet, bereitet aber keinerlei Unzukömmlichkeiten, wenn es sich um qualitative Versuche handelt.

388. Das Elektroskop von Bohnenberger(¹), welches nur eine Modification des Apparates von Behrens ist, besteht aus zwei trockenen Säulen P und P' (Fig. 160), deren entgegengesetzt bezeichnete Pole an ihrer unteren Seite mittelst eines Metallstreifens verbunden sind, welcher durch den Fuß des Instrumentes mit dem Erdboden in permanenter Weise in leitender Verbindung ist. Diese beiden Säulen gehen an ihren oberen Enden in zwei Kugeln *a* und *b* aus, welche ebenfalls

(¹) Annales de Chimie et de Physique, 2. serie, t. XVI., p. 91.

entgegengesetzt bezeichnete Pole sind; sie verhalten sich daher wie eine einzige Säule, deren Mitte auf das Potential Null gebracht ist und deren Enden demzufolge gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Potentiale haben werden und mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen sind. Zwischen diesen beiden Kugeln befindet sich ein einziges Goldblättchen *f* an einem Leiter D aufgehängt, der in die Tubulatur einer Glasglocke C, wie bei den gewöhnlichen Elektroskopen, eingekittet ist. Wenn dieses Goldblättchen im neutralen Zustande sich befindet und in gleicher Entfernung von den Polen der Säule ist, so wird es im Gleichgewichte bleiben; dieses Gleichgewicht würde aber nicht stabil sein, wenn das Gewicht des Blättchens nicht dazu beitragen würde, es in der Verticalen zu erhalten.

Wenn man dem oberen Knopfe D einen irgendwie elektrisierten Körper nähert, so wird das Goldblättchen durch Influenz ebenso elektrisch und weicht augenblicklich von der verticalen Richtung ab, weil es von dem einen der beiden Pole *a* oder *b* angezogen, von dem anderen abgestoßen wird. Es genügt daher ein- für allemale die Richtung markiert zu haben, in welcher das Blättchen sich bewegt, um unmittelbar die Natur der Elektricität zu erkennen, welche sich auf irgendeinem Körper vorfindet.

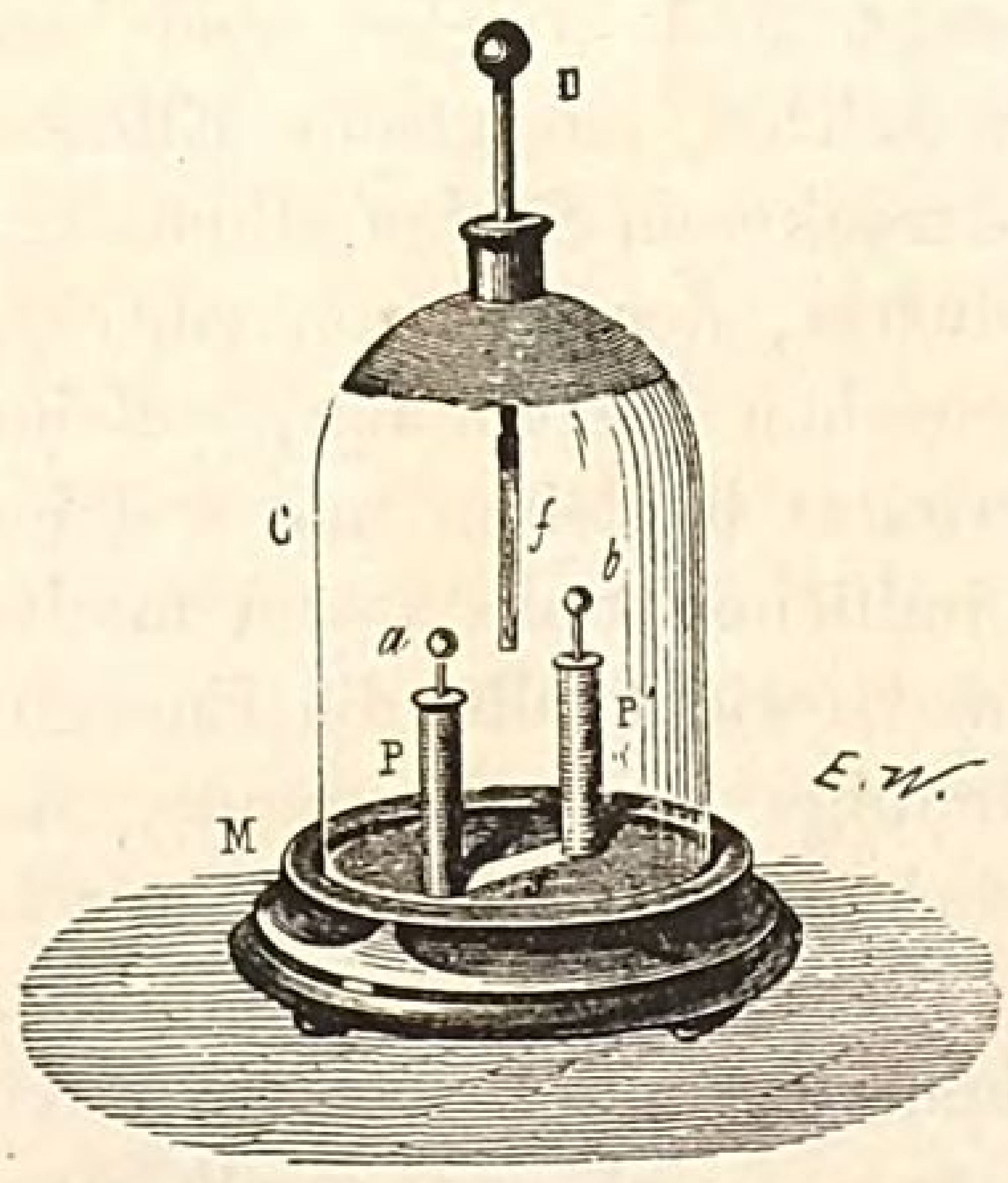


Fig. 160.

Wenn das Blättchen vertical ist, so ist die Wirkung, welche auf dasselbe von jedem der beiden Pole ausgeübt wird, proportional der Ladung des Goldblättchens, der elektrischen Ladung jeder der beiden Kugeln *a* und *b* und um so größer, je kleiner die Entfernung ist.

Man könnte daher die Empfindlichkeit nahezu ohne Grenzen vermehren, wenn man die Anzahl der Elemente der Säule vermehrt, wobei man die Pole in zwei leitende Scheiben übergehen lässt, die vertical und perpendiculär zu jener Ebene sind, in welcher das Goldblättchen sich bewegt und indem

man diese Scheiben mehr und mehr nähert. Es ist überdies gut, wenn die Leiter, in welche die Pole der Säule ausgehen, beweglich sind, so dass man leicht die Empfindlichkeit des Apparates modificieren kann.

Man construiert öfters dieses Elektroskop in einer einfacheren Weise, indem man nur eine einzige Säule anwendet, deren beide Pole mit zwei Conductoren *a* und *b* in Verbindung sind, die zu beiden Seiten des Goldblättchens sich befinden. Diese Anordnung hat den Nachtheil, dass die beiden Pole der Säule nicht immer gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Potentiale besitzen; es kann dann geschehen, dass das Goldblättchen sich in einer gewissen Richtung bewegt, selbst dann, wenn es nicht elektrisch ist oder wenn man es in Verbindung mit dem Erdboden bringt. In diesem Falle muss man dafür Sorge tragen, dass man die Mitte der Säule auf das Potential Null bringt, indem man dieselben mit dem Erdboden permanent durch einen leitenden Draht verbindet.

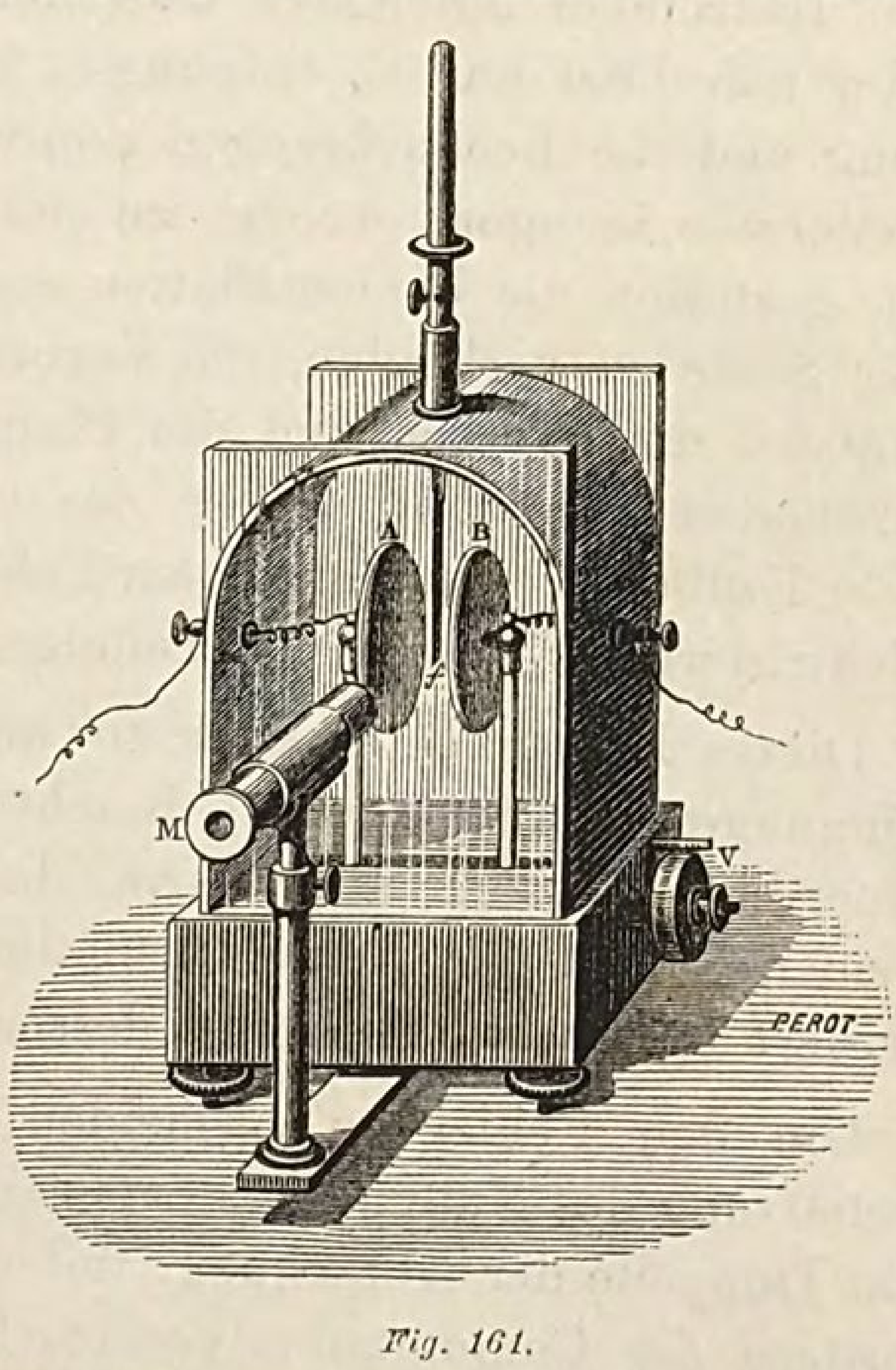


Fig. 161.

389. Goldblatt-Elektrometer von Hankel. Hankel(¹) hat diesen Apparat zu einem sehr feinen Elektrometer gemacht. Das Goldblättchen ist zwischen zwei leitenden verticalen und parallel gestellten Platten A und B aufgehängt (Fig. 161), eine Anordnung, welche bereits Fechner getroffen hatte. Diese beiden Platten werden von isolierenden Stäben getragen und können mittelst Mikrometerschrauben um bekannte Größen einander genähert oder voneinander entfernt werden.

(¹) Pogg. Ann. CIII., p. 209 (1858); auch früher in den Berichten der kgl. sächs. Akad. d. Wissensch., 1850, p. 71.

Die trockene Säule, deren elektrischer Zustand nicht constant ist, ist durch eine Reihe von Volta'schen Elementen ersetzt, die aus Zink- und Kupferplatten gebildet sind, die in gewöhnliches Wasser getaucht sind; anstatt einfach die Richtung festzusetzen, in welcher das Goldblättchen abgelenkt wird, misst man dessen Ablenkung mittelst eines Mikroskopes M, das ein Ocularmikrometer besitzt. Das Gehäuse ist aus einer gekrümmten Metallplatte gebildet, auf deren Rändern zwei Spiegelglas-Platten angefügt sind; um jede störende Wirkung, die von außen herrührt, zu vermeiden, ist das Instrument mit einem Kästchen aus Weißblech überdeckt oder man lässt nur die Öffnungen frei, welche für die Beleuchtung und die Beobachtungen nothwendig sind. Sehr einfache Leiteranordnungen, welche zu beschreiben nicht nothwendig ist, gestatten die beiden Platten einzeln mit den beiden Polen der Säule zu verbinden, die Verbindungen durch einen Commutator umzukehren und die Platten in Verbindung mit dem Erdboden zu setzen, ferner das Goldblättchen entweder mit dem Erdboden oder mit einem Pole der Säule oder mit einem elektrisierten Körper zu verbinden.

Dieses Elektrometer kann so unter sehr verschiedenen Bedingungen in Anwendung gebracht werden, die vortheilhafteste Anordnung besteht aber darin, dass man die Platten mit den beiden Polen der Säule verbindet, das Goldblättchen elektrisiert und dass man dann dessen Ablenkung beobachtet.

Um den Fehler zu vermeiden, welcher einer ungenauen Schätzung des Nullpunktes entspringen würde, beobachtet man das Doppelte der Ablenkung, indem man die Rolle der Platten mittelst des Commutators vertauscht. Es ist nothwendig, dass die Mitte der Säule, welche zum Laden der Platten dient, mit dem Erdboden in leitender Verbindung ist.

Man graduiert das Elektrometer, indem man den Goldblättchen verschiedene Ladungen mittelst des einen Poles einer Hilfssäule ertheilt, dessen anderer Pol nicht isoliert ist. In diesem Falle erkennt man, dass die Ablenkung des Goldblättchens der Anzahl der Elemente der Hilfssäule proportional ist, und zwar bis zu einer gewissen Grenze, von welcher an

die Ablenkungen im rascheren Gange wachsen; diese Grenze hängt von der Form und der Distanz der Platten ab.

Man kann als Hilfssäule entweder kleine Daniell'sche Elemente oder Elemente von Volta nehmen; aber diese erfordern mehr Vorsichtsmaßregeln; man muss Sorge tragen, niemals die Säule zu schließen und auch nicht die Pole mit den Fingern zu berühren. Es ist außerdem vortheilhaft, das Goldblättchen abwechselnd mit den beiden Polen der Säule zu laden und das Mittel aus den Beobachtungen zu nehmen. Da das Potential des Goldblättchens im absoluten Werte der Anzahl der Elemente der Säule proportional ist, so sieht man, dass bis zu einer gewissen Grenze die Ablenkung des Goldblättchens seinem Potentiale proportional ist; das Zeichen dieses Potentiales ist außerdem durch den Sinn der Ablenkung angegeben.

Die Empfindlichkeit des Apparates hängt von der Entfernung und der Elektrisierung der Platten ab. Wenn man die Entfernung der Platten ändert, wobei das Goldblättchen immer in der Mitte sich befindet, so muss man diesen neuen Zustand mit dem vorhergehenden vergleichen. Der Versuch zeigt an, dass die Abweichung des Goldblättchens — unter sonst gleichen Umständen — umgekehrt einer Potenz der Entfernung proportional ist; diese Potenz war 1·56 und 1·72 in zwei verschiedenen Apparaten. Es ist aber einfacher, die Anzahl der Elemente der Hauptsäule zu variieren. In diesem Falle sind die Niveaulinien für eine gegebene Lage des Goldblättchens immer in derselben Weise vertheilt und die Kraft, welche auf das Goldblättchen wirkt, ist dem Potentiale der Säule proportional. Die Ablenkung muss daher der Anzahl der Elemente der Säule proportional sein, was durch die Beobachtung bestätigt wird; wir werden überdies auf diese Rechnung noch zurückkommen. Ein bedeutender Vorzug des Hankel'schen Elektrometers ist die sehr schnelle Einstellung des Goldblättchens in die neue Gleichgewichtslage und es erfolgt dieselbe fast aperiodisch, d. h. ohne Vibrationen. Es wurde auch eine Modification dieses Instrumentes für Messungen der atmosphärischen Elektricität von Hankel ersonnen.

Wage - Elektrometer.

390. Elektrisches Aräometer von Le Roy und d'Arcy. Ellicot[1] schlug im Jahre 1746 vor, die elektrische Kraft eines Körpers in der Weise zu schätzen, dass man ihn auf eine ebene Wagschale wirken lässt und das Gewicht bestimmt, welches, in die andere Wagschale gelegt, der elektrischen Anziehung das Gleichgewicht halten würde.

Le Roy und d'Arcy[2] construierten ein elektrisches Aräometer, in welchem die Abstoßung, welche zwischen zwei Leitern herrscht, durch ein gewisses Gewicht äquilibriert wird. Man begreift in der That, dass, wenn ein leitendes Aräometer in einer elektrisierten Flüssigkeit schwimmt, zwischen der Aräometerspindel und der Flüssigkeit oder dem Gefäße, welches die erstere enthält, eine Abstoßung eintreten wird, welche die Wirkung haben wird, die Spindel zu heben und den Einsenkungspunkt zu verändern. Der Apparat von Le Roy und d'Arcy (Fig. 162) besteht aus einem Glasbehälter, welcher ein wenig Quecksilber als Ballast enthielt und ein cylindrisches Stäbchen T aus Messing von einer Linie im Durchmesser und 12 Zoll Länge trug, welche in ein kleines Scheibchen D von Messing von 14 Linien im Durchmesser übergieng. Dieses Aräometer war in ein leitendes Gefäß gestellt, das mit Wasser gefüllt war und durch einen Deckel, der eine weite Öffnung hatte, geschlossen war. Um zu vermeiden, dass das Aräometer nicht seitlich abgelenkt wurde, hatte man ober der Deckelöffnung vier Silberfäden gespannt, die gekreuzt waren und zwischen denen die Spindel sich befand.

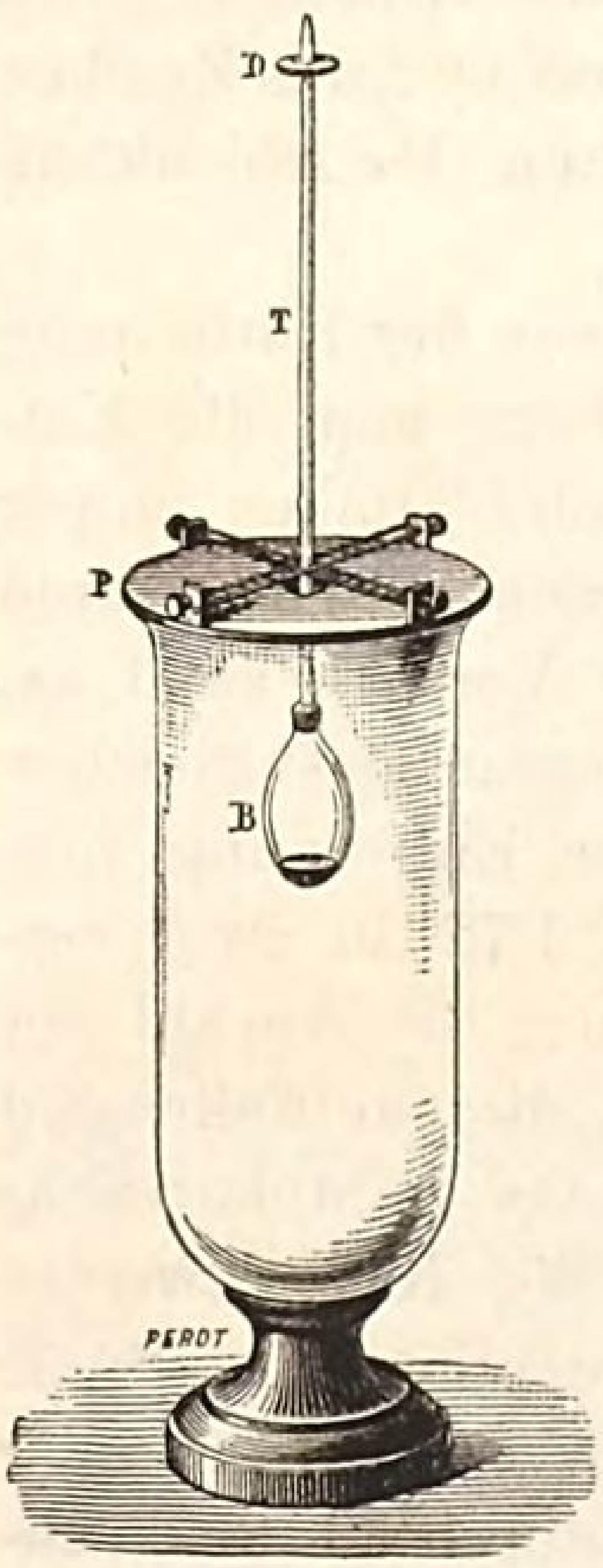


Fig. 162.

(1) Priestley, T. I, p. 250.

(2) Mém. de l'Académie (1749), p. 63.

Das Gefäß war mittelst einer Glassäule getragen; wenn man es in leitende Verbindung mit einer Elektrisiermaschine brachte, so erhob sich die Spindel und man bestimmte die Verrückung, indem man die Scheibe D durch einen Glasstreifen beobachtete, auf welchem Theilungen verzeichnet waren. „Die Elektricität," sagten sie, „verrichtet eine Kraft, wie der Stoß, und sie ist proportional der Verschiebung der Spindel." In Wirklichkeit haben wir es hier mit einem Elektroskope zu thun, welches man auf experimentellem Wege graduieren müsste; um aber daraus einen Messapparat zu machen, würde es genügen, in jedem Versuche das Gewicht zu bestimmen, welches man auf die Platte D legen müsste, um die Einsenkung bis zu jenen Punkt zu veranlassen, bei welchem das Instrument im neutralen Zustande sich befindet. Die Entfernung der beweglichen Spindel von dem auf sie wirkenden Theil ist dann constant, die elektrische Kraft würde dem Producte der Elektricitätsmengen der beiden Körper proportional sein und demzufolge dem Quadrate des Potentiales der Elektricitätsquelle.

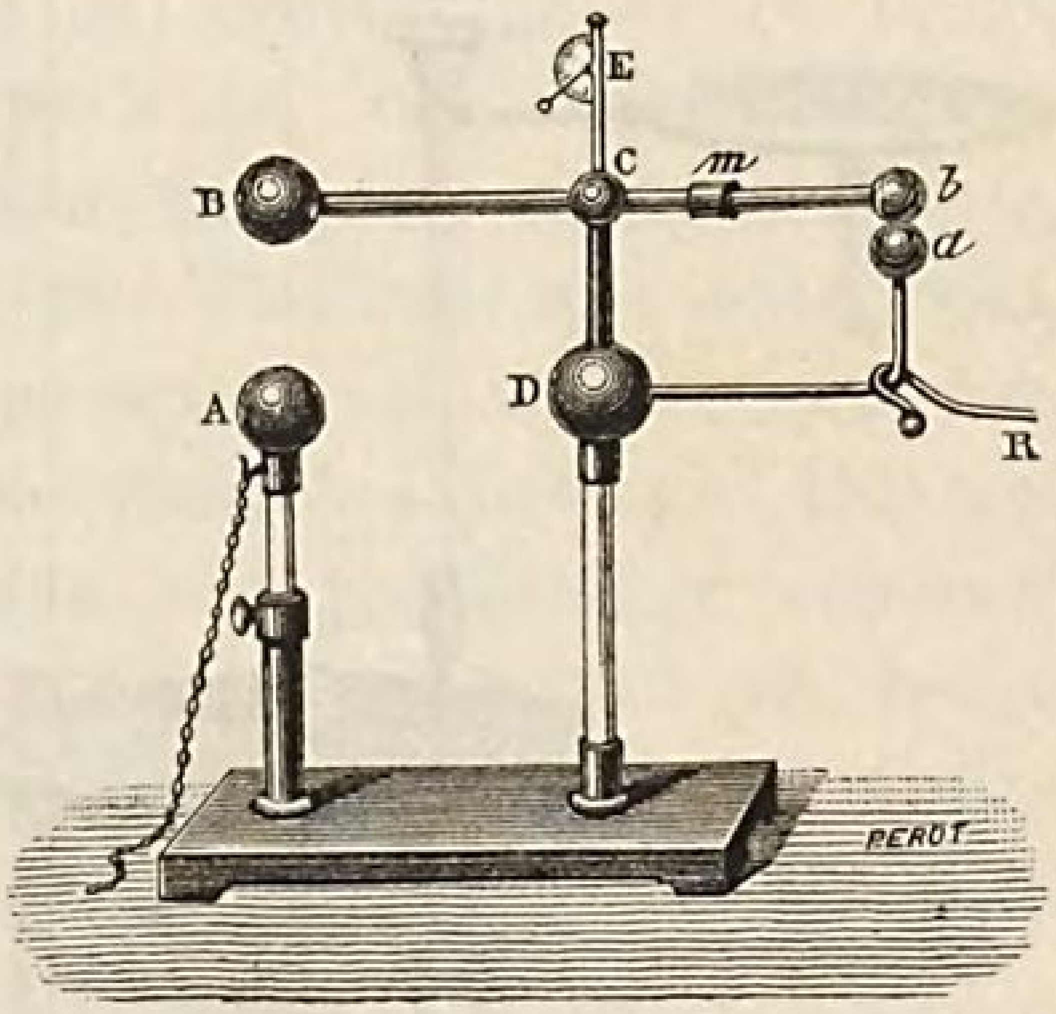


Fig. 163.

391. Entladungsschaukel von Cuthbertson. Dieser Apparat, welcher ebenfalls auf der directen Vergleichung von Gewichten und elektrischen Kräften beruht, lässt die selbständige Entladung eines Conductors zu, wenn das Potential einen bestimmten Wert erreicht hat.

Ein leitender Wagebalken B*b* (Fig. 163) endigt in Metallkugeln und dreht sich um eine Schneide, die im Innern einer leitenden Kugel C sich befindet, welche durch einen Leiter D*a* mit einem elektrisierten Körper verbunden ist; unter der Kugel B ist eine andere Kugel A von Metall, die mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht; schließlich gestattet ein Laufgewicht *m*, auf dem Wagebalken befindlich, einen bestimmten Druck zwischen den beiden Kugeln *a* und *b* hervorzurufen. Wenn der Apparat elektrisiert wird, so entsteht

zwischen den Kugeln *a* und *b* eine Abstoßung, die dem Quadrate des Potentiales proportional ist, und zwischen den Kugeln A und B eine Anziehung, die ebenfalls dem Quadrate des Potentiales proportional ist. Wenn die Resultante dieser beiden Wirkungen genügend groß ist, so schaukelt der Balken und der Apparat entladet sich durch einen Funken, der zwischen den Kugeln A und B überspringt. Wenn man zuerst die Lage des Laufgewichtes bestimmt, für welche der Wagebalken im Gleichgewichte ist, so wird das Quadrat des Potentiales, das nothwendig ist, um eine Entladung hervorzurufen, der Entfernung des Laufgewichtes von dieser Lage proportional sein.

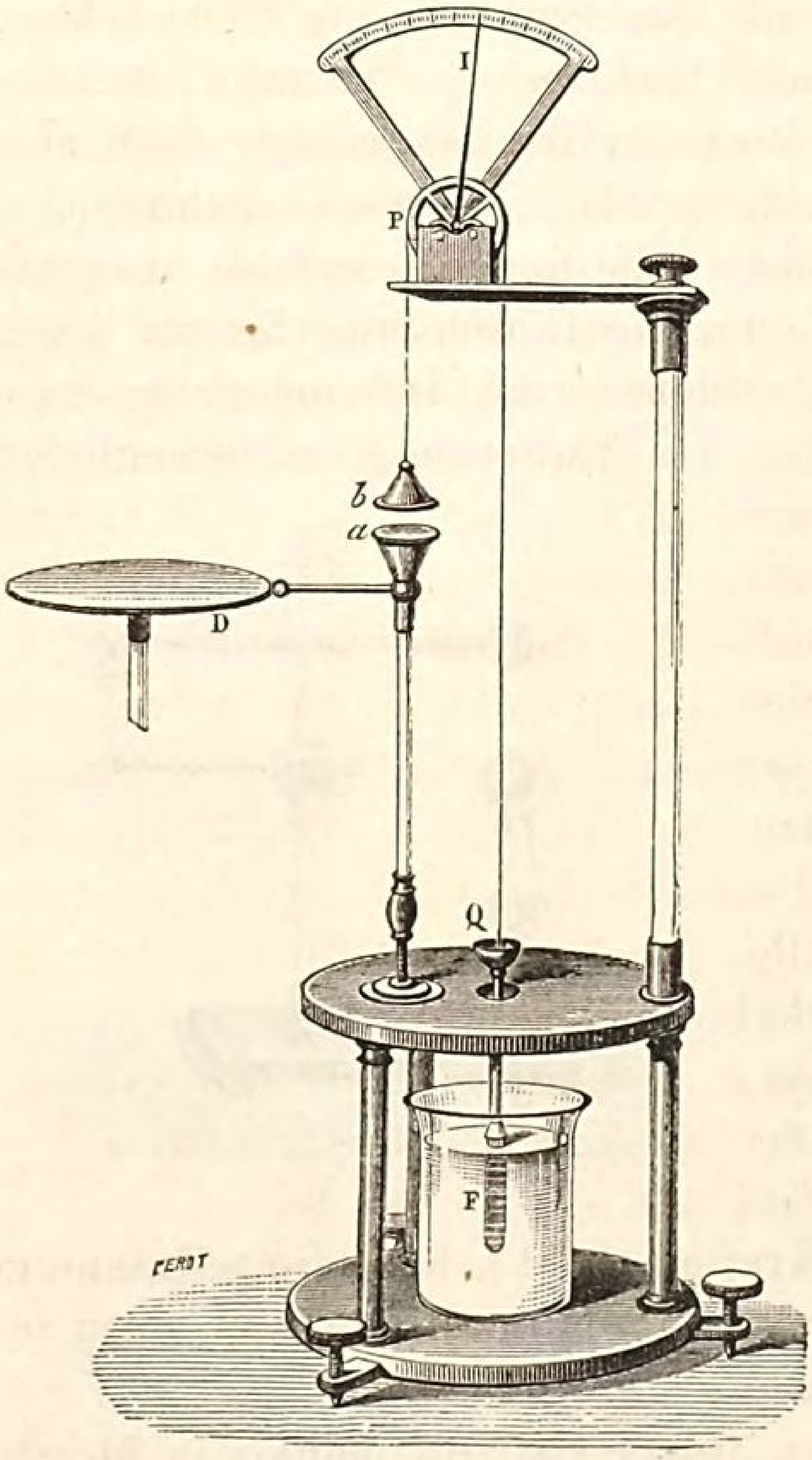


Fig. 164.

392. Elektrische Wagen von Harris. Harris[1] hat bei gewissen Versuchen zwei Apparate angewendet, welche als Modificationen jener betrachtet werden können, die wir angeben werden.

Der eine von ihnen (Fig. 164) besteht aus einer sehr leichten Rolle P, welche mit einer Nadel J versehen ist, die sich vor einem Theilkreise bewegt, und deren Axe auf sich kreuzenden Felgen von kleineren Rollen ruht, wie es bei der Atwood'schen Fallmaschine vorkommt. Auf dem Umfange dieser Rolle befindet sich ein Silberdraht, welcher einen kleinen Holzkegel trägt, der vergoldet ist und in eine horizontale Scheibe ausgeht; unterhalb dieses Kegels befindet sich ein anderer ähn-

(1) Phil. trans. (1834), part. II, p. 215.

licher Conductor *a*, welcher von einem Glasfuße getragen wird und mit einem seitlichen Stäbchen versehen ist, durch welches man ihn elektrisieren kann. Zur anderen Seite der Rolle ist ein Seidenfaden, welcher einen cylindrischen Schwimmer F trägt, der in Wasser taucht und mit einer kleinen Platte Q versehen ist. Der Leiter *b* kann mit dem Erdboden durch den Metalldraht und die Säule, welche die Rolle stützt, in leitende Verbindung gesetzt werden.

Wenn der Apparat im neutralen Zustande sich befindet, so äquilibriert man ihn derart, dass die Nadel J auf den Nullpunkt der Theilung weist, was man erreicht, wenn man passende Gewichte in die Schale Q legt. Elektrisiert man dann den Conductor *a*, z. B. indem man ihn mit einer elektrisierten Scheibe D berührt, so zieht er den anderen Conductor *b* an; das Gleichgewicht ist gestört, aber es bleibt wegen des Schwimmers, der zum Theil aus der Flüssigkeit heraustritt, bestehen. Man legt dann Gewichte in die Schale Q, bis die Nadel auf den Nullpunkt der Theilung abermals weist, und diese Gewichte stellen die Anziehung dar, welche zwischen den Leitern *a* und *b* besteht. Die Anziehung ist proportional dem Quadrate der Ladung, wenn die Entfernung constant bleibt; man kann überdies diese Entfernung modificieren, wenn man den Conductor *a* mittelst einer Schraube hebt oder senkt. Der von Harris construierte Apparat war derart empfindlich, dass er noch $\frac{1}{50}$ Gran (ungefähr 1 Milligramm) anzeigte, wenn die Belastung 500 Gran betrug. Die größte Schwierigkeit, welche dieser Apparat bietet, ist die Änderung der Gestalt, welche die Oberfläche der Flüssigkeit erfahren kann, je nachdem der Schwimmer steigt oder sinkt; dadurch können nämlich beträchtliche Änderungen der Capillaritätskräfte eintreten.

393. In einem anderen Apparate von Harris ist der bewegliche Leiter *d* (Fig. 165) mittelst eines Silberdrahtes auf einem Wagebalken aufgehängt, welcher wieder mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht und am anderen Ende ein Schälchen P trägt. Das letztere kann auf einer fixen Platte V ruhen und die Wage ist im Gleichgewichte derart, dass die beiden Platten P und V in Berührung ohne Druck

sich befinden, wenn die Leiter nicht elektrisiert sind. Man gibt dann ein Übergewicht auf das Schälchen P und elektrisiert den Leiter *a* bis zu dem Momente, in welchem die bewegliche Platte P sich zu heben beginnt; das Übergewicht ist dann gleich der elektrischen Anziehung, welche zwischen den Leitern *d* und *a* herrscht.

394. Wage von Thomson. Die Wagen von Harris können kaum theoretische Graduierungen aufnehmen, weil die sich anziehenden Scheiben zu kleine Dimensionen im Verhältnisse

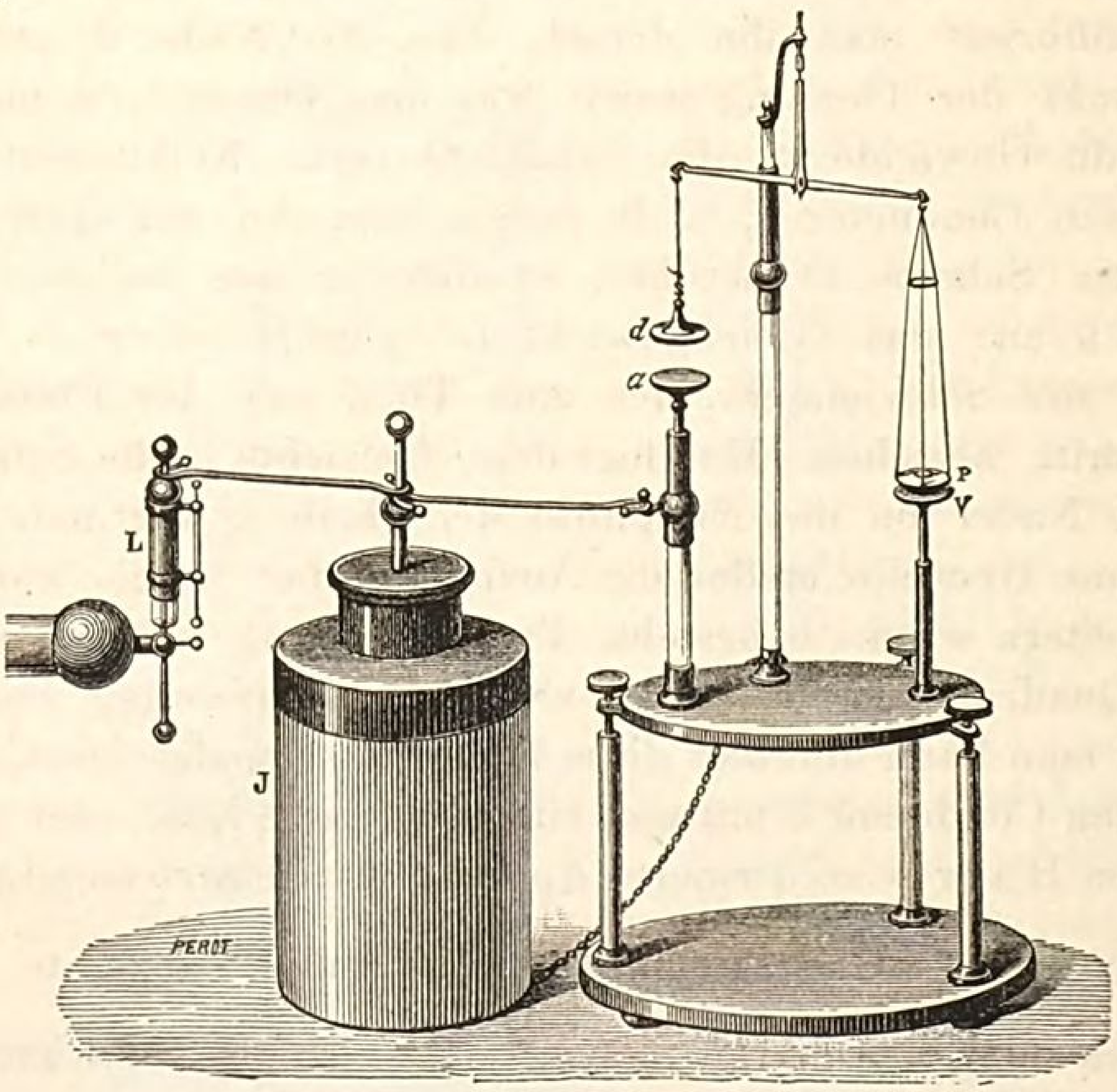


Fig. 165.

zur Entfernung haben, welche sie trennt und weil es sehr schwierig sein würde, die Kraft zu rechnen, welche zwischen ihnen wirksam ist. Thomson hat nach demselben Principe Instrumente construiert, welche die Kräfte und die elektrischen Potentiale in absoluten Einheiten auszudrücken gestatten. Nachdem Thomson auf verschiedene Weise die Anziehung zweier Kugeln, für welche er Tafeln gerechnet hatte, experimentell studiert hatte, kam er auf die Anwendung sehr großer paralleler Platten zurück, welche Anordnung bereits schon

von Volta [1] benützt worden war und welche die Kräfte in einer sehr einfachen Weise zu rechnen erlaubt.

Denn, wenn zwei parallele leitende Platten im Verhältnisse zu der sie trennenden Entfernung genügend groß sind, so dass die Vertheilung der Elektricität ebenso ist, als ob sie unbegrenzt wären, so werden die einander gegenüberstehenden Oberflächen dieser Platten gleiche und entgegengesetzte Elektricitätsmengen besitzen und die Dichte μ wird constant sein wenigstens in allen jenen Punkten, welche den Rändern der Platten nicht sehr nahe sein werden. Sei D die Entfernung der Platten und V die Differenz ihrer Potentiale, so ist die Dichte μ gegeben durch die Gleichung:

$$4\pi\mu = \frac{V}{D}.$$

Andererseits ist die Wirkung, welche auf die Flächeneinheit der einen Platte ausgeübt wird, $2\pi\mu^2$ und wenn man S die Größe dieser ebenen Platte nennt, so ist die gesammte Wirkung $2\pi\mu^2 S$. Bezeichnet man diese Kraft mit F, so hat man daher, wenn man die vorhergehende Gleichung in Rücksicht zieht,

$$F = 2\pi\mu^2 S = 2\pi S \frac{V^2}{16\pi^2 D^2} = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V}{D}\right)^2.$$

Wenn man diese Kraft auf experimentellem Wege bestimmt, so wird man daraus den absoluten Wert der Potentialdifferenz erhalten und zwar als Function bekannter Größen: man hat nämlich

$$V = D\sqrt{\frac{8\pi F}{S}}.$$

Man hat nur bei dieser Rechnung die Wirkung vernachlässigt, welche auf die äußere Seite der beweglichen Platte sich äußert, aber diese Kraft ist im allgemeinen zu vernachlässigen, weil die Dichte auf dieser Außenseite im Verhältnisse zu jener, welche auf der anderen Seite herrscht, sehr klein ist.

[1] Collezione dell' opere, T. I., part. II., p. 67.

395. Das Instrument, dessen sich zuerst Thomson bediente, bestand aus zwei horizontalen Metallplatten, von denen die eine fix und isoliert, die andere von einem etwas kleineren Durchmesser, mittelst eines Metallstäbchens am Ende eines Wagebalkens befestigt war. Diese beiden Platten waren in ein metallisches Gehäuse eingeschlossen, um sowohl die Luftströmungen zu vermeiden als auch die elektrische Wirkung aller äußeren Körper zu verhindern. Das nicht isolierte Gehäuse stand mit der oberen Platte mittelst eines Metalldrahtes in leitender Verbindung, welcher so biegsam war, dass er den Oscillationen der Wage nicht hinderlich wurde; es enthielt ferner das Gehäuse seitlich eine Öffnung, durch welche ein Metallstäbchen gieng, das in leitender Verbindung mit der unteren Platte war.

Das Stäbchen, an welchem die bewegliche Platte befestigt war, trug eine Theilung in Hundertsteln eines Zolles (0·254 *mm*) und wenn man mittelst einer Loupe auf diese Theilung sah, konnte man eine Verrückung von $\frac{1}{40}$ *mm* schätzen. Da die Anziehung der beiden Platten ein unstabiles Gleichgewicht hervorzurufen strebt, war es nothwendig, die Oscillationen des Wagebalkens durch zwei Hemmungen zu beschränken, welche nur eine sehr kleine Verschiebung zuließen.

Wenn die Wage im Gleichgewichte war und die Platten sich im neutralen Zustande befanden, erzeugte man zwischen ihnen eine Potentialdifferenz und man bestimmte die Gewichte, welche nöthig waren, um die Wage entgegen der elektrischen Anziehung in ihre ursprüngliche Lage zu bringen. Thomson fand so z. B., dass die in der Entfernung von 2·54 *mm* zwischen den Platten durch eine Potentialdifferenz, welche jener von 1000 Daniell'schen Elementen äquivalent ist, hervorgerufene Anziehung 0·965 Gramm betrug. Der Durchmesser der beweglichen Platte betrug 14·88 *cm*, die Oberfläche war 174 Quadratcentimeter, woraus man für den Quadratdecimeter eine Anziehung von 0·554 Gramm erhält. Da schließlich die Wirkung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung der Platten ist, so kann man daraus schließen, dass, wenn die beiden Pole einer Daniell'schen Säule einzeln mit den beiden Platten, die

parallel voneinander um 1 Millimeter abstehen, in Verbindung stehen, die Anziehung der Platten 3·57 Gramm per Quadratdecimeter sein wird. Anderweitige Experimente, welche von Thomson unter besseren Bedingungen gemacht wurden, haben diese Zahl zu 5·70 Gramm ergeben.

396. In aller Strenge sind die vorausgehenden Betrachtungen nicht genau, außer für Platten, welche bezüglich ihrer Entfernung unendlich groß sind, was nicht verwirklicht werden kann, andererseits wird die Messung der Entfernung der Platten sehr schwierig, wenn sie sehr nahe sind. Thomson vermeidet diese letztgenannte Schwierigkeit, indem er nicht die Entfernung selbst misst, sondern die Änderung, welche diese erfährt durch eine anziehende Kraft, sobald die Potentialdifferenz geändert wird.

Für einen ersten Zustand des Apparates wird man haben:

$$V = D \sqrt{\frac{8\pi F}{S}}.$$

Für eine andere Entfernung D′ der Platten wird die Differenz der Potentiale, welche derselben Anziehung F entspricht, sein:

$$V' = D' \sqrt{\frac{8\pi F}{S}},$$

woraus man erhält:

$$V' - V = (D' - D) \sqrt{\frac{8\pi F}{S}}.$$

Die Variation der Potentialdifferenz ist proportional der Änderung der Entfernung der Platten, welche leicht zu messen ist.

397. Absolute Elektrometer von Thomson. Die größte Vervollkommnung aber, welche der Construction dieser Instrumente zutheil wurde, besteht darin, dass man nur die mittlere Partie der einen Platte beweglich macht(1). Das absolute Elektrometer wird daher im wesentlichen aus zwei leitenden parallelen Platten A und B (Fig. 166) bestehen. Die untere Platte A wird von isolierenden Stützen getragen; man kann sie mittelst einer Mikrometerschraube um eine bekannte

(1) Reprint of papers, p. 283.

Größe heben oder senken. Die obere Platte ist in ihrer Mitte durchbohrt und zwar kreisförmig; in diese Öffnung passt ohne Reibung eine bewegliche Scheibe C; dieselbe wird bei jedem Versuche genau in die Ebene des fixen Ringes, der sie umgibt und mit dem sie constant in leitender Verbindung ist, gebracht, so dass man auf diese Weise eine continuierliche leitende Ebene bildet. Derart wird die Elektricitätsvertheilung auf der beweglichen Scheibe genau dieselbe sein, als ob sie in Wirklichkeit einer sehr ausgedehnten Platte angehören würde und die elektrische Dichte wird auf ihrer ganzen Oberfläche constant sein. Der äußere Ring B hat daher den Zweck, eine constante Dichte in allen Punkten der Scheibe zu erhalten und wegen dieser seiner Function hat ihn Thomson „Schutzplatte" (guard-plate) genannt. Die fixe Platte A und die Scheibe C werden einzeln in leitende Verbindung mit zwei Körpern gebracht, deren Potentiale V_1 und V_2 sind; man wird die Kraft F dann bestimmen, welche auf die Scheibe in einer bestimmten Entfernung D wirkt und die vorigen Formeln in Anwendung bringen. Es ist nur wichtig, dass die Entfernung der Scheibe von dem Schutzringe sehr klein sei; was die Entfernung der beiden Platten A und B anbelangt, so kann sie gleich oder sogar größer als der Durchmesser der Scheibe sein, ohne dass unsere Betrachtungen aufhören würden anwendbar zu sein.

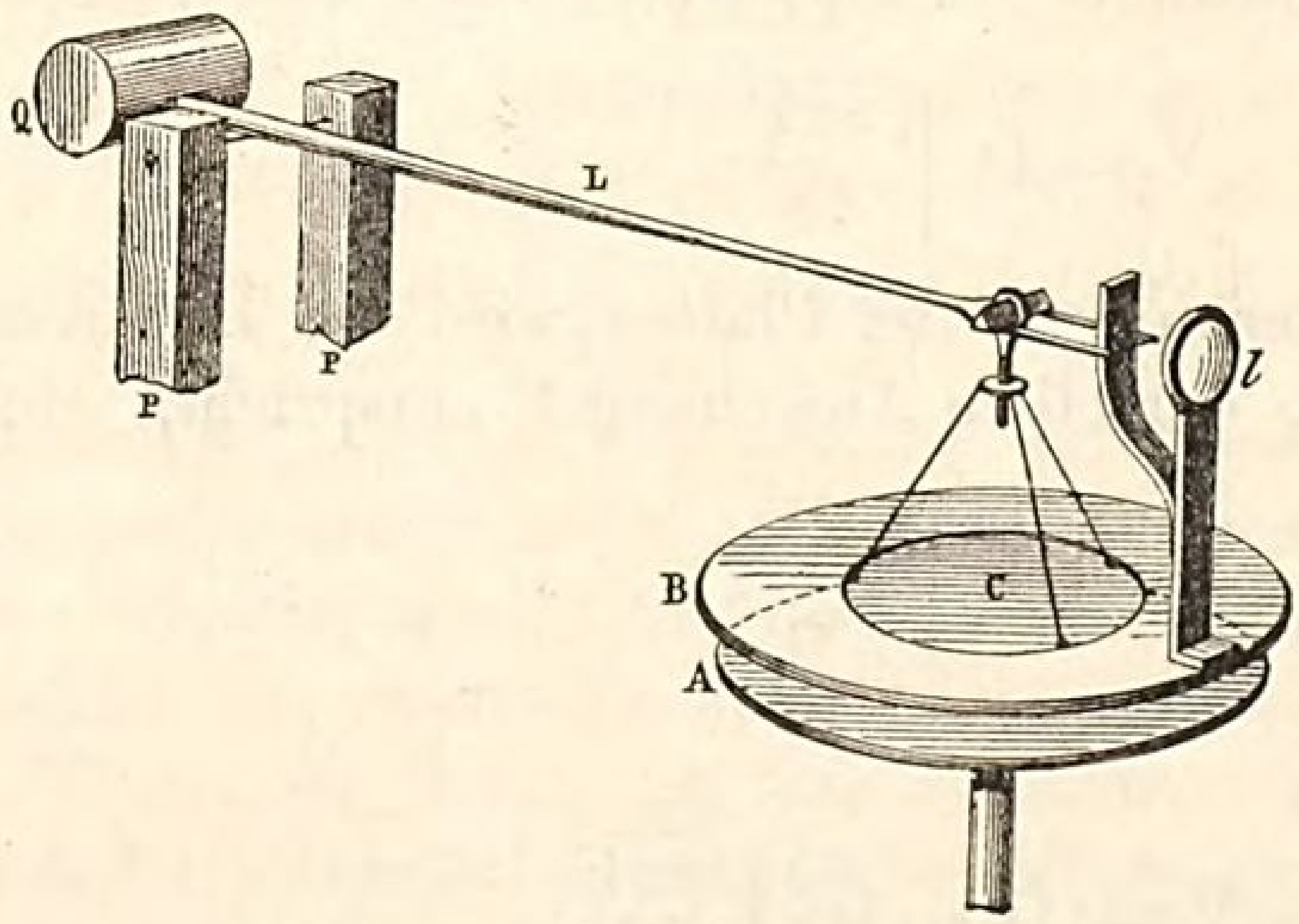


Fig. 166.

398. Man kann diese Kraft durch sehr verschiedene Operationen ihrem Werte nach bestimmen. In der Fig. 166 z. B. ist die Scheibe mittelst Metalldrähten an einem Metallhebel L aufgehängt, welcher durch ein Gegengewicht Q äquilibriert wird und sich um einen Metalldraht dreht, der zwischen zwei leitenden Stützen gespannt ist, die ihrerseits selbst mit der

Schutzplatte verbunden sind. Der Hebel endigt in eine Gabel, welche ein horizontal gespanntes Haar trägt. Die Gabel lässt ein fixes Stäbchen durchgehen, auf welchem zwei schwarze Stellen markirt sind, welche man mit einer kleinen Loupe *l* beobachtet. Der Apparat ist so geregelt, dass das Haar genau zwischen die beiden Merkzeichen zu liegen kommt, wenn die Scheibe und die Schutzplatte eine und dieselbe Ebene bilden.

Um sich dieses Apparates zu bedienen, bringt man auf die Scheibe ein Gewicht *p* und stellt mittelst eines Reiters, der auf den Hebel L gesetzt wird, Gleichgewicht her, wobei die beiden Platten A und B miteinander in Verbindung stehen; die elektrische Kraft ist dann Null. Um die Differenz der Potentiale V_1 und V_2 zweier verschiedenen Körper zu bestimmen, kann man diese beiden Körper in leitende Verbindung resp. mit den beiden Platten bringen; es ist aber besser, anders zu operieren, um nicht absolute Entfernungen bestimmen zu müssen. Die fixe Platte z. B. wird auf ein constantes Potential V gebracht, was entweder durch eine Leydnerflasche, oder durch den einen Pol einer Säule, deren anderer Pol mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht, geschehen kann. Man entfernt nun das Zulegegewicht *p*, verbindet die Schutzplatte mit dem Körper, dessen Potential V_1 ist, und verschiebt mittelst der Mikrometerschraube die Platte A, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt ist. Ist die Entfernung der Platten dann gleich D, so hat man:

$$V - V_1 = D \sqrt{\frac{8\pi p}{s}},$$

wobei *s* die Oberfläche der beweglichen Scheibe bedeutet. Man bringt dann die Schutzplatte in leitende Verbindung mit dem zweiten Körper und man stellt von neuem das Gleichgewicht her, woraus man erhält:

$$V - V_2 = D' \sqrt{\frac{8\pi p}{s}}.$$

Man erhält nun hieraus:

$$V_1 - V_2 = (D' - D) \sqrt{\frac{8\pi p}{s}}$$

und diese Formel enthält nur die Verstellung D′—D der Platte, welche direct durch die Mikrometerschraube gegeben wird.

Es ist klar, dass der Apparat den Luftströmungen nicht ausgesetzt sein darf und in eine wohl getrocknete Atmosphäre gestellt werden muss, um Elektricitätszerstreuungen zu vermeiden; wir wollten aber an dieser Stelle nur zuerst das Princip des absoluten Elektrometers von Thomson darstellen.

Bezeichnet man allgemein die Potentialdifferenz der beweglichen und der festen Scheibe v, so ist — wie wir sahen —

$$v = \mathrm{D}\sqrt{\frac{8\pi p}{s}}.$$

Wenn die aufgehängte Scheibe ein Kreis vom Radius r ist und der Radius der Öffnung des Schutzringes den Wert r' besitzt, so ist nach Rechnungen, welche von Maxwell[1] angestellt wurden, für s zu setzen:

$$s = \frac{1}{2}\pi(r^2 + r'^2)$$

und dementsprechend wird dann:

$$v = 4\mathrm{D}\sqrt{\frac{p}{(r^2 + r'^2)}}.$$

Es hat an der erwähnten Stelle seines Lehrbuches der Elektricität Maxwell gezeigt, dass, wenn obige Bezeichnungen beibehalten werden, die auf der beweglichen Scheibe befindliche Elektricitätsmenge dargestellt wird durch:

$$\mathrm{Q} = v\left[\frac{r^2 + r'^2}{8\mathrm{D}} - \frac{r'^2 - r^2}{8\mathrm{D}}\,\frac{\alpha}{\mathrm{D} + \alpha}\right],$$

wenn abkürzungshalber:

$$\alpha = (r' - r)\cdot\frac{1}{\pi}\log_e 2$$

oder

$$\alpha = 0{\cdot}220635\ (r' - r)$$

gesetzt wurde.

[1] Maxwell, Treatise on electricity and Magnetism; Art. 201.

Es ist von Maxwell[1] auch der Fall einer strengen Rechnung unterzogen worden, in welchem die Oberfläche des Schutzringes mit der beweglichen Scheibe nicht in einer und derselben Ebene liegt, sondern zwischen der festen Scheibe und dem Schutzringe die Entfernung $D' > D$ herrscht.

In diesem Falle hat man noch jene Elektricitätsmenge in Rechnung zu ziehen, welche sich am Rande der Scheibe befindet und es wird die gesammte Ladung ausgedrückt durch:

$$Q = v\left[\frac{r^2 + r'^2}{8D} - \frac{r'^2 - r^2}{8D}\,\frac{\alpha}{D + \alpha} + \frac{r + r'}{D}(D' - D)\log_e \frac{4\pi(r + r')}{D' - D}\right].$$

Daraus folgt, dass wir in dem für die Anziehung der beweglichen Scheibe aufgestellten Ausdrucke:

$$v = D\sqrt{\frac{8\pi p}{s}}$$

für s zu setzen haben:

$$s = \frac{1}{2}\pi\left[r^2 + r'^2 - (r'^2 - r^2)\frac{\alpha}{D + \alpha} + \right.$$
$$\left. + 8(r + r')(D' - D)\log_e \frac{4\pi(r + r')}{D' - D}\right].$$

Ist die Größe α gegen D sehr klein, so kann man das zweite Glied vernachlässigen; wenn aber $D' - D$ eine kleine Größe ist, so ist die Außerachtlassung des letzten Gliedes gestattet.

399. Thomson hat diesen Instrumenten sehr verschiedene Formen gegeben. In dem vollständigsten Apparate[2], dem neuen absoluten Elektrometer (Fig. 167), finden wir drei neue Zugaben, welche den Zweck haben, die verschiedenen Beobachtungen direct untereinander vergleichbar zu machen; es sind dies: 1. eine Leydnerflasche, mittelst welcher man das Hilfspotential V erhält; 2. ein Erneuerer der Ladung (replenisher) oder Elektricitätsauffüller, welcher den Zweck hat, Elektricität zur Flasche zufügen oder von ihr zu entfernen, so dass man das Potential der Flasche auf einem constanten

(1) Maxwell, l. c. art. 205.

(2) Reprint of papers, pg. 287.

Werte erhält; 3. ein P r o b e m a ß (i d i o s t a t i c g a u g e), welches zu erkennen gestattet, ob dieses Potential den passenden Wert erreicht hat.

Alle diese Stücke befinden sich in einem Cylinder aus weißem Flintglas, welcher oben und unten mittelst Metallplatten geschlossen ist. Die beiden Oberflächen dieses Cylinders sind in der Höhe der einander anziehenden Platten mit zwei angeklebten Stanniolstreifen bedeckt: der eine befindet sich innerhalb und ist mit der Schutzplatte B in leitender Verbindung, der andere außerhalb befindliche ist mit dem Erdboden verbunden. Diese beiden Streifen bilden die Belegungen einer Art Leydnerflasche; sie besitzen überdies Öffnungen, welche dem Lichte einen Durchgang gestatten und erlauben die inneren Stücke zu beobachten. Die Schutzplatte trägt ein Metallstäbchen, das in eine Scheibe F ausgeht, welche auf das idiostatische Probemaß J wirkt.

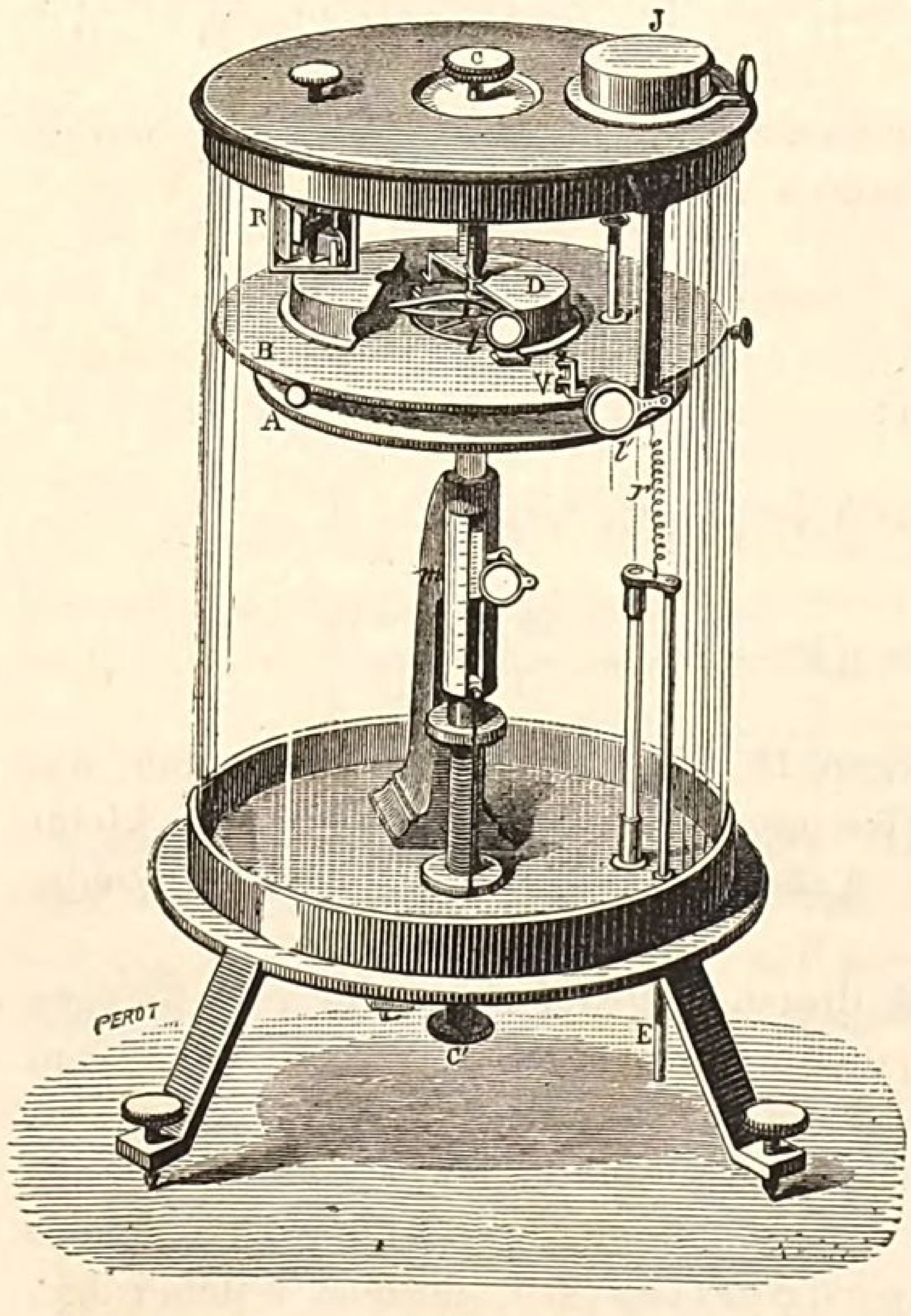


Fig. 167.

400. D a s i d i o s t a t i s c h e P r o b e m a ß, a u c h P r ü f e l e k t r o m e t e r o d e r L a d u n g s m e s s e r g e n a n n t (F i g. 168), besteht aus einer kleinen quadratischen Aluminiumplatte p, die in einer entsprechenden Höhlung einer leitenden Platte beweglich ist. Dieses Aluminiumplättchen ist mit einem langen Stäbchen h versehen, das an seinem Ende ein horizontales Haar trägt; ersteres dreht sich um einen kleinen horizontalen Platindraht

f, welcher an seinen beiden Enden auf der Platte festgemacht ist und das Stäbchen an zwei kleinen Löchern durchsetzt, zwischen welchen sich ein Bügel befindet; durch diese Anordnung strebt die Spannung des Drahtes die Platte in eine bestimmte Lage zu bringen. Sobald die untere Scheibe F, welche mit der inneren Belegung der Leydnerflasche in leitender Verbindung ist, elektrisiert wird, zieht sie die Aluminiumplatte an und es muss, damit das Potential dieser Belegung in den verschiedenen Versuchen dasselbe sei, die auf die Platte ausgeübte Anziehung das Haar zwischen zwei Merkzeichen bringen, was man mit einer Loupe *l* beobachtet. Ist das Potential zu groß oder zu klein, so zeigt das Haar nicht auf die Merkzeichen und man bringt es auf dieselben, wenn man die Elektricitätsmenge mittelst des Elektricitätserneuerers (replenisher) ändert. Es sind überdies noch zwei kleine Schneiden vorhanden, welche verhindern, dass das Probemaß zu große Verrückungen vornimmt, so dass das Haar nicht aus dem Gesichtsfelde der Loupe kommt.

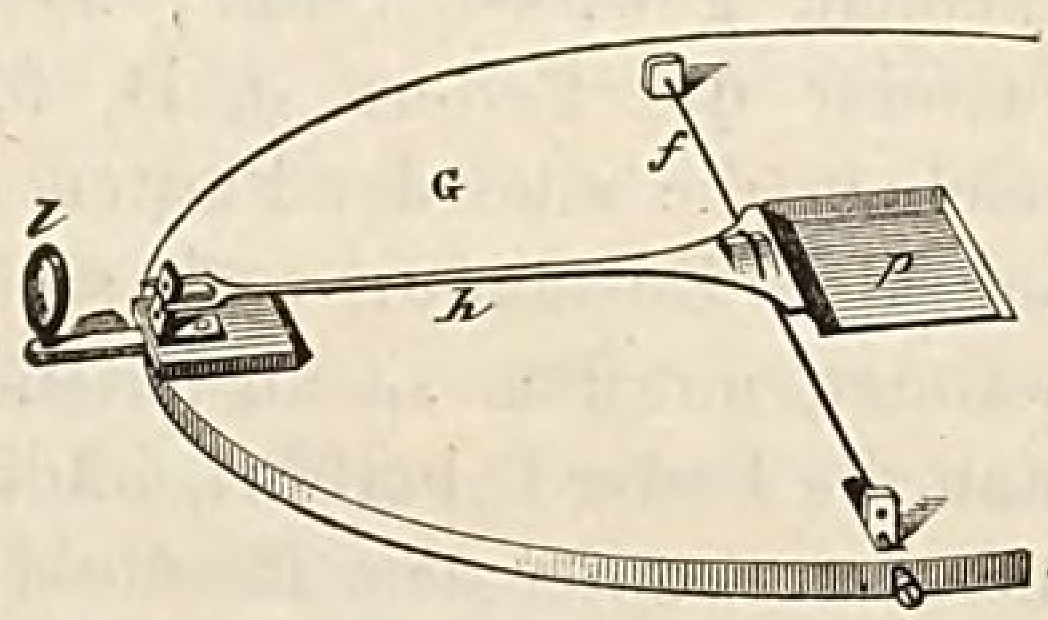


Fig. 168.

401. Der Replenisher oder Elektricitätserneuerer besteht aus zwei gekrümmten Leitern A und B (Fig. 169), die aus den beiden Theilen eines und desselben Cylinders gebildet wurden; beide sind an der Hohlseite mit federnden Lamellen *a* und *b* versehen und stehen, der eine mit der inneren, der andere mit der äußeren Belegung der Leydnerflasche, d. h. mit der Erde in leitender Verbindung. Zwischen diesen beiden Belegungen sind zwei andere Federn C und D, die durch einen Metalldraht verbunden sind. Schließlich sind zwei Metallplatten P und Q mittelst eines horizontalen Stückes aus Hartkautschuk

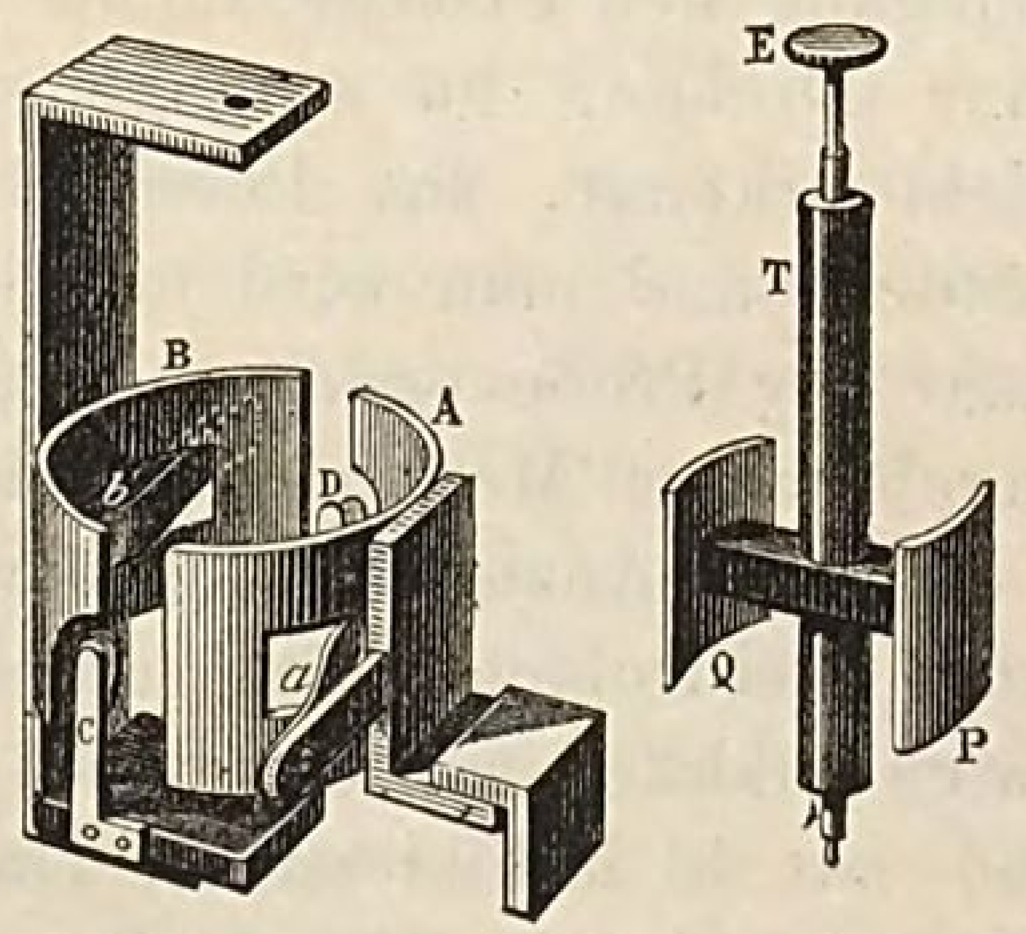


Fig. 169.

(Ebonit) an einem verticalen, ebenfalls aus Ebonit gebildeten Stabe T befestigt, der in der Axe der Leiter A und B sich befindet und in dem einen oder anderen Sinne mittelst eines äußeren Knopfes E in Bewegung versetzt werden kann. Die Wirkungsweise dieses sinnreichen Apparates ist sehr einfach.

Nehmen wir an, der Leiter A, welcher mit der inneren Belegung der Leydnerflasche in Verbindung ist, sei mit positiver Elektricität geladen und man drehe die Platten P und Q in einem gewissen Sinne, so dass die eine von ihnen nacheinander die Federn *a*, D, *b*, C berührt; im Momente, in welchem die eine der Platten die Feder *a* verlässt, ist sie im neutralen Zustande, weil sie sich im Innern eines Leiters befindet, mit dem sie in leitender Verbindung steht; wenn sie dann die Feder D berührt, bildet sie einen Theil des Leiters CD und nimmt unter dem Einflusse von A negative Elektricität an, welche sie vermittelst der Feder *b* dem Leiter B, d. h. dem Erdboden übergibt; dann nimmt sie bei der Berührung mit der Feder C positive Elektricität an, welche sie mittelst der Feder *a* dem Leiter A überbringt, dessen Ladung somit vermehrt wird. Sie verlässt von neuem diese Feder im neutralen Zustande und bringt hierauf nach einer vollständigen Umdrehung eine neue Menge positiver Elektricität dem Leiter A u. s. w. Dieser Vorgang hat daher den Effect, die elektrische Ladung oder das Potential des Leiters A und der inneren Belegung der Flasche immer mehr und mehr zu vergrößern. Eine Drehung im entgegengesetzten Sinne wird, wie man leicht erkennt, das Potential in continuierlicher Weise vermindern und man wird mit dem Drehen aufhören, wenn das Haar der Probevorrichtung genau zwischen den an derselben angebrachten Merkzeichen sein wird.

402. Die Anziehung der beweglichen Scheibe wird im absoluten Elektrometer nicht durch Gewichte äquilibriert, sondern durch Stahlfedern. Diese Scheibe ist aus Aluminium gebildet und hat 46 Millimeter im Durchmesser und wird auf ihrer Oberseite durch verticale Streifen, die radial angeordnet sind, verstärkt; sie ist verbunden mit der Schutzplatte durch eine sehr leichte Spiralfeder und mittelst dreier streifenförmigen

Stahlfedern und einem isolierenden Stäbchen an einem Schieber befestigt, welcher längs eines getheilten Maßstabes beweglich ist; den Schieber kann man mittelst einer Mikrometerschraube C heben oder senken. Die Scheibe trägt ein horizontales Haar, von dem eine Linse *l* ein reelles Bild in der Nähe des Randes des Gehäuses entwirft; man besieht dieses Bild genau mit einer Loupe *l'* und man bringt es zwischen zwei Merkzeichen V. Schließlich wird eine kreisförmig gestaltete Metallkapsel D, welche aus zwei Theilen gebildet wird, die man wieder vereinigt, auf die Schutzebene gestellt und bedeckt die bewegliche Scheibe, wobei sie allein das Stäbchen durchgehen lässt; diese Kapsel schützt die Scheibe vor jeder äußeren elektrischen Wirkung. Die Scheibe A wird ebenso mittelst eines isolierenden Stäbchens von einem Schieber getragen, welcher sich vermittelst einer Mikrometerschraube C' längs eines getheilten Stabes *m* bewegen kann. Ein Metallstab E, der von einem Glasfuße getragen wird, geht durch eine in der Basis angefertigte Öffnung und gestattet die Elektrisierung der Platte A von außen; wir werden ihn eine Elektrode nennen.

403. Bevor man sich dieses Instrumentes bedient, muss man zuerst die Stahlfedern graduieren. Wenn der Apparat im neutralen Zustande ist und die bewegliche Scheibe mittelst des oberen Knopfes in ihre normale Lage gebracht worden ist, legt man auf diese Platte möglichst symmetrisch Gewichte und bestimmt die Anzahl der Umdrehungen und der Bruchtheile der Umdrehung der Schraube C, welche erfordert werden, um das Bild des Haares zwischen die erwähnten Merkzeichen zu bringen. Man setzt auf diese Weise fest, dass innerhalb der Grenzen, innerhalb welcher der Apparat wirken muss, die Belastung der verticalen Verschiebung der federnden Lamellen proportional ist, und man bestimmt die Belastung, welche einer Umdrehung der Schraube entspricht.

Wenn dies geschehen ist, hebt man die Scheibe mittelst der Schraube C um eine bestimmte Größe und man erfährt die Anziehung F, welche nothwendig sein wird, um sie in ihre normale Position zurückzubringen. Nun setzt man die äußere Belegung mit dem Erdboden in Verbindung, ladet die innere Belegung, dann setzt man den Replenisher R in Bewegung,

bis das Haar des Probemaßes J zwischen die an demselben angebrachten Merkzeichen zu stehen kommt. Man bringt dann mittelst der Elektrode E die untere Platte A nacheinander in leitende Verbindung mit zwei Körpern, von denen man die Differenz der Potentiale V_1 und V_2 bestimmen will und hebt oder senkt mittelst der unteren Schraube C' die Platte A, so dass in den beiden Fällen die bewegliche Scheibe in ihre normale Position gebracht worden ist; die Entfernung D'—D der beiden Lagen der Platte in den beiden Versuchen liefert die Differenz der Potentiale mittelst der Formel:

$$V_1 - V_2 = (D' - D)\sqrt{\frac{8\pi F}{s}},$$

wenn die innere Ladung auf einem constanten Wert erhalten wurde.

Wir fügen noch bei, dass man in diesen Apparat trocknende Körper gibt, so z. B. Bimsstein, der mit Schwefelsäure getränkt wurde; auf diese Weise erhält man die Oberfläche des Glascylinders vollkommen trocken und isolierend.

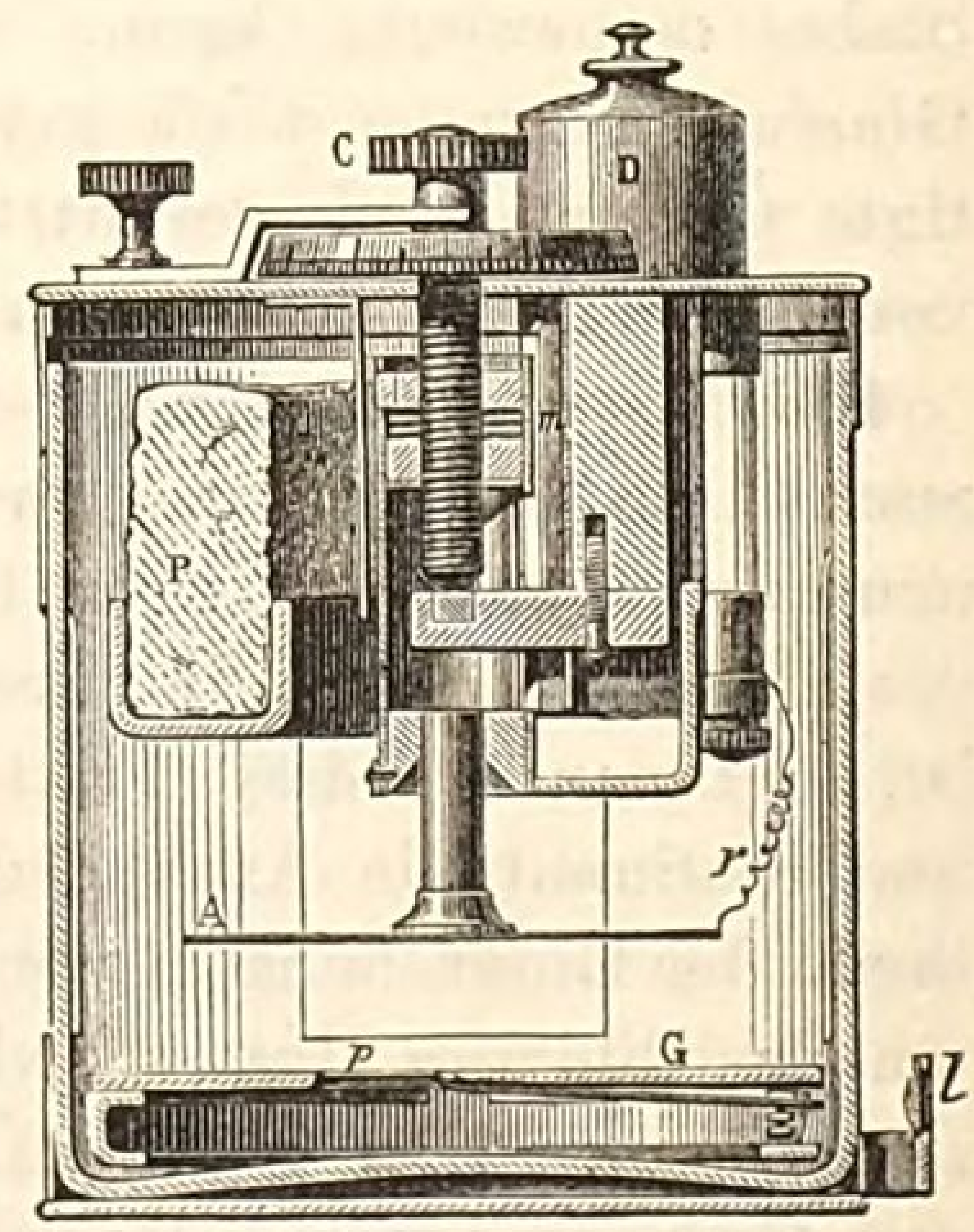


Fig. 170.

404. Dieses absolute Elektrometer kann dazu dienen, um andere Instrumente mit willkürlichen Angaben zu graduieren. So wurde z. B. ein Apparat construiert, der von Thomson den Namen „tragbares Elektrometer" erhalten hat (Fig. 170); dasselbe besteht im wesentlichen aus einem Probemaße, das sich am Boden eines Glasgefäßes befindet und mit einem Stanniolbesatze in Verbindung steht, welcher einen Theil der inneren Oberfläche bedeckt ([1]).

([1]) Dieser Stanniolbesatz ist nicht vollständig und erhebt sich nicht über das Probemaß, denn sonst würde die bewegliche Platte im Innern eines Leiters sein und die elektrische Dichte auf der Platte wäre Null.

Die äußere Oberfläche ist ebenso mit Stanniolblättern besetzt, welche die zweite Belegung bilden. Die anziehende Platte A wird durch eine Mikrometerschraube C gerichtet und steht in leitender Verbindung mit einer außerhalb befindlichen Elektrode, welche man mit einem Hütchen D überdecken kann. In der Flasche ist ein ringförmiges Schälchen aufgehängt, welches Bimsstein P umfasst, der mit einer so geringen Menge Schwefelsäure getränkt ist, dass die Stückchen nicht benetzt erscheinen. Dieses Trockenmittel scheint das beste zu sein; die innere Belegung verliert nicht mehr als $\frac{5}{100}$ ihrer Ladung in acht Tagen; es ist aber nothwendig wenigstens einmal im Monate den Bimsstein zu trocknen. Das Probemaß ist in diesen Apparaten von Thomson so gut äquilibriert, dass das Haar keine Verrückung erfährt, wenn das Instrument in irgendeine Position, sei es eine aufrechte oder umgekehrte bringt.

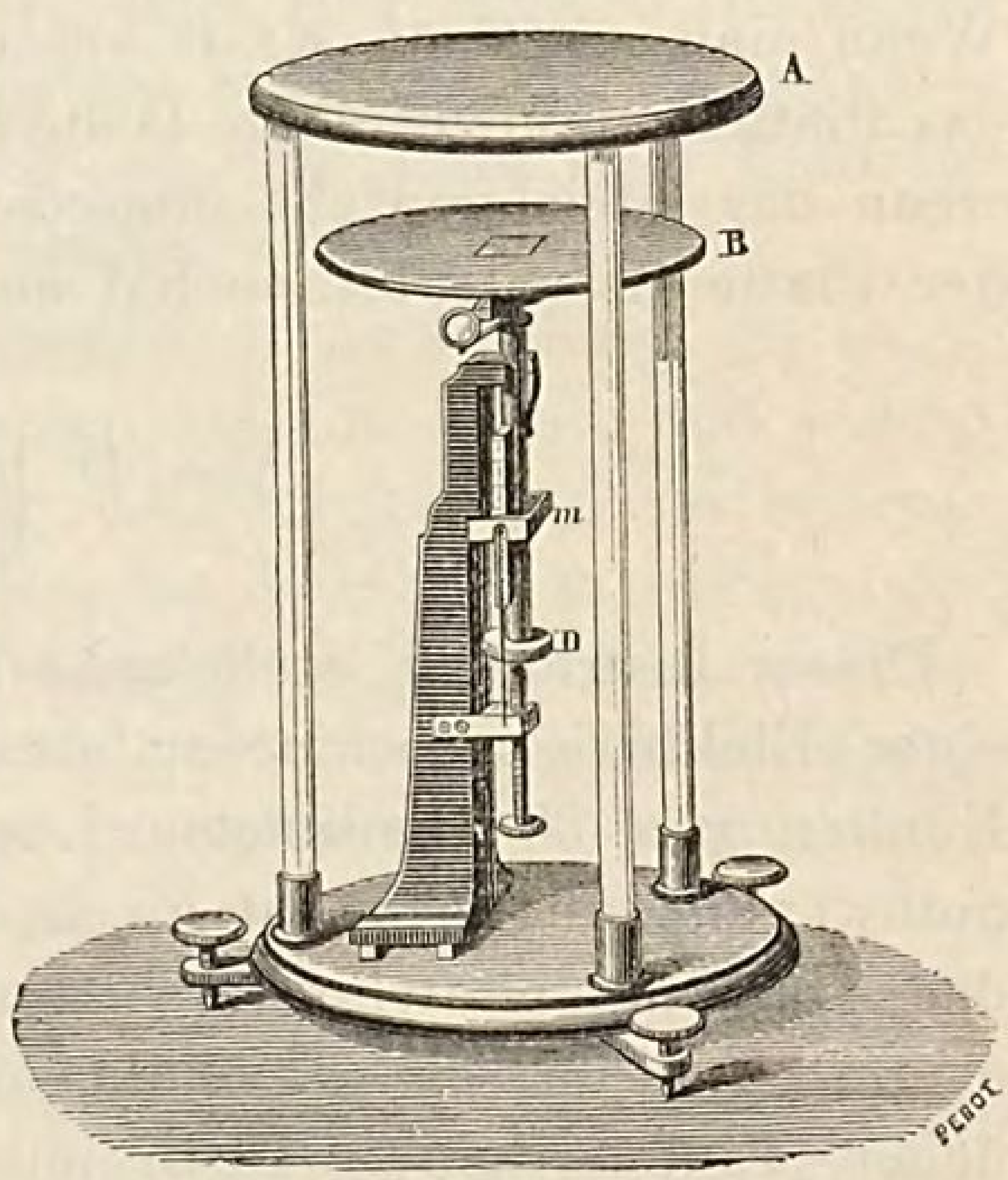


Fig. 171.

Man elektrisiert die innere Belegung z. B. mit einem Elektrophor und zw. nach Thomson in vortheilhafter Weise mit negativerElektricität,dann bringt man zuerst die Elektrode in leitende Verbindung mit der äußeren Belegung und mit der Erde und man beobachtet die Verstellung, welche man der Schraube ertheilen muss, um das Haar zwischen die beiden Marken zu bringen; dann bringt man diese Elektrode in Verbindung mit dem Körper, den man studieren will und macht eine neue Ablesung; hierauf erneuert man die auf den Boden bezügliche Ablesung: die mittlere Differenz dieser Beobachtungen wird mittelst der Graduierungstafel das gesuchte Potential liefern.

405. Wir erwähnen noch das Elektrometer mit großer Eintheilung (long rang electrometer), das zur Messung sehr hoher Potentiale bestimmt ist. Bei diesem ist die anziehende Platte A (Fig. 171), die oben befindlich ist, mittelst Glasfüßen isoliert. Die Schutzplatte B, welche mit dem Aluminiumplättchen ein Probemaß bildet, wird von einer Metallstütze getragen, die mit dem Erdboden in leitender Verbindung ist und wird durch eine schneller laufende Schraube gerichtet.

Das Aluminiumplättchen ist, wenn der Apparat im neutralen Zustande ist, umgelegt, und wenn die Platte A elektrisiert ist, so verschiebt man die Schutzplatte, bis das Plättchen vermöge der Anziehung in seine normale Lage gebracht ist. Wenn man mit F die Kraft bezeichnet, welche nöthig ist, um das Plättchen aufzurichten, D die Entfernung der Platten nennt, wenn das Gleichgewicht eingetreten ist und V das Potential der Platte A bedeutet, so hat man wieder:

$$V = D \sqrt{\frac{8\pi F}{s}}.$$

Dieses Instrument ist beinahe hinreichend, um das Potential einer Elektrisiermaschine zu messen, welche im Stande ist Funken von 30 Centimeter Länge zu geben. Es ist nicht nothwendig, den Apparat in ein Gehäuse einzuschließen, weil das Aluminiumplättchen klein und die elektrische Anziehung energisch ist und die gewöhnlichen Luftströmungen ohne merklichen Einfluss sind. Doch muss man das Instrument mit einer Glocke bedecken, wenn man dasselbe nicht gebraucht; denn sonst würde sich Staub auf dem Aluminiumplättchen ablagern und die Resultate stören; bevor man sich des Apparates bedient, wischt man die untere Platte und das Aluminiumplättchen mit der gut getrockneten Hand ab. Dies ist übrigens eine allgemein giltige Bemerkung: man darf niemals mit einem Leinentuche die wirkenden Bestandtheile eines Apparates, der zur Messung elektrischer Erscheinungen dient, abwischen; denn man läuft Gefahr, dass Fasern von dem Tuche zurückbleiben, welche dann einen sehr unangenehmen Einfluss ausüben.

Eine andere Beobachtung, welche anzugeben nützlich ist und welche zeigt, wie nothwendig es ist, in geschlossenen Gefäßen zu arbeiten, ist die, dass alle Apparate, in welchen man eine anziehende Scheibe anwendet, so fein sind, dass sie den Einfluss einer plötzlichen Änderung des atmosphärischen Druckes anzeigen, selbst dann, wenn diese Änderung sehr schwach ist, wie sie z. B. eintritt, wenn man eine Thüre öffnet oder schließt.

Drehungsapparate.

406. Elektrische Nadeln. Wir haben gesehen, dass schon Gilbert als Elektroskop sich eines sehr leichten Stäbchens aus irgendeiner Substanz bediente, welches auf eine verticale Spitze gestellt wurde, um die es sich unter dem Einflusse der schwächsten Wirkungen drehen konnte.

Du Fay brachte eine Glasnadel in Anwendung, die ebenfalls auf einen verticalen Zapfen gestellt wurde, und welche an dem einen Ende mit einer Kupferkugel und am anderen Ende mit einem Gegengewichte, das die Nadel in horizontaler Lage erhielt, versehen war. Wenn diese Kugel mit einer bekannten Elektricität geladen wurde, so gestattete sie, die Natur der Elektricität eines Körpers zu erkennen, je nachdem sie von diesen abgestoßen oder angezogen wurde.

Ersetzte man die Kugel von Du Fay durch einen aufgeblähten und an seiner Oberfläche vergoldeten Kautschukballon, so erhielt man einen sehr leichten Apparat von großen Dimensionen, mittelst welchen man in den Vorlesungen die Erscheinungen der elektrischen Anziehung und Abstoßung einer großen Anzahl von Personen zeigen konnte.

Die elektrische Nadel von Hauy[1] besteht ebenfalls aus einer Nadel von Metall, die sich auf einer Stütze im Gleichgewichte befindet und an dem einen Ende einen kleinen Doppelspathkrystall trägt. Es genügt, diesen Krystall zwischen den Fingern zu pressen, um ihn mit positiver Elektricität zu laden und diese Elektrisierung hält lange Zeit hindurch an,

[1] Annales de Chimie et de Physique, 2. serie, t. V., pag. 72.

selbst mehrere Tage; man erhält auf diese Weise ein sehr bequemes Elektroskop.

407. Elektrometer von Oerstedt. Die elektrische Wage von Coulomb mit dem Coconfaden ist ein Instrument von äußerster Empfindlichkeit, aber die Torsion des Fadens ist im allgemeinen im Verhältnis zu den elektrischen Kräften, welche ins Spiel kommen, zu vernachlässigen. Oerstedt(1) hat diese Wage zu einem Elektrometer gemacht, indem er derselben eine größere Richtkraft mittelst eines kleinen Magneten verlieh. Der Apparat von Oerstedt besteht aus einer Metallnadel *ab* (Fig. 172), welche an einem Coconfaden mittelst eines kleinen Bogens aus magnetisiertem Stahl I aufgehängt

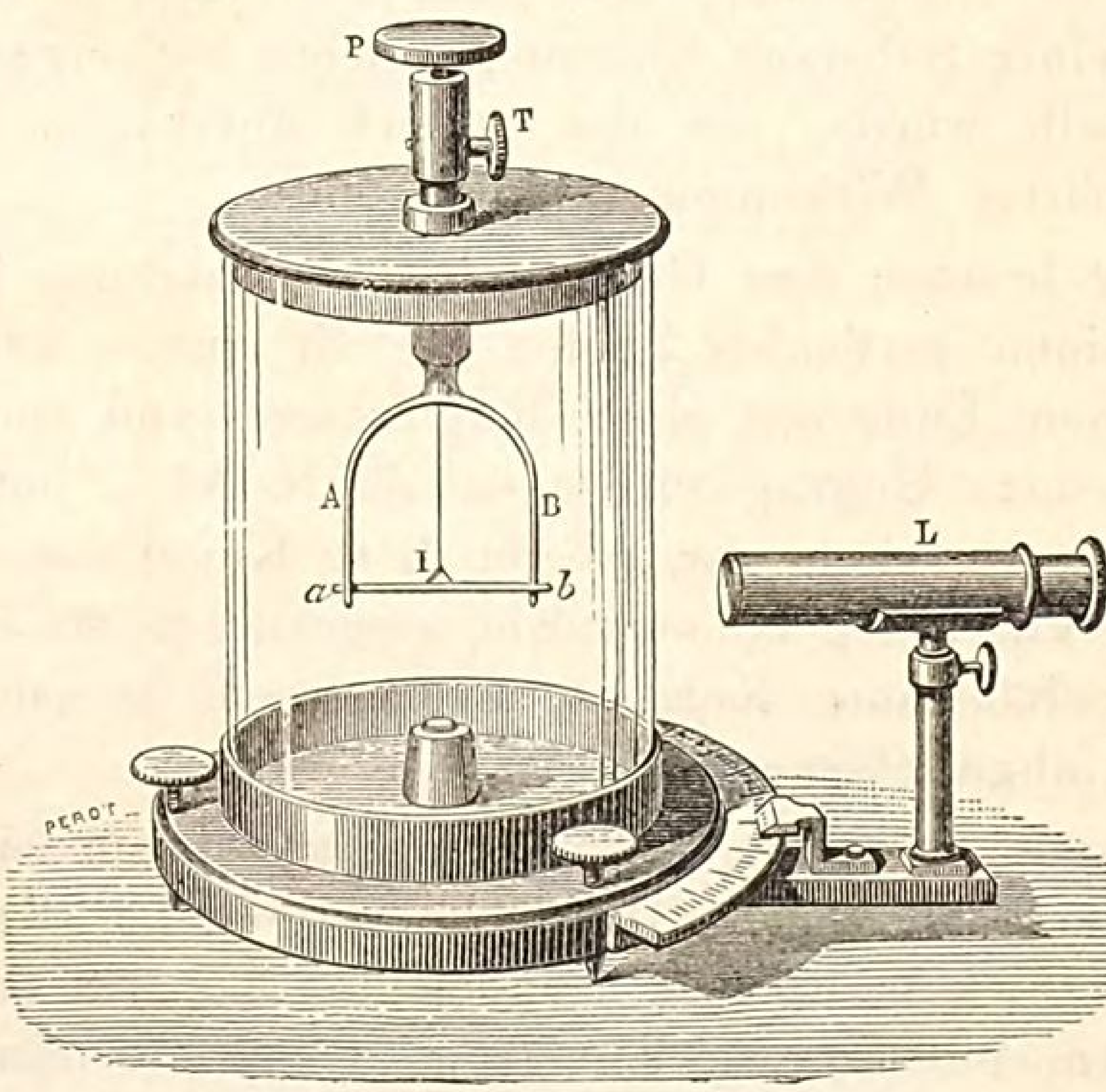


Fig. 172.

ist; ein hohles Metallstäbchen, das in den Deckel eingekittet ist, geht unten in einen Bogen AB aus, oben in einen Knopf P und trägt eine Welle T, an welcher der Faden festgemacht ist. Man beobachtet die Nadel mittelst eines Fernrohres, das seitwärts aufgestellt ist.

Ist der Apparat nicht in Thätigkeit und im neutralen Zustande, so ist die Nadel ohne Druck mit dem Leiter in

(1) Pogg. Ann., t. LIII., pag. 612.

Berührung. Elektrisiert man den oberen Knopf, so wird die Nadel bei der Berührung mit dem Leiter elektrisch und abgestoßen und kommt in eine umso entferntere Lage, je größer die elektrische Ladung und je kleiner das magnetische Moment des Magnetes ist. Man könnte überdies dieses Instrument nach einer der schon angegebenen Methoden graduieren.

408. Elektrometer von Peltier. Peltier hat öfters und insbesonders zum Studium der atmosphärischen Elektricität (1) ein Elektroskop angewendet, in welchem er ebenfalls als richtende Kraft die Wirkung der Erde auf einen Magnet benützte. Die Anordnung von dem Peltier'schen Apparate unterscheidet sich hauptsächlich durch den Umstand von jener des früher beschriebenen Apparates, dass die bewegliche Nadel *ab*, welche (Fig. 173) den kleinen Magnet *cd* trägt, auf einer Metallspitze *i* ruht und in beständiger leitender Verbindung mit dem fixen Leiter D bleibt. Man vermeidet so die Fehlerquellen, welche aus den Elektricitätsverlusten eines beweglichen, mittelst eines Coconfadens aufgehängten Leiters entspringen könnten und es ist nicht nothwendig den Apparat in den neutralen Zustand zu versetzen, wenn man von einem Experimente zu einem anderen übergehen will; die Ablenkungen der Nadel variieren in continuierlicher und regulärer Weise, wenn das Potential des fixen Conductors, welcher außen irgendwie endigen kann, selbst in continuierlicher Weise variiert. Man bestimmt die

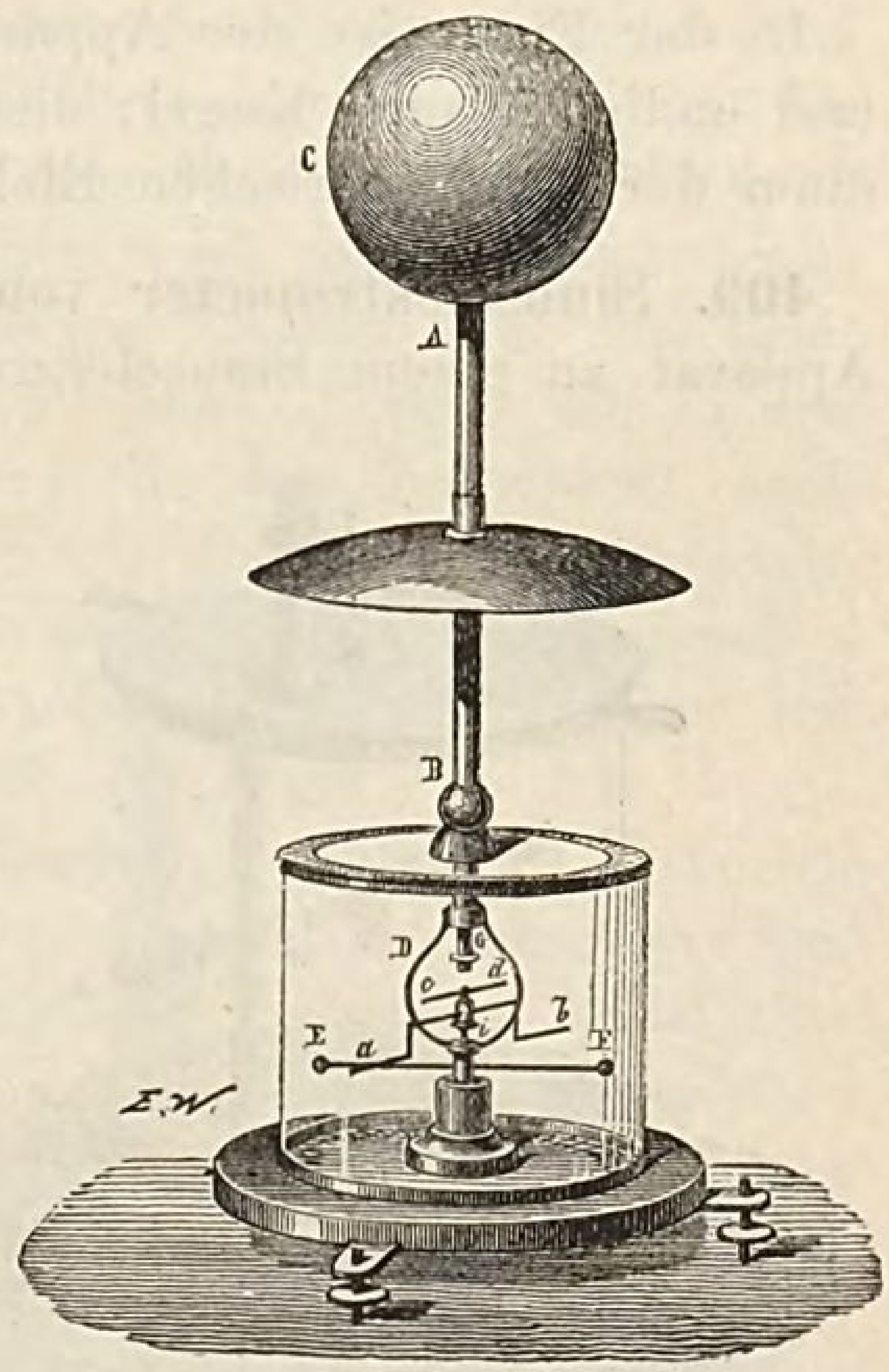


Fig. 173.

(1) Annales de Chimie et de Physique, 2. serie, t. LXII., pag. 425.

Ablenkung entweder mittelst eines Streifens, der auf dem Umfange des Gehäuses aufgeklebt ist, oder mittelst einer auf dem Hintergrund gezeichneten Theilung. Das Instrument muss auf experimentellem Wege graduiert werden. Man kann noch die Empfindlichkeit modificieren, indem man den Apparat derart einstellt, dass, wenn er im neutralen Zustande ist, die bewegliche Nadel schon von den Kugeln E, welche mit dem fixen Leiter in Verbindung stehen, entfernt ist, oder gegen diese Kugeln mit einer gewissen Kraft sich anlegt.

In der Figur ist der Apparat mit einem Dache versehen, und endigt in eine Kugel; diese Einrichtung ist für das Studium der atmosphärischen Elektricität geeignet.

409. Sinuselektrometer von Riess. Rieß [1] hat diesen Apparat zu einem Sinuselektrometer gemacht, ganz analog der Boussole von Pouillet. Ein fixer Leiter AB (Fig. 174) ist in die Seitenwand eines Glascylinders eingekittet und endigt außerhalb des Cylinders in eine Kugel; er trägt eine Metallspitze, auf welcher eine kleine Magnetnadel *ab* aufgesetzt ist. Auf dem Deckel des Cylinders befindet sich ein Mikroskop L mit Fadenkreuz, mittelst welchem man einen feinen

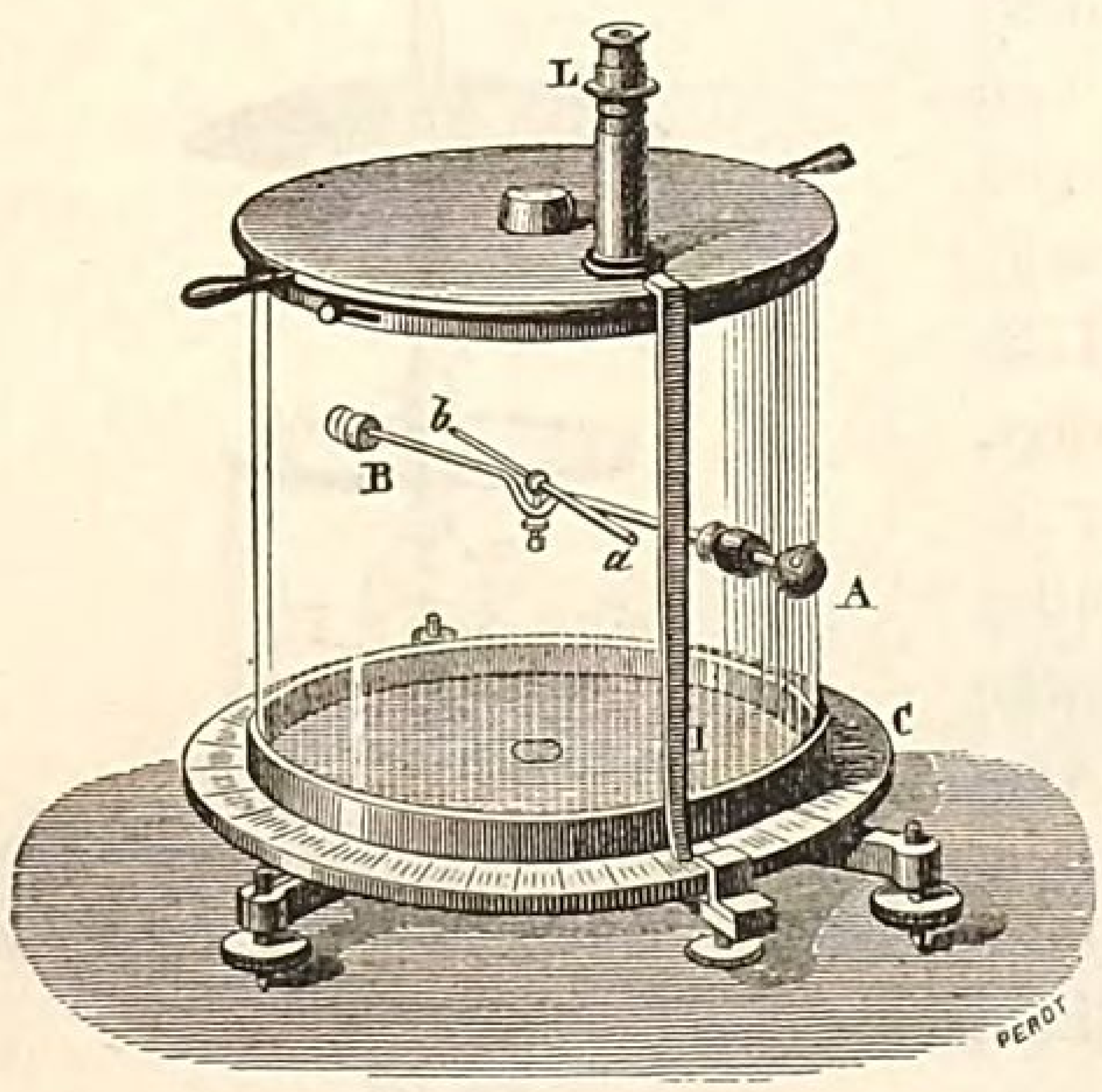


Fig. 174.

Strich, der auf der Magnetnadel eingezeichnet ist, beobachtet; dieser Deckel ist beweglich und die Drehung, welche man ihm ertheilt, wird angegeben durch einen verticalen Stab J, welcher gegenüber der auf dem Boden des Instrumentes gezeichneten Theilung endigt. Der Kreis, welcher diese Theilung trägt, ist

[1] Pogg. Ann. t. XCVI., p. 513. — Annales de Chimie et de Physique, 3. serie, t. XLVI., p. 502.

an das Glasgehäuse gekittet und kann sich selbst auf einem aus Stellschrauben gebildeten Dreifuße drehen.

Um sich dieses Instrumentes zu bedienen, richtet man es derart, dass die Magnetnadel sich in einer gewissen Entfernung von dem fixen Leiter befindet und man bringt das Bild des Striches in Coincidenz mit der Mitte des Fadenkreuzes. Wenn man die Kugel A elektrisiert, wird die Nadel abgestoßen; man bestimmt den Winkel α, um welchen man das Gehäuse drehen muss, damit die Nadel sich wieder in derselben Entfernung von dem fixen Leiter befinde: die elektrische Abstoßung wird dann im Gleichgewichte erhalten durch die Wirkung der Erde auf die Magnetnadel. Da das Moment dieser Wirkung proportional dem Sinus des Winkels α ist, so wird dieser Sinus auch proportional dem Quadrate der Ladung oder dem Quadrate des Potentiales des Leiters sein. Ebenso wie in den vorhergehenden Apparaten kann die Empfindlichkeit nach Belieben modificiert werden, wenn man die Entfernung wechselt, bis zu welcher man die Nadel in den verschiedenen Versuchen zurückbringt. Einen dem Rieß'schen ähnlichen Apparat hat Kohlrausch (¹) im Jahre 1853 construiert.

410. Modificationen der Torsionswage. Die von Coulomb erdachte Torsionswage kann als ein Apparat betrachtet werden, in welchem man auf eine bewegliche elektrische Nadel eine entgegenwirkende Kraft angreifen lässt, welche die Nadel in einer gewissen Entfernung ins Gleichgewicht bringt, ungeachtet der Abstoßung eines fixen elektrisierten Körpers.

Es ist die Torsionswage eines der genauesten Elektrometer, die man angewendet hat, und wir haben den Gebrauch dieses Instrumentes in einer genügend vollständigen Weise angegeben, so dass es unnütz wäre, auf dasselbe zurückzukommen. Verschiedene Physiker haben an diesem Apparate Modificationen angebracht, welche das Princip des Instrumentes nicht ändern und welche in der Praxis keinen großen Nutzen zu haben scheinen. Faraday hat z. B. einigemale den Metalldraht durch einen Glasfaden ersetzt, dessen Elasticität regulärer erscheint: Rietchie (²) hat in der That gefunden, dass die

(¹) Kohlrausch, Pogg. Ann. 88.

(²) Phil. trans. (1830), p. 215.

Glasfäden zerbrechen, bevor man die Grenze erreicht hat, von welcher ausgehend sie aufhören würden in ihre erste Gleichgewichtsposition zurückzukehren; Harris hat die bifilare Aufhängung in Anwendung gebracht, welche wir bereits beschrieben haben; Rieß [1] hat den oberen Rahmen mittelst einer tangentiellen Schraube beweglich gemacht, welche durch ein langes Stäbchen, das der Beobachter in der Hand hält, gedreht wird; die bewegliche Nadel beobachtete er mit einem Fernrohre: Diese Vorgänge scheinen zu streng für den Genauigkeitsgrad zu sein, den diese Art von Versuchen mit sich bringt.

In allen diesen Fällen gestattet die Drehwage die Abstoßung zu bestimmen, welche zwischen zwei elektrisierten Kugeln herrscht und man kann daraus die Bestimmung der Elektricitätsmengen selbst in absoluten Einheiten ableiten. Sind die Kugeln genügend entfernt, so dass man sie in der Rechnung durch ihre Mittelpunkte ersetzen kann, und sind ihre Ladung gleich m und m', so wird man haben (24)

$$\frac{mm'}{4lc} = (\mathrm{T} + \alpha) . \sin\frac{\alpha}{2} . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Sind die Kugeln gleich und bei der Berührung elektrisiert worden, so sind die Ladungen m und m' ebenfalls gleich und man erhält:

$$m^2 = 4lc\,(\mathrm{T} + \alpha) . \sin\frac{\alpha}{2} . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Alle auf der zweiten Seite dieser Gleichung befindliche Größen können direct bestimmt werden: die Winkel T und α sind durch den Versuch selbst gegeben, der Radius l der Nadel wird sich ohne Schwierigkeit bestimmen lassen und das Drehungspaar c des Drahtes für einen der Einheit gleichen Winkel wird man erhalten, wenn man den Draht mit einem Gewichte, dessen Trägheitsmoment bekannt ist, in Schwingungen versetzt.

(1) Reibungselektricität, Bd. I., p. 72.

411. Um im absoluten Werte das Potential eines Körpers oder einer Elektricitätsquelle zu bestimmen, muss man die beiden Kugeln in leitender Verbindung mit der Elektricitätsquelle lassen, um den Einfluss der Elektricitätszerstreuung zu vermeiden und es wird in diesem Falle, in welchem das Potential constant ist, die Beobachtung der Gleichgewichtslage eine größere Genauigkeit mit sich bringen; man kann dann, wie es Hankel gemacht hat, mit der Nadel einen reflectierenden Spiegel verbinden, in welchem man mit einem Fernrohre das Bild einer außerhalb befindlichen getheilten Schiene beobachten wird.

Diese Versuchsanordnung wurde von Branly(1) getroffen. Die bewegliche Kugel wurde von einem sehr dünnen Metallstäbchen getragen, das in leitender Verbindung mit dem Torsionsdrahte war und die fixe Kugel wurde von einem anderen Metallstabe getragen; man konnte auf diese Weise die beiden Kugeln durch einen äußeren Draht mit einem elektrisierten Körper in Verbindung setzen.

Wir bemerken bezüglich dieses Gegenstandes, dass die Theorie des Versuches hinlänglich compliciert ist. Wir können zuerst die Wirkung auf jene der beiden Kugeln reducieren, wenn wir den Einfluss des fixen Stabes und die Kräfte, welche auf das Stäbchen, das die Nadel bildet, wirken, vernachlässigen. Wenn die Entfernung der Kugeln bezüglich ihres Durchmessers sehr groß ist, so kann man die Näherungsgleichung

$$m^2 = 4lc\,(\mathrm{T} + \alpha)\,.\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

als genügend genau betrachten. Das Potential V jeder der Kugeln vom Radius r wird dann nahezu gleich $\frac{m}{r}$ sein und man wird schließlich haben:

$$\mathrm{V}^2 = r^{-2}.\,4lc\,(\mathrm{T} + \alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2};$$

die zweite Seite dieser Gleichung enthält Größen, welche man alle auf experimentellem Wege bestimmen kann; man wird

(1) Annales scientifiques de l'École Normale, 2. série, t. II., p. 211.

dann den Wert des Potentiales V in absoluten Einheiten ausdrücken. Dieser Näherungscalcül ist jedoch zumeist sehr weit von der Wahrheit entfernt und man muss, nachdem man die Abstoßung der beiden Kugeln gemessen hat, um noch das Potential zu bestimmen, die Formeln zu Hilfe nehmen, welche sich auf die wechselseitige Wirkung der beiden Kugeln beziehen. Die von Thomson gerechneten in der 1. Abtheilung angegebenen Tafeln lösen das Problem für den Fall von gleichen Kugeln, deren Entfernung kleiner als ihr Durchmesser ist.

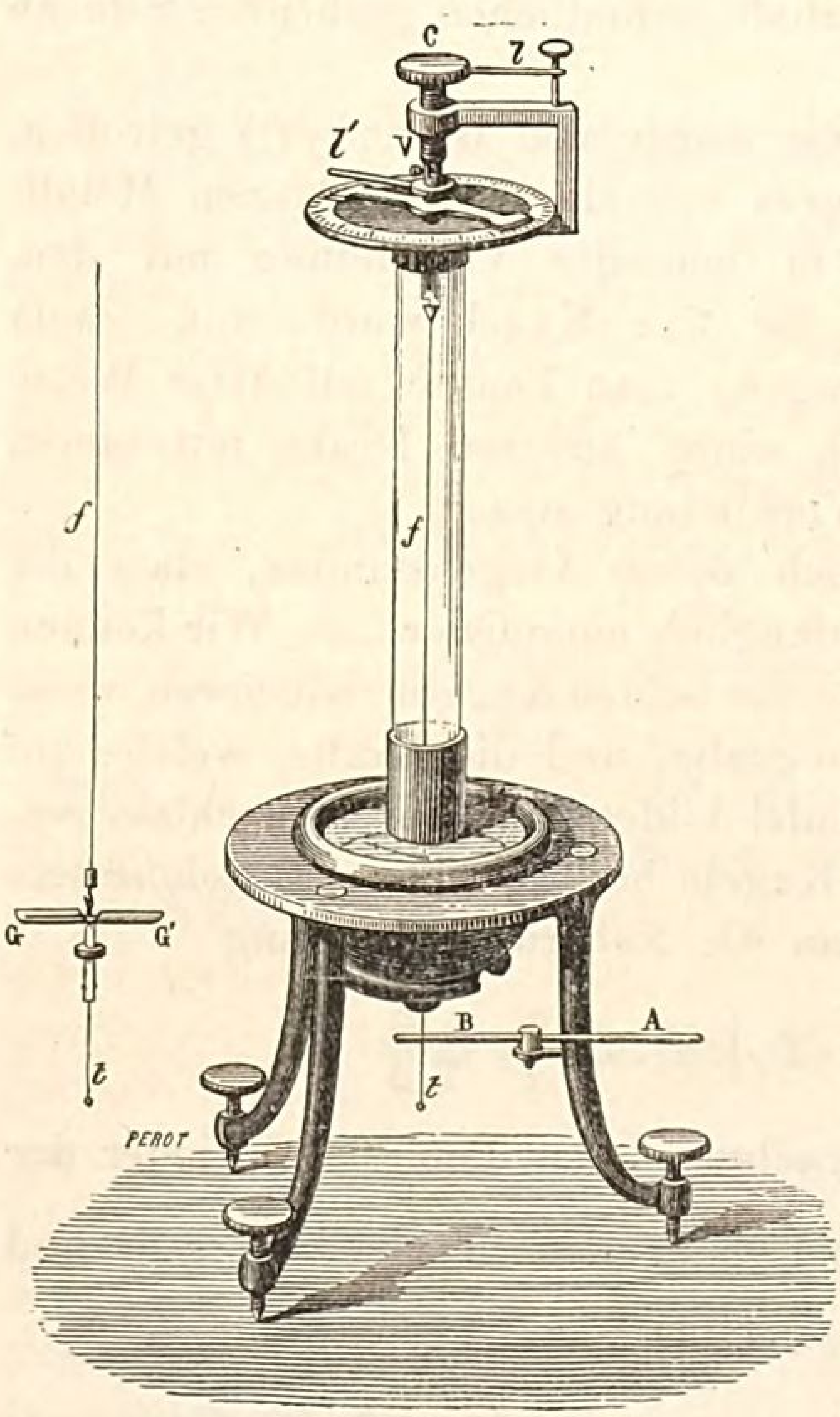


Fig. 175.

412. Drehwage von Dellmann. Die Wage von Coulomb wurde schon von Dellmann modificiert. Der originelle Theil des Instrumentes von Dellmann besteht aus einem ausgehöhlten Leiter GG′ (Fig. 175) von der Gestalt einer Rinne, deren einen Rand man auf jeder der beiden Hälften gehoben hat. Die Nadel ist leitend und wird von einem Glasfaden *f* getragen; man elektrisiert die Nadel, indem man sie in Berührung mit der Rinne bringt; dann hebt man sie ein wenig und sie wird bis zu einer gewissen Entfernung abgestoßen. Wenn man durch passende Drehung die Nadel bis zu derselben Entfernung in allen Versuchen bringt, so ist die abstoßende Kraft dem Producte der Ladungen der Nadel und des festen Leiters, demzufolge dem Quadrate der gesammten Elektricitätsmenge oder auch dem Quadrate des Potentiales proportional; es ist daher

dieses Potential der Quadratwurzel aus der gesammten Torsion proportional, welche nöthig ist, um die Nadel in eine constante Entfernung zu bringen. Man kann überdies auf experimentellem Wege eine Graduierung vornehmen und man erkennt, dass bis zu einer gewissen Entfernung die Ablenkung der Nadel der Ladung proportional ist.

Um regelmäßige Angaben zu erhalten, muss man dafür sorgen, dass die Nadel kreuzweise zur Rinne in dem Augenblicke gestellt sei, in welchem man sie ladet; unter diesen Bedingungen hat der Leiter, welcher durch die Nadel und die Rinne gebildet wird, eine größere Capacität; die Elektricitätsmenge, die er dann aufnimmt, ist größer und constanter.

Der von Kohlrausch beschriebene und in Anwendung gebrachte Apparat bietet genug complicierte mechanische Einrichtungen. Die Nadel, welche im Centrum eines kreiscylindrischen Gehäuses sich befindet, ist an einem Glasfaden aufgehängt, der an einem getheilten Rahmen befestigt ist; unter der Nadel ist ein Theilkreis, auf welchem man die Ablenkungen bestimmt. Um einen Versuch zu machen, bestimmt man zuerst den Nullpunkt des oberen Rahmens, d. h. die Stellung des Index, wenn die Nadel genau mit der Rinne ohne Torsion in Berührung ist; dann dreht man den Faden um 90° und hebt mittelst eines äußeren Knopfes die Rinne derart ein wenig, dass die Nadel auf den Ausschnitten reitet. Diese Rinne ist überdies isoliert und mittelst einer zweiten Feder bringt man sie in leitende Verbindung mit einem äußeren Knopfe, den man elektrisiert. Man hebt dann diese Verbindung auf und senkt hierauf die Rinne. Ist der obere Rahmen wieder auf den Nullpunkt gebracht, so wird man den Ausschlagswinkel beobachten; will man bei constanter Entfernung beobachten, so muss man dem Glasfaden eine passende Torsion geben.

Dellmann (1) hat selbst die Construction seines Elektrometers vereinfacht.

Der Torsionsfaden ist immer aus Glas; diese Fäden sind ohne Zweifel zerbrechlich; die Elasticität ist aber vollkommen und die Empfindlichkeit kann so bedeutend sein, dass die Nadel, mit einer Volta'schen Säule von 200 Elementen geladen,

(1) Pogg. Ann. Bd. LXXXVI., p. 524.

eine Ablenkung von 80^0 erfährt. Der Glasfaden ist an einem Metallstück festgemacht, das ein Hebel *l* (Fig. 175), der zwischen zwei Schneiden beweglich ist, genau um 90^0 zur Drehung bringt, wobei durch eine Schraubenbewegung eine kleine Senkung der Nadel entsteht. Diese Nadel besteht einfach aus einem Silberdraht, der in seiner Mitte ringförmig gebogen ist. Die Rinne ist fix und in steter Verbindung mit einem äußeren Knopfe *t*. Schließlich ist die Theilung, welche sich unter der Nadel befindet, auf einem Spiegel entworfen, so dass man mittelst einer Loupe gleichzeitig die Nadel und ihr Bild bemerkt; man kann auf diese Weise mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$ eines Grades ohne Wirkung der Parallaxe die Ablenkungen schätzen.

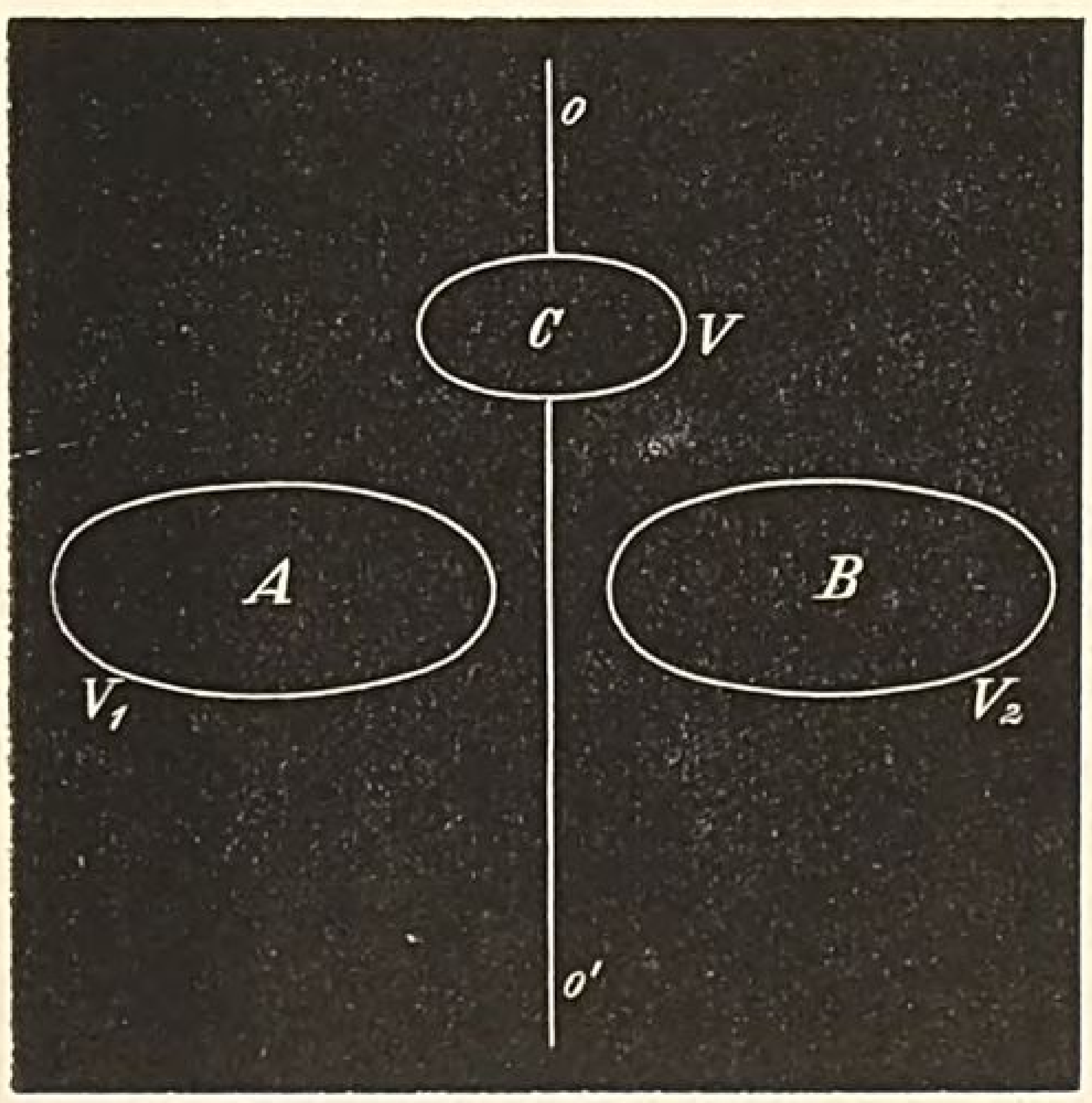


Fig. 76.

Um einen Versuch zu machen, muss man zunächst den oberen Hebel *l* so drehen, dass die Nadel die Rinne kreuzt, dann elektrisiert man den Apparat mittelst des Knopfes *t*, und hebt die Nadel mittelst des Hebels *l*, welchen man in seine ursprüngliche Lage zurückbringt; man beobachtet dann die Ablenkung, oder auch man dreht mittelst des Hebels *l'* den Glasfaden derart, dass man die Nadel in constante Entfernung bringt. Die Elektricitätszerstreuung ist größer, als sie wäre, wenn man die Verbindung des Knopfes mit der Rinne aufheben könnte, aber sie ist noch sehr schwach und es ist leicht die Correction anzubringen, welche dieser Zerstreuung entspricht.

In analoger Weise, wie bei dem oben erörterten Elektrometer, verwendet Palmieri(1) in seinem zur Messung der atmo-

(1) Palmieri, Atti della R. Accad. di Napoli 7, 1877; Wiedemann Beiblätter 2, 1878.

sphärischen Elektricität dienlichen Elektrometer eine in einem Glasgehäuse neben einem Bügel mit zwei festen, horizontalen Armen bewegliche Aluminiumnadel, die an zwei Coconfäden bifilar aufgehängt ist, jedoch von dem erwähnten Bügel isoliert ist. Die Nadel trägt unterhalb der Drehungsaxe eine kreisrunde horizontale Aluminiumscheibe, welche in einer niedrigen cylindrischen Metallschale genau conaxial schwebt, wobei die letztere von der Scheibe nirgends berührt wird. Diese Schale ist mit dem festen Bügel verbunden; wird sie elektrisiert, so wird die Aluminiumscheibe ungleichnamig, die Nadel gleichnamig elektrisch werden und letztere daher von dem Bügel abgestoßen. Unter der Nadel befindet sich auf der Peripherie eines Ringes eine Kreistheilung, über welche die Enden des Bügels und der Nadel vertical herabgebogen sind. So ist es möglich, mittelst eines auf dem Fuße des Apparates drehbaren Mikroskopes die Ablenkung der Nadel zu bestimmen.

413. Elektrometer von Thomson. Thomson hat bei der Construction der Torsionselektrometer wichtige Änderungen an denselben angebracht. Um die Grundidee zu erfassen, welche Thomson geleitet hat, betrachten wir zwei feste Leiter A und B, die gegeneinander bezüglich einer Ebene OO' (Fig. 176) symmetrisch sind und welche auf die voneinander verschiedenen Potentiale V_1 und V_2 gebracht sind; ferner sei ein dritter Leiter C gegeben, der bezüglich derselben Ebene symmetrisch und um eine Gerade drehbar ist, die sich in dieser Ebene befindet, und welcher ein Potential V hat. Dieser bewegliche Leiter wird von Seite der beiden fixen Conductoren ungleichen Kräften unterworfen sein; wir wollen aber voraussetzen, dass man diesen dritten Körper durch eine äußere Kraft, wie z. B. die Torsion eines Fadens in der symmetrischen Lage erhält.

Die Entfernungen des beweglichen Leiters von den fixen Leitern bleiben constant; es handelt sich nun darum, die Art und Weise anzugeben, wie die elektrischen Kräfte als Functionen der Potentiale V, V_1 und V_2 variieren.

414. Wenn die beiden Leiter A und C vorhanden sind, der eine von ihnen mit dem Erdboden in leitender Verbindung ist, während der andere auf dem Potentiale V sich befindet,

so besteht zwischen ihnen — wie wir schon einmal gesehen haben — eine Anziehung, die dem Quadrate des Potentials proportional ist; man kann diese Kraft durch hV^2 ausdrücken, wobei der Coefficient h von der Gestalt der Körper, ihren Dimensionen und der sie trennenden Entfernung abhängt.

Nehmen wir nun an, der erste von diesen Körpern befinde sich auf dem Potentiale V_1, der zweite auf dem Potentiale V. Unter Anwendung des Principes der Superposition von Gleichgewichtszuständen können wir das Problem in folgender Weise zerlegen: Wenn der Leiter A auf dem Potentiale V_1 ist, während der Leiter C mit der Erde in leitender Verbindung steht, wird auf dem ersteren eine Elektricitätsmenge $+a$, auf dem zweiten eine entgegengesetzte Elektricitätsmenge $-a'$ vorhanden sein und die beiden Körper werden sich mit einer Kraft gleich hV_1^2 anziehen. Ist der Körper C auf dem Potentiale V und der andere nicht isoliert, so wird ebenso auf dem ersten eine Elektricitätsmenge $+c$, auf dem zweiten eine Ladung $-c'$ vorhanden sein und die Anziehung der Körper wird kV^2 sein, wobei die beiden Coefficienten h und k im allgemeinen nicht gleich sind. Diese beiden Gleichgewichtszustände superponiert werden einen neuen Gleichgewichtszustand liefern, der dem Potentiale V_1 auf dem ersten Körper A und dem Potentiale V auf C, d. h. dem vorausgesetzten Gleichgewichte entspricht. Die Wirkung der beiden Körper wird zuerst die beiden anziehenden Kräfte hV_1^2 und kV^2, dann die Abstoßung der Schichten a und c und jene der Schichten c' und a' umfassen. Die erste dieser Abstoßungen ist einzeln proportional den beiden Elektricitätsmengen a und c und demzufolge den Potentialen V_1 und V oder deren Producte VV_1; die zweite Abstoßung ist ebenfalls proportional c' und a' oder wieder dem Producte VV_1. Die Summe dieser beiden Kräfte wird lVV_1 sein, wobei l ein neuer Coefficient ist. Die Momente aller dieser Kräfte bezüglich irgendeiner Axe werden durch Ausdrücke von derselben Form angegeben, so dass schließlich, wenn der Leiter C um eine Axe beweglich ist, das Moment der auf ihn von dem Leiter A ausgeübten Kraft dargestellt werden kann durch die Summe der drei Glieder

$$hV_1^2 + kV^2 - lVV_1.$$

Die Wirkung ist immer eine anziehende, wenn die Potentiale V und V_1 entgegengesetztes Zeichen haben; sind diese Potentiale gleichbezeichnet, so kann die Resultierende je nach Umständen anziehend oder abstoßend sein.

415. Betrachten wir schließlich die drei vorausgesetzten Körper A, B und C, deren Potentiale V_1, V_2 und V sind. Wir zerlegen den elektrischen Zustand in drei andere. Im ersten Zustand befindet sich der Leiter C auf dem Potentiale V, die beiden anderen sind nicht isoliert, was einer Ladung $+c$ des ersten und den Ladungen $-c'$ auf jedem der beiden anderen entspricht; letztere Ladungen sind wegen der Symmetrie bezüglich des Körpers C gleich; man wird daher für diesen ersten Gleichgewichtszustand haben:

Leiter	A	C	B
Potentiale	o	V	o
Ladungen	$-c'$	$+c$	$-c'$.

Im zweiten Zustande wird der Leiter A auf dem Potentiale V_1 gehalten, und die beiden anderen stehen in leitender Verbindung mit dem Erdboden und man erhält ebenso:

Leiter	A	C	B
Potentiale	V_1	o	o
Ladungen	$+a$	$-a'$	$-a''$.

Im dritten Gleichgewichtszustande endlich befände sich der Leiter B auf dem Potentiale V_2 und man wird wieder haben:

Leiter	A	C	B
Potentiale	o	o	V_2
Ladungen	$-b''$	$-b'$	$+b$.

Die Übereinanderlagerung dieser drei Gleichgewichtszustände wird den vorausgesetzten Gleichgewichtszustand hervorrufen; man muss nun noch die Kräfte ausrechnen, welche auf den mittleren Leiter C ausgeübt werden.

Wir bemerken zunächst, dass die elektrischen Schichten $-c'$ nicht in Betracht kommen, weil die Kräfte, welche sie auf C ausüben, symmetrisch sind und eine Resultierende geben, deren Moment Null ist; es genügt daher die Wirkungen der Schichten $+a$ und $-a''$, $-b''$ und $+b$ auf die drei Schichten c,

$-a'$ und $-b'$ zu betrachten. Die Schichten a und $-a''$ üben auf die Schichte c zwei Wirkungen aus, die eine repulsiv, die andere attractiv, welche beide den beweglichen Körper gegen den Leiter B in Bewegung setzen und den Potentialen V_1 und V proportional sind; das resultierende Moment dieser Kräfte, welches wir positiv voraussetzen wollen, kann durch lVV_1 dargestellt werden. Ebenso wirken die Schichten $-b''$ und b auf c und geben ein Moment von entgegengesetztem Zeichen $-lVV_2$. Die Wirkung der Schichten $+a$ und $-a''$ auf $-a'$ gibt ein Glied, welches dem Quadrate des Potentials proportional ist und dessen Moment hV_1^2 negativ ist; die Wirkung von $-b''$ und $+b$ auf $-b'$ wird ebenso ein positives Moment hV_2^2 liefern.

Andere Kräfte kommen nicht weiter in Betracht, weil einerseits die Wirkungen von $+a$ und $-a''$ auf $-b'$ und andererseits jene von $-b''$ und $+b$ auf $-a'$ gleiche und entgegengesetzt bezeichnete Momente geben.

Schließlich wird das resultierende Moment K aller auf den beweglichen Leiter ausgeübten Wirkungen ausgedrückt durch:

$$K = lVV_1 - lVV_2 - hV_1^2 + hV_2^2$$

oder

$$K = lV(V_1 - V_2) + h(V_2^2 - V_1^2).$$

Es können sich mehrere Fälle darbieten:

(1). Wenn die Potentiale V_1 und V_2 der anziehenden Körper gleich und entgegengesetzt bezeichnet sind, so reduciert sich die Formel auf:

$$K = lV(V_1 - V_2);$$

die Wirkung ist daher dem Potentiale des beweglichen Leiters und dem Unterschiede der Potentiale der fixen Leiter proportional.

(2). Wenn das Potential V sehr klein ist, die Werte von V_1 und V_2 nicht gleich und vom entgegengesetzten Zeichen sind, so wird das zweite Glied die Übermacht haben, was eine unvortheilhafte experimentelle Bedingung sein würde.

(3). Wenn das Potential V sehr groß im Verhältnis zu den Potentialen V_1 und V_2 ist, so reduciert sich die Formel

wieder auf das erste Glied, denn man kann schreiben:

$$K = lV(V_1 - V_2)\left[1 - \frac{h}{l}\frac{V_1 + V_2}{V}\right];$$

der Factor $\frac{h}{l}$ ist offenbar nicht so groß, dass der Klammerausdruck merklich von der Einheit verschieden wäre.

Im ersten Falle kann man ein sehr geringes Potential V als Function einer bekannten Differenz $V_1 - V_2$ der beiden anderen, dem absoluten Werte nach gleichen Potentiale bestimmen; im dritten Falle wird man den Unterschied der Potentiale $V_1 - V_2$ der beiden Leiter als Function eines constanten Potentiales V bestimmen. In diesen beiden Fällen ist die Kraft direct proportional der Größe, welche man bestimmen will; der Proportionalitätsfactor ist hierbei sehr groß. Darin besteht das Princip der Apparate von Thomson.

416. Man kann bemerken, dass der erste Fall schon nahezu in dem Elektroskope von Behrens verwirklicht ist und dass die Bedingungen genau dieselben sein würden, wenn man durch eine entgegenwirkende Kraft das Goldblättchen in die Verticale zurückbringen könnte.

Hankel[1] hat eine Modification in Anwendung gebracht, welche der Wage von Coulomb ähnlich ist. Vier Metallkugeln, welche von Glasfüßen getragen werden, sind in einem Gehäuse so angeordnet, dass sie die Spitzen eines Rechteckes bilden; zwei Kugeln, welche an den Enden einer Diagonale sich befinden, sind mit dem einen Pole einer Volta'schen Säule in Verbindung und die beiden anderen Kugeln mit dem zweiten Pole. Die Nadel, welche aus Metall ist, wird von einem Stahldrahte getragen; sie besitzt an ihren Enden leitende Kugeln und kann sich in der Ebene der fixen Kugeln bewegen. Wird diese Nadel in irgendeiner Weise elektrisiert, so bemerkt man, dass sie nach der einen oder anderen Seite abgelenkt wird, wie das Goldblättchen des Elektroskopes von Behrens. Hankel beschränkte sich auf die Beobachtung der Ablenkungen, es würde aber — um voll-

(1) Pogg. Ann., Bd. CIII., p. 233.

ständig genau unter den Bedingungen der vorigen Theorie zu arbeiten — nothwendig sein, jedesmal die bewegliche Nadel in eine Ebene zu bringen, welche bezüglich der fixen Kugeln symmetrisch ist.

417. Thomson hat nach dem erwähnten Principe eine ziemlich große Anzahl von Apparaten construiert, welche nach und nach modificiert wurden. Die wichtigste dieser Modificationen besteht darin, dass er ein Mittel fand, welches er in Anwendung brachte, um durch eine einfache Ablesung der Deviation den sorgfältigen Versuch zu ersetzen, welchen die Nothwendigkeit, jedesmal den beweglichen Leiter in seine ursprüngliche Lage zu bringen, erforderte. Zu diesem Zwecke gab er der beweglichen Nadel eine solche Form, dass die kleinen Bewegungen, welche sie erfuhr, die Wirkung, welche die fixen Leiter auf sie ausübten, nicht ändern konnten. Diese Leiter sind aus vier Quadranten A, A', B, B' (Fig. 177) gebildet, von denen je zwei im Kreuze gegenüberstehende durch Metalldrähte verbunden sind; die Nadel hat die Form einer Acht, deren große Achse parallel zur Trennungslinie zweier benachbarten Quadranten ist. Die alleinigen Theile der Nadel, auf welche die Wirkung der Leiter eine merkliche horizontale Componente hatte, sind jene, welche der Trennungslinie der Quadranten am nächsten liegen, und diese Wirkung wird nicht geändert werden, wenn die Nadel von der ursprünglichen Lage in eine sehr benachbarte übergehen wird. Das Gleichgewicht wird stattfinden, wenn das Drehungspaar, d. h. die Deviation selbst, dem Producte $V(V_1 - V_2)$ aus dem Potentiale der Nadel und der Potentialdifferenz der beiden Quadrantensysteme proportional sein wird.

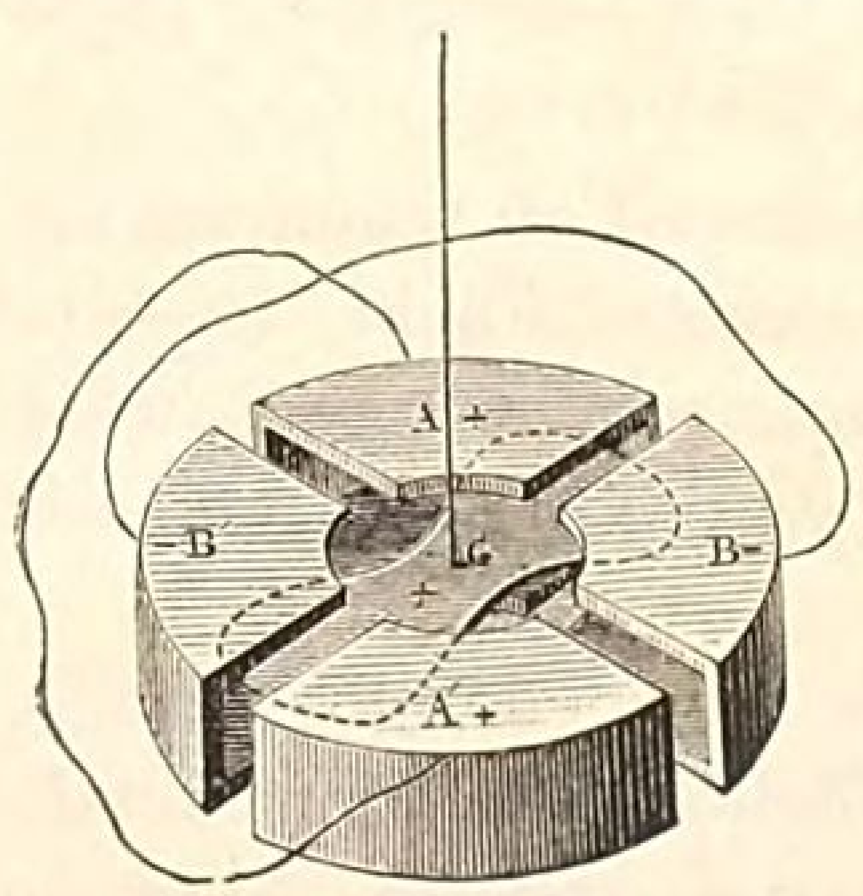


Fig. 177.

Die Proportionalität würde geändert werden, wenn die Variationen der Temperatur oder eines ganz anderen Umstandes die Entfernung der Nadel von den Quadranten ändern würden. Um diese Fehlerursache zu vermeiden, hat Thomson die Nadel in ein constantes elektrisches Feld gestellt,

d. h. in einen Raum, in welchem die elektrische Kraft fast unabhängig von der Lage der Nadel ist. Die Leiter sind nicht Kreisausschnitte, sondern Theile einer cylindrischen Hülse, in deren Innern die Nadel sich befindet, wie man aus der Figur ersieht.

Die Nadel nähert sich der einen Grundfläche, wenn sie sich von der anderen entfernt, und die Wirkung ist fast constant. Diese Anordnung bietet noch den anderen Vortheil, die Nadel vollständig dem Einflusse äußerer Körper zu entziehen.

418. Zur Hervorrufung der Torsionskraft hängt man die Nadel entweder an einem Metalldrahte auf oder an einem Coconfaden, der mit einem kleinen Magneten versehen ist, dessen Richtkraft man nach Belieben mittelst der Wirkung eines äußeren fixen Magneten variieren kann, oder auch mittelst zweier benachbarten Coconfäden, deren Aufhängepunkte man nähern oder entfernen kann. Dies ist der letzte Vorgang, dem Thomson beipflichtete.

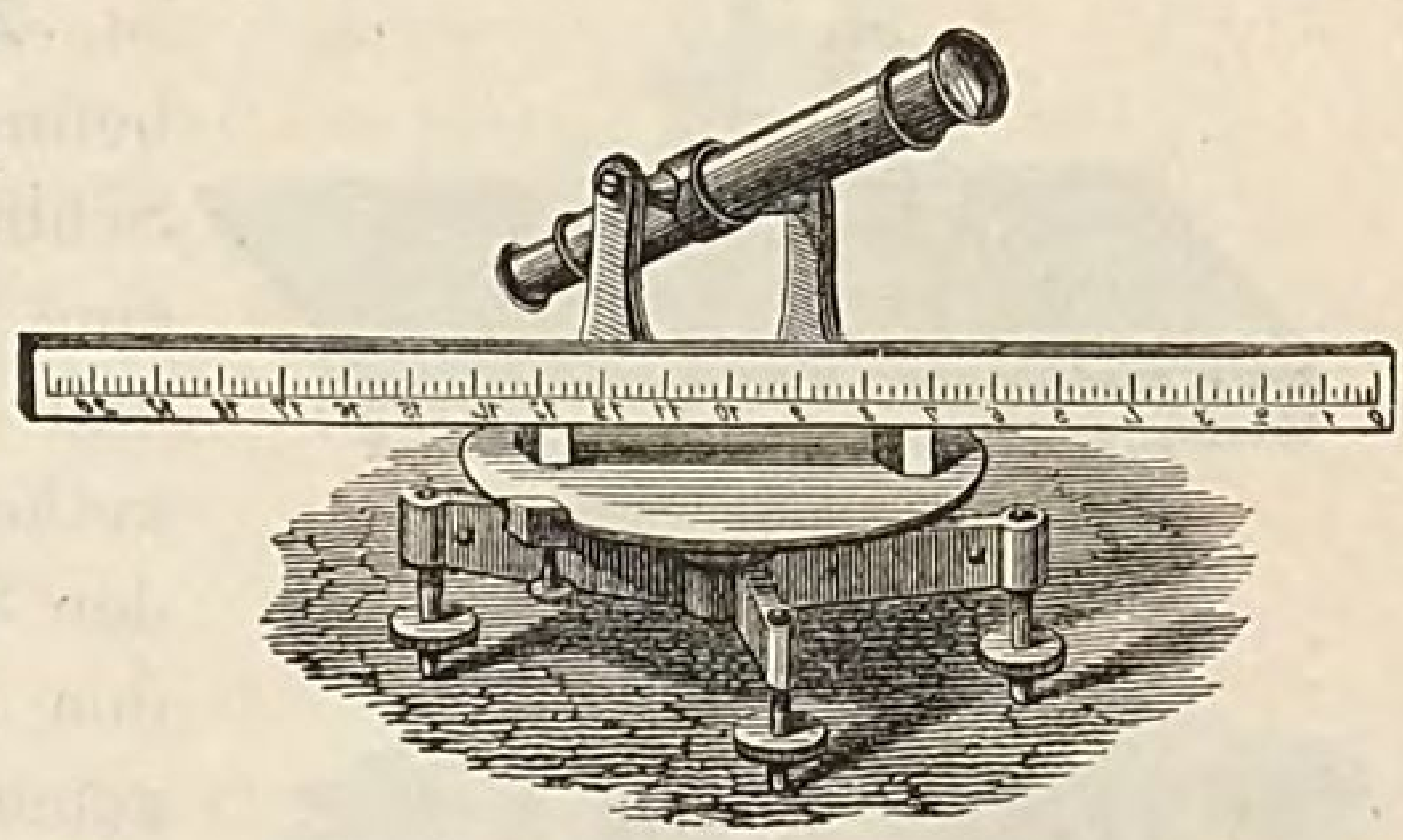


Fig. 178.

Da die Ablenkungen stets sehr klein sind, trägt die Nadel einen kleinen Spiegel, in welchem man die Reflexion einer getheilten Latte beobachtet. Es ist hier der Platz, einige Bemerkungen über die Anwendung dieser Methode, welche von Poggendorff erdacht wurde und seit den Versuchen von Gauss und Weber allgemein in Anwendung steht, zu machen.

Gewöhnlich ist der Spiegel ein ebener und man betrachtet mittelst eines außerhalb befindlichen Ablesefernrohres das Bild einer Theilung, welche nahe bei dem Fernrohre (Fig. 178) sich befindet; die Anzahl der Theilungen der Latte, welche das Fadenkreuz des Fernrohres passieren, ist der Tangente der doppelten Ablenkung des Spiegels proportional, oder nahezu der Deviation selbst. Die Bilder, welche man in diesem Falle beobachtet, sind oft mangelhaft, wenn der Spiegel keine große Ausdehnung besitzt; will man die Überlastung der

Nadel vermeiden, so ist es nothwendig, dass der Spiegel aus einem sehr dünnen Glasstreifen, der eine geringe Ausdehnung besitzt, gebildet sei. Unter diesen Bedingungen ist es nahezu unmöglich, eine geeignet ebene Oberfläche zu erhalten und es kommt fast immer vor, dass die Bilder verzerrt sind; man kann z. B. nicht gleichzeitig die verticalen Theilstriche des Maßstabes und die horizontalen Striche oder die Zahlen der Theilung auf denselben Punkt bringen, ein Umstand, welcher der Genauigkeit der Messungen viel schadet. Thomson hat den Hohlspiegeln den Vorzug gegeben, deren Construction leichter ist.

Ein getheilter Stab ist in einer Entfernung vom Spiegel aufgestellt, welche gleich dem Krümmungsradius des letzteren ist. Zur Seite dieses Stabes befindet sich ein verticaler Schlitz (Fig. 179), der durch eine Lampe beleuchtet wird und man erhält auf dem getheilten Stab das Bild der Spalte, welches durch den von der Nadel getragenen Hohlspiegel erzeugt wird. Die Bilder sind deutlicher, weil in diesem Falle die Aberrationen am kleinsten sind. In ähnlicher Weise werden die Beobachtungen bei den transatlantischen Telegraphen gemacht.

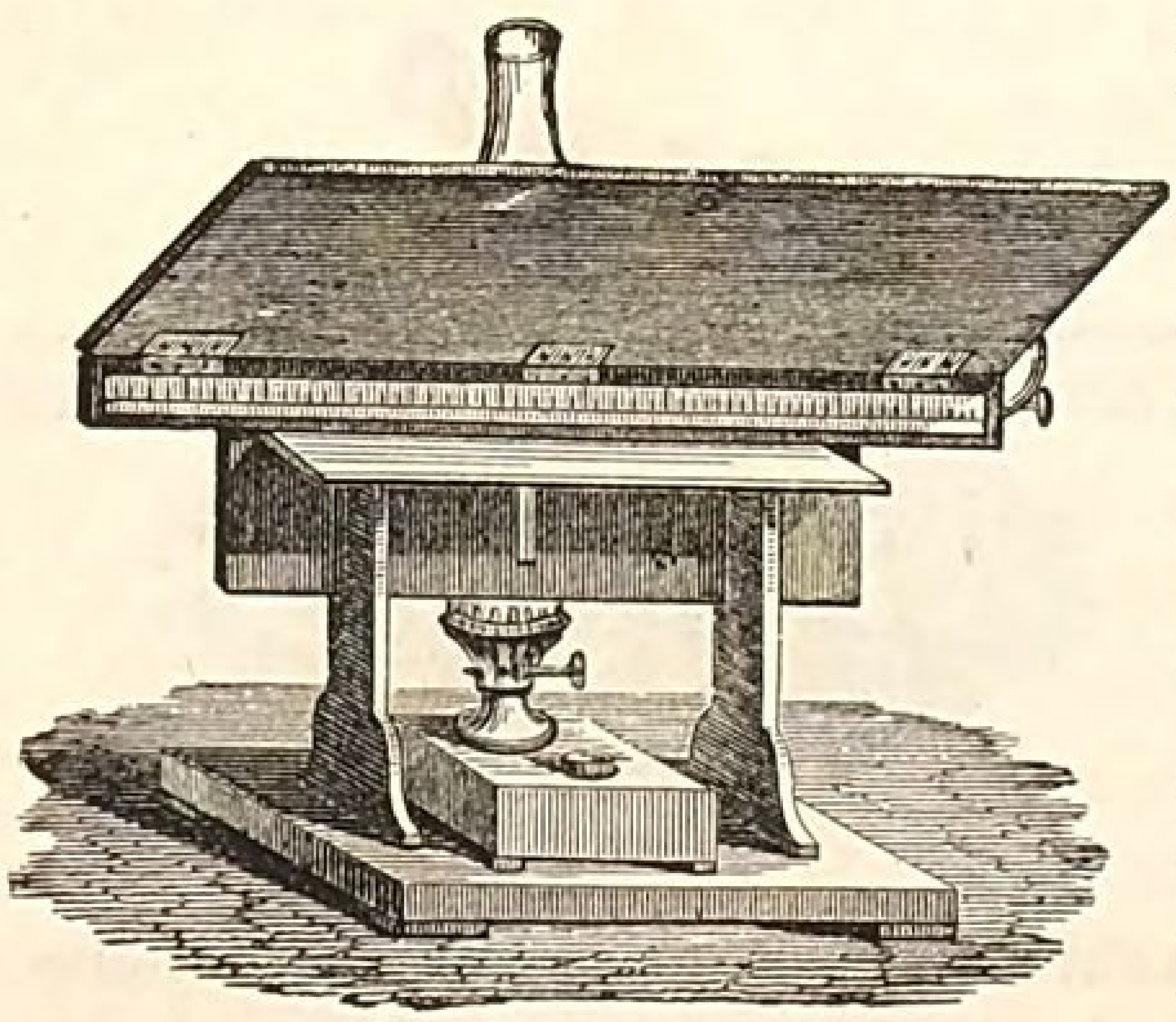


Fig. 179.

Angot(1) hat auch eine vortheilhafte Anordnung getroffen. Der Krümmungsradius des Spiegels ist sehr klein, einen oder zwei Decimeter z. B.; man stellt in die Nachbarschaft des Krümmungs-Mittelpunktes einen in Fünftel oder Zehntel Millimeter getheilten Stab, welcher mittelst einer Lampe direct oder durch durchgelassenes Licht beleuchtet wird, je nachdem die Theilung auf Metall oder Glas entworfen ist; man trifft die Anordnung so, dass das Bild ober dem Maßstabe selbst entworfen wird und man beobachtet es mit einem Mikroskope.

(1) Annales scientifiques de l'École Normale, 2. serie, t. III., p. 261.

Die Striche des Bildes sind dann sehr deutlich und die Ablenkungen lassen sich mit großer Genauigkeit messen.

419. Es bleibt noch übrig einige Worte hinzuzufügen, um das Elektrometer von Thomson (Fig. 180) vollständig zu beschreiben. Der Apparat enthält: eine elektrische Flasche, die bewegliche Nadel und die anziehenden Quadranten, einen Elektricitätserneuerer (Replenisher), ein Probemaß und einen Inductor.

Die Flasche besteht aus einem großen Gefäße aus Glas, das eine Quantität Schwefelsäure enthält, welche die eine Belegung bildet; die andere Belegung ist aus Stanniolblättern hergestellt, welche die äußere Fläche bedecken und zwischen ihnen Öffnungen freilassen, durch welche man das Innere der Flasche sehen kann. Der Apparat wird von einem Metallstative getragen, welches mit der äußeren Belegung in leitender Verbindung steht. Diese Flasche ist durch eine Hartkautschukplatte geschlossen, auf welcher alle anderen Bestandtheile des Elektrometers angebracht sind. Ein Platindraht, welcher in die Schwefelsäure taucht, ist in leitender Verbindung mit einem äußeren Metallstäbchen, durch welches man die Flasche elektrisieren kann. Ein Knopf gestattet diese Verbindung herzustellen oder aufzuheben. Wenn das Glasgefäß geeignet gewählt wurde, so ist die innerhalb befindliche Luft durch die Schwefelsäure so getrocknet, dass die Isolierung fast vollkommen ist und dass eine solche Leydnerflasche in 24 Stunden nicht den hundertsten Theil ihrer Ladung verliert.

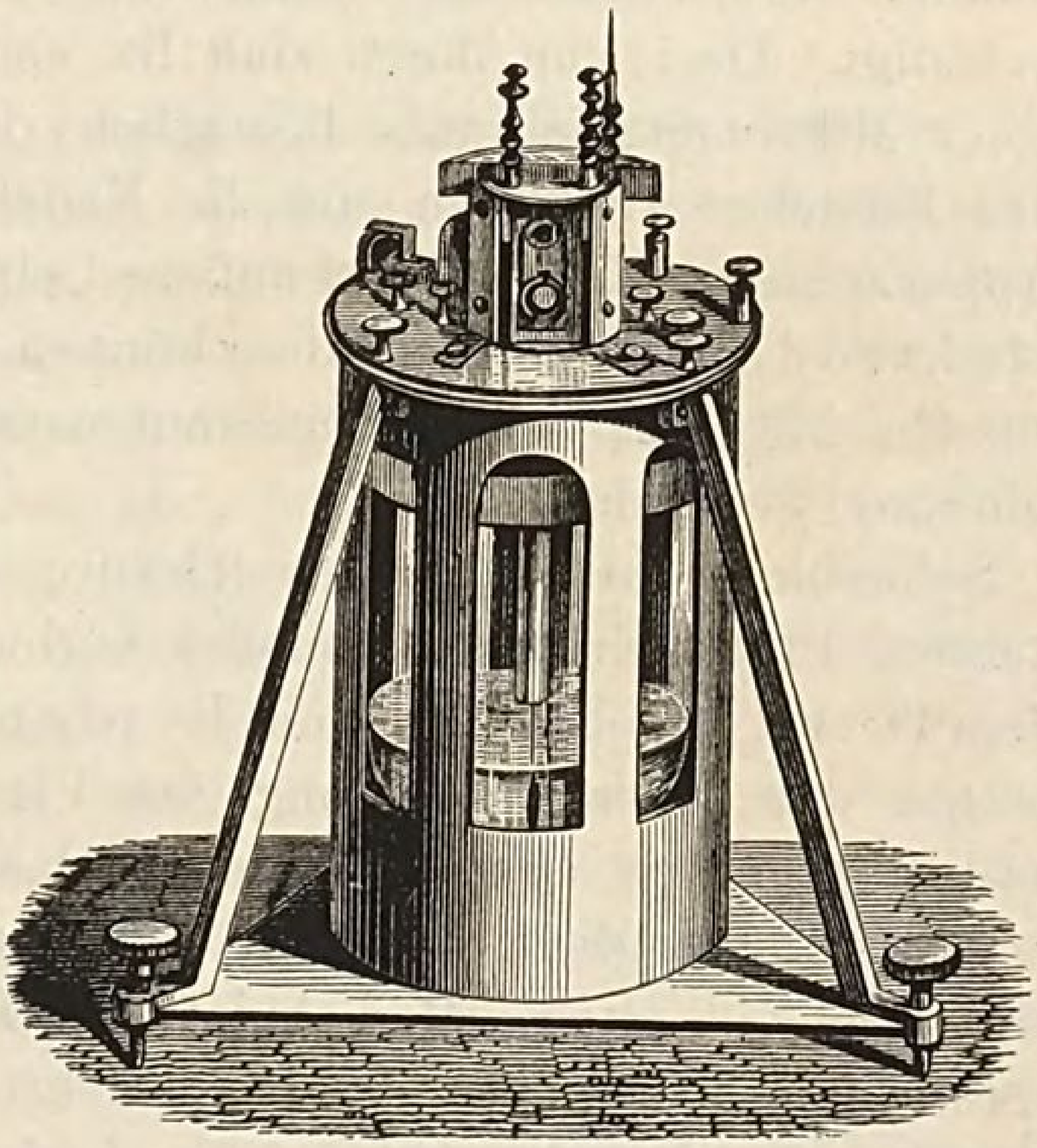


Fig. 180.

Die Nadel besteht aus einer Aluminiumlamelle von ungefähr vier Quadratcentimeter Oberfläche, die nicht mehr als 70 Milligramm wiegt; sie ist an einem Stäbchen befestigt, das oben einen kleinen Hohlspiegel von 8 Millimeter Durchmesser trägt, welcher 22 Milligramm wiegt. Dieses Stäbchen endigt oben in ein kleines T, wo die Coconfäden befestigt sind, und unten in einen durch ein kleines Gewicht gespannten Platindraht, der in die Schwefelsäure eintaucht; durch diesen Draht wird erreicht, dass die Nadel sich auf dem Potentiale der inneren Belegung der Flasche befindet.

Die Quadranten, welche kreuzweise zwei und zwei verbunden sind, sind durch Glasstäbe am Deckel des Apparates befestigt. Drei von ihnen sind fix und der vierte ist mittelst einer Mikrometerschraube beweglich; dadurch wird es möglich, das Kästchen zu öffnen, um die Nadel zu entfernen und den Apparat zu regulieren. Zwei äußere Leiter, genannt die Haupt-elektroden (chief electrodes) können durch geeignete Federn einzeln mit den beiden Quadrantensystemen in leitende Verbindung gebracht werden.

Schließlich ist die Schwefelsäure leitend mit der anziehenden Platte eines Probemaßes verbunden, das ebenfalls auf dem Deckel angebracht ist; ein Replenisher gestattet das Potential der inneren Belegung der Flasche constant zu halten und demzufolge auch das Potential der beweglichen Nadel.

420. Man begreift nun den Gebrauch dieses Elektrometers ohne Schwierigkeit. Man ladet die Flasche durch die entsprechende Elektrode, dann vermehrt oder vermindert man mittelst des Replenisher die Ladung, bis das Haar des Probemaßes genau zwischen den beiden Marken zu liegen kommt und man beobachtet, während die beiden Haupt-Elektroden miteinander in Verbindung stehen, die Lage des reflectierten Bildes. Man bringt dann diese beiden Elektroden mit den beiden Körpern in Verbindung, deren Potentialdifferenz man bestimmen will und man beobachtet die neue Lage des Bildes; die Verrückung ist dem Potentialunterschiede proportional.

Um einen Begriff von der Empfindlichkeit dieses Apparates zu geben, nehmen wir die Zahlen, welche in den Abhandlungen

von Thomson enthalten sind. Mit einem Instrumente, deren Nadel mit einem Magnete versehen war und durch einen einzigen Coconfaden getragen wurde, erzeugten die beiden Pole eines Daniell'schen Elementes eine Verrückung des Bildes um 100 Theilungen des Maßstabes; jeder Theilstrich betrug $\frac{1}{40}$ Zoll ($0·62^{mm}$) und man konnte noch den sechsten Theil davon schätzen, was einem Winkel von 20" entspricht, wobei die Schiene ungefähr 1 *m* entfernt war. Der Apparat zeigte daher den 600. Theil der Potentialdifferenz der beiden Pole eines Daniell'schen Elementes an. Mit der bifilaren Aufhängung betrug die Ablenkung nicht mehr als 60 Theile, die Empfindlichkeit war daher noch $\frac{1}{400}$ eines Daniell'schen Elementes.

421. In diesem Zustande würde das Elektrometer für die Mehrzahl der Untersuchungen zu fein sein, man kann aber sehr die Empfindlichkeit vermindern, selbst ohne die elektrische Ladung der Flasche zu ändern. Schon dadurch, dass man zwei von den Quadranten isoliert, werden die Ablenkungen 10- oder 13mal schwächer, aber man kann noch weiter gehen, mittelst einer Metallplatte, genannt Inductor, die ober dem einen Quadranten sich befindet. Wenn die vier Quadranten zwei und zwei miteinander verbunden sind, so hat der Inductor keinen Einfluss, man kann ihn isolieren oder ihn entweder mit dem Gehäuse, oder dem benachbarten Quadranten in Verbindung setzen, ohne die Ablenkung in einer merklichen Weise zu verändern; nicht so ist es, wenn die Quadranten entweder alle, oder theilweise isoliert sind. Übrigens wollen wir, um die Beschreibung nicht zu complicieren, durch ein Tableau die verschiedenen Versuchsanordnungen darstellen, welche man anwenden kann, um abnehmende Empfindlichkeiten zu erhalten.

Seien X und Y die beiden Körper, deren Potentialdifferenz man bestimmen will; der eine von ihnen Y wird in permanenter Verbindung mit dem Gehäuse gehalten, das entweder isoliert gehalten ist oder nicht. Seien A und B die beiden Hauptelektroden, I der Inductor, welchen wir ober dem einen der Quadranten der Elektrode B befindlich voraussetzen wollen. Wenn der eine der Buchstaben A oder B in dem folgenden

Tableau in Klammern eingeschlossen ist, so bedeutet dies, dass diese Elektrode ebenso wie die entsprechenden Quadranten isoliert ist; XA bedeutet, dass der Körper X in leitender Verbindung mit der Elektrode A sich befindet; Y, dass dieser Körper allein mit dem Gehäuse in Verbindung steht u. s. w.

1. Gewöhnliche Anordnung:

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{XA} \\ \mathrm{YB} \end{matrix}\right. \qquad \text{oder auch} \qquad \left\{\begin{matrix} \mathrm{XB} \\ \mathrm{YA} \end{matrix}\right.$$

2. Unterdrückung des einen Quadrantenpaares:

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XA} \\ \mathrm{Y} \end{matrix}\right. \qquad (\mathrm{A})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XB} \\ \mathrm{Y} \end{matrix}\right.$$

3. Anwendung des Inductors:

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XA} \\ \mathrm{YI} \end{matrix}\right. \qquad (\mathrm{A})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XB} \\ \mathrm{YI} \end{matrix}\right.$$

4.

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XAI} \\ \mathrm{Y} \end{matrix}\right. \qquad (\mathrm{A})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XBI} \\ \mathrm{Y} \end{matrix}\right.$$

5.

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XI} \\ \mathrm{YA} \end{matrix}\right. \qquad (\mathrm{A})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XI} \\ \mathrm{YB} \end{matrix}\right.$$

6.

$$(\mathrm{A},\mathrm{B})\left\{\begin{matrix} \mathrm{XI} \\ \mathrm{Y} \end{matrix}\right.$$

422. Die größte Schwierigkeit, welcher man bei der Construction dieses Elektrometers begegnet, ist die Wahl des Glases. Thomson wendet für dasselbe Flintglasgefäße an, welche in Glasgow fabriksmäßig dargestellt werden. Er hat ohne Erfolg viele andere Glassorten versucht; die grünlich gefärbten Gläser und die Mehrzahl der weißen Gläser liefern keine guten Resultate, die Ladung der Flasche variiert zu rasch. Der Replenisher ist ebenfalls ein heikler Mechanismus und es gelingt nicht leicht, ihn in einer entsprechenden Weise herzustellen. Alle diese Schwierigkeiten werden ohne Zweifel lange Zeit hindurch dem Gebrauche und überhaupt der Verbreitung dieser Apparate hinderlich im Wege stehen, wenigstens in der Form, welche wir eben beschrieben haben.

423. Modificationen des Elektrometers von Thomson. Mehrere Physiker haben Thomson die Idee kreisförmiger Sectoren entlehnt; um ein constantes Potential zu erhalten, hat man sehr oft die Zuflucht genommen zu einer Säule, die aus einer mehr oder weniger großen Anzahl Elemente bestand. So hat Branly (¹) diesen Apparat in ein Gehäuse gestellt, welches jenem der Drehwage von Coulomb ähnlich ist (Fig. 181); die Nadel dieses Apparates ist mittelst eines Metalldrahtes aufgehängt, und versehen mit einem Spiegel, in welchem man mit einem Fernrohre das Bild einer getheilten Latte betrachtet. Man kann nur vier ebene Sectoren anwenden, welche sich oberhalb oder unterhalb der Nadel befinden und unter einander, zwei und zwei, verbunden sind, und zwar mittelst der oberen Theile der Stäbchen, welche sie tragen; besser ist es aber acht Sectoren zu nehmen, zwischen welchen die Nadel sich befindet. Der Torsionsdraht wird durch einen oberhalb vorhandenen Knopf reguliert, welcher die Nadel in ihre Symmetrielage zu bringen gestattet.

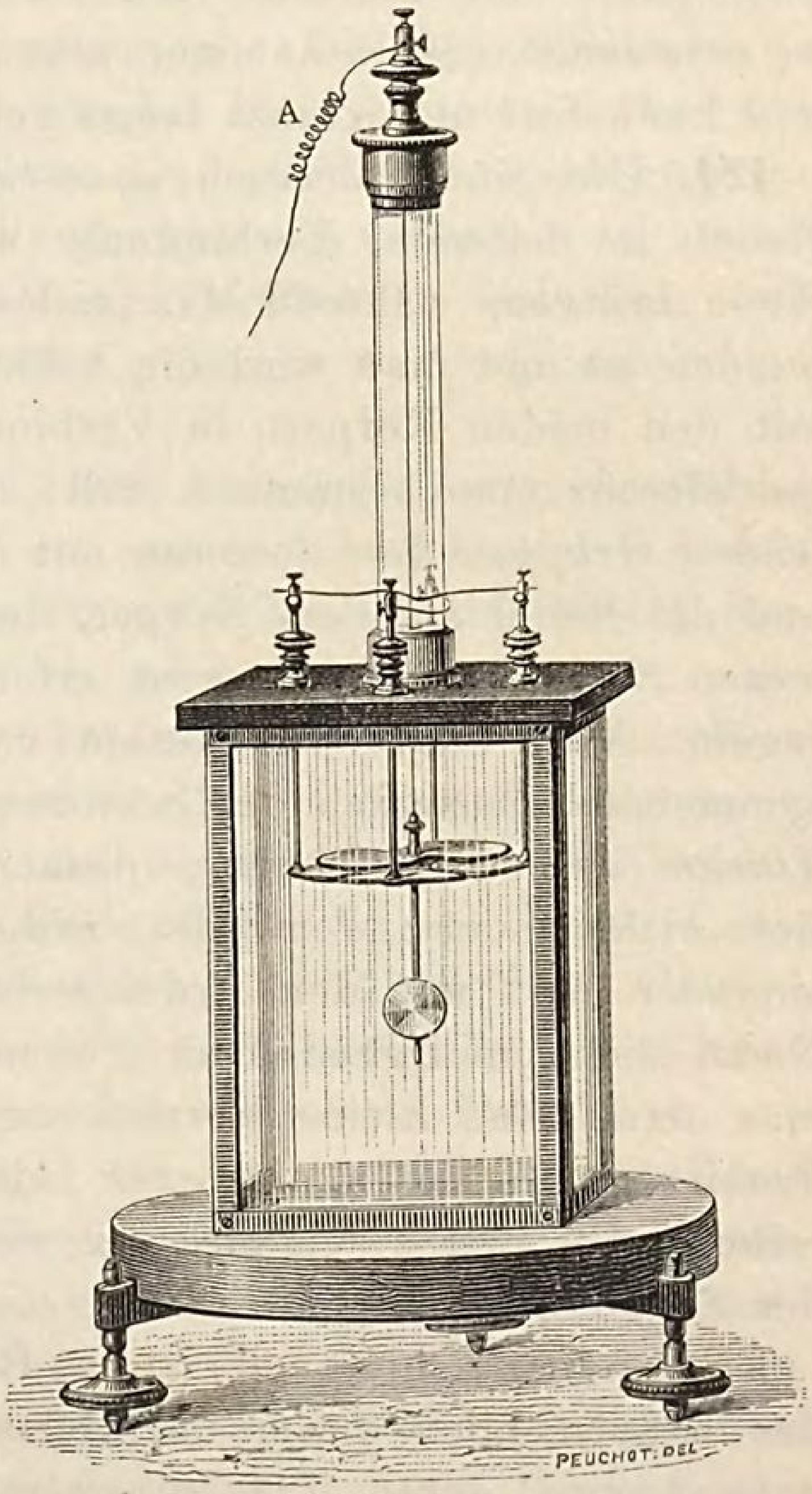


Fig. 181.

Die am bequemsten anzuwendende Säule ist jene von Volta und da es auf die Dimensionen der Elemente nicht ankommt, kann man diese Säule herstellen

(¹) Annales scientifiques de l'École Normale, 2. serie, t. II., pag. 209.

durch Glasröhren oder durch kleine irdene Gefäße, welche vollständig voneinander isoliert sind, indem man sie auf eine Schwefel- oder Schellackplatte stellt, oder noch besser, indem man sie in eine Paraffinschichte setzt. Man bringt in diese Gefäße gewöhnliches Wasser und verbindet sie successive durch eine Doppelplatte aus Zink und darangelöthetem Kupfer. Da das Wasser langsam verdunstet, so kann man in jedem der Gefäße auf die Oberfläche der Flüssigkeit eine Schichte von Öl oder Paraffin gießen; eine so construierte Säule hat nur sehr beschränkte Dimensionen und kann fast unbegrenzt lange gebraucht werden.

424. Um einen Versuch anzustellen, wird man z. B. die Nadel in leitende Verbindung mit dem einen Pole der Säule bringen, während der andere Pol mit der Erde verbunden ist und man wird die beiden Sectorensysteme einzeln mit den beiden Körpern in Verbindung setzen, deren Potentialdifferenz man bestimmen will; oder man verbindet diese beiden Gruppen von Sectoren mit den beiden Polen der Säule und die Nadel mit dem Körper, dessen Potential man kennen lernen will. Das Experiment erfordert einige Vorsichtsmaßregeln. Man muss sich dessen versichern, dass die Nadel symmetrisch bezüglich der Sectoren ist, wenn der Draht ohne Torsion ist, oder vielmehr, dass die Gleichgewichtsposition sich nicht ändert, wenn die beiden Sectorensysteme untereinander und mit der Erde verbunden sind, während die Nadel sich auf irgendeinem Potentiale befindet. Beobachtet man dann eine kleine Verrückung, so muss man sie durch Probieren annullieren, entweder dadurch, dass man den Draht mittelst des oberen Knopfes ein wenig dreht oder den einen der Sectoren hebt oder senkt.

Eine andere Fehlerquelle ist das Bestehen der Schwingungen, das hauptsächlich durch die Gestalt der Nadel selbst veranlasst wird, deren Trägheitsmoment ziemlich groß ist, und auch durch die Länge des Aufhängedrahtes. Diese Schwingungen sind zweierlei Art: die einen horizontalen entstehen durch die Torsion des Drahtes, welcher nicht in seiner Gleichgewichtslage verharrt, die anderen sind verticale und entstehen jedesmal, wenn ein Stoß oder ein Zittern den Apparat

bewegt. Man kann diese Schwingungen sehr schnell dämpfen, wenn man an der Nadel in verticaler Richtung in der Verlängerung der Axe ein kleines Glasstäbchen befestigt, das eine Platinplatte trägt, welche in Schwefelsäure taucht. Die Anwesenheit dieses Scheibchens vermindert keineswegs die Genauigkeit der Messungen, denn sie ändert nicht die Gleichgewichtslage; nur muss man dafür Sorge tragen, dass das Plättchen vollständig eingetaucht ist.

Schließlich ist es nothwendig, das Elektrometer von leitenden Schirmen zu umgeben, die mit dem Erdboden in leitender Verbindung stehen, um das Elektrometer der Wirkung äußerer Körper zu entziehen. Das einfachste diesbezügliche Mittel besteht darin, die Wandungen des Gehäuses am besten auf ihrer inneren Seite mit Stanniolstreifen zu bedecken, zwischen welchen Zwischenräume gelassen wurden, welche die Beobachtungen gestatten.

Die Versuche von Branly und Angot[1] haben dargethan, dass, wenn die Nadel auf ein constantes Potential gebracht wurde, die Ablenkung der Potentialdifferenz der beiden Sectorensysteme proportional ist, wenigstens bis zu 3^0, einer Größe, von welcher man leicht den tausendsten Theil schätzen kann. Was die Empfindlichkeit des Apparates belangt, so hängt sie von den Dimensionen des Drahtes, der Entfernung der Nadel von den Sectoren und der Anzahl der Elemente der Säule ab; man kann sie daher nach Belieben modificieren und es ist nicht schwer, eine Potentialdifferenz zu schätzen, welche gleich $\frac{1}{100}$ jener eines Elementes von Daniell ist.

425. Ed. Bequerel hat eine nur wenig verschiedene Anordnung getroffen. Die Sectoren wurden ersetzt durch vier verticale Streifen, welche wie die vier Kugeln in dem Apparate von Hankel angeordnet waren und die Nadel war auch aufgehängt an einen Metalldraht und bestand aus einem Stäbchen, das an jedem Ende in eine verticale Scheibe ausgieng. Die Nadel war durch einen Platindraht, der in ein Näpfchen, in welchem Schwefelsäure sich befand, tauchte, in leitender Verbindung mit dem einen Pole einer Säule und die

[1] Annales scientifique de l'École Normale, 2. serie, T. III., pag. 263.

beiden Lamellensysteme mit den Körpern, deren Potentialdifferenz man studierte. Diese Anordnung bietet ein specielles Interesse, weil es leicht ist, dieses Elektrometer in ein absolutes zu verwandeln; es genügt z. B. die Nadel in zwei rechtwinklige Platten endigen zu lassen und sie durch eine passend ausgeschnittene Schutzplatte einzuschließen, welche sich in der Ebene befindet, in welcher die Nadel genau in der Gleichgewichtsposition sein wird.

Betrachten wir eine der Seiten der Nadel; sei V ihr Potential, V_1 und V_2 die Potentiale der seitlichen Lamellen, welche zu beiden Seiten in derselben Distanz D sich befinden. Die Anziehung auf die Einheit der Oberfläche wird einerseits $\frac{(V - V_1)^2}{8\pi D^2}$ und andererseits $\frac{(V - V_2)^2}{8\pi D^2}$ sein. Die Resultierende F wird gleich der Differenz dieser beiden Wirkungen sein, also

$$F = \frac{1}{8\pi D^2}[(V - V_1)^2 - (V - V_2)^2] = \frac{V_2 - V_1}{8\pi D^2}[2V - (V_1 + V_2)].$$

Sei b die Höhe, a die Breite der Rechtecke, in welche die Nadel ausgeht und $2r$ deren Entfernung. Die Wirkung, welche auf einen verticalen Streifen von der Breite dy, gelegen in einer Entfernung y von der Axe, ausgeübt wird, wird sein $Fbdy$ und das Moment dieser Kraft bezüglich der Axe, wird $Fbydy$ sein. Das resultierende Moment der auf das ganze Rechteck ausgeübten Wirkungen ist daher

$$\int_r^{r+a} F\, by\, dy = \frac{Fb\,[(r+a)^2 - r^2]}{2} = F\, ab\left(r + \frac{a}{2}\right).$$

Dieses Moment ist ebenso groß, als wenn alle Elemente der Oberfläche in der Mitte des Rechteckes befindlich wären; diese Eigenschaft würde auch für eine kreisförmige Scheibe und für jede Oberfläche, welche symmetrisch bezüglich einer Verticalen ist, gelten. Eine gleiche Kraft wirkt auf das andere Ende der Nadel. Das gesammte Moment der elektrischen Wirkung ist daher, wenn man mit s die Oberfläche jedes Rechteckes und mit d die Entfernung ihrer Mittelpunkte bezeichnet,

$$F\,ab\,(2r+a) = \frac{V_2 - V_1}{8\pi D^2}[2V - (V_1 + V_2)]\,sd.$$

Man könnte ohne Schwierigkeit das Stäbchen in die Rechnung einbeziehen, und wenn die Nadel aus einer einzigen rectangulären Platte bestehen würde, würde es hinreichen, in diesem Ausdrucke $r = o$ zu setzen. Man kann nun die Torsion des Drahtes T bestimmen, welche nothwendig ist, um dieser elektrischen Wirkung das Gleichgewicht zu halten; wenn man c das Drehungsmoment des Drahtes für einen Winkel gleich der Einheit setzt, wird man daher haben:

$$cT = \frac{V_2 - V_1}{8\pi D^2}[2V - (V_1 + V_2)]\,sd,$$

in welchem Ausdrucke alle Größen mit Ausnahme der Potentiale direct bestimmt werden können.

Man erkennt leicht den Vortheil, welchen man aus diesem Apparate ziehen kann.

Sind die Nadel und der eine Leiter in leitender Verbindung mit dem Erdboden, so wird man in der Formel $V = V_2 = o$ setzen und es wird übrig bleiben:

$$cT = \frac{V_1^2}{8\pi D^2}sd,$$

welche Gleichung das Potential V_1 in absoluten Zahlen gibt.

Wenn die Potentiale V_1 und V_2 gleich und entgegengesetzt bezeichnet sind, so wird die Torsion T′ durch die Gleichung

$$cT' = \frac{VV_1}{2\pi D^2}\,sd$$

gegeben sein.

Nehmen wir an, man hätte diesen Versuch, in welchem die beiden Plattensysteme in leitender Verbindung mit den beiden Polen einer Säule sind, angestellt, und bringt man nun den einen von ihnen in Verbindung mit dem Erdboden, dann wird der Wert von V_1 verdoppelt und V_2 wird Null. Bezeichnet man T″ die neue Torsion, so wird man, wenn man V_1 durch $2V_1$ und V_2 durch Null ersetzt, haben:

$$cT'' = \left[-\frac{VV_1}{2\pi D^2} + \frac{V_1^2}{2\pi D^2}\right] sd;$$

und daraus erhält man:

$$c(T' + T'') = \frac{V_1^2}{2\pi D^2} sd,$$

welche Gleichung wieder das Potential V_1 in absoluten Werten liefert. Als Bestätigung folgt daraus:

$$\frac{T' + T''}{2} = T.$$

426. Weitere Modificationen des Quadrantenelektrometers. Eine sehr bequeme Form wurde dem Quadrantenelektrometer durch Stöhrer (Fig. 182) ertheilt. An zwei Fäden hängt eine biscuitförmige Aluminiumnadel und kann sich in horizontaler Ebene drehen, und zwar in einem Messingkasten, der in der Mitte der oberen und unteren Fläche kreisförmige Öffnungen hat und in vier Quadranten getheilt ist, von denen je zwei diametral gegenüberstehen und leitend verbunden sind. Von zwei nebeneinanderstehenden Quadranten gehen Metallstäbchen aus, die den Deckel des Apparates durchsetzen und zur Zuleitung oder Ableitung von Elektricität dienen. Die Fäden, an welchen die Nadel befestigt ist, können durch einen am oberen Theile des Apparates ersichtlichen Knopf gedreht werden und in der Weise die Nadel selbst. Man kann durch eine passende Vorrichtung den Abstand der beiden Coconfäden nach Belieben variieren. Durch einen Platindraht, der die Nadel in deren Mitte durchsetzt und unten in ein Gefäß mit concentrierter Schwefelsäure taucht, welches — um ein Überlaufen der Flüssigkeit zu verhindern — zweckmäßig aus zwei ineinander gestellten Gefäßen hergestellt werden kann, kann der Nadel Elektricität und zwar mittelst eines zweiten Stäbchens, welches in C endigt und ebenfalls in die Schwefelsäure taucht, mitgetheilt werden. Gleichzeitig werden die Schwingungen der Nadel durch die in der Flüssigkeit vor sich gehende Bewegung eines Theiles des Platindrahtes, an dem oft Querdrähte angebracht sind, gedämpft. An der Nadel ist ein Spiegel befestigt, welcher in dem Innenraume

eines Bügels schwebt, der oben in einen Ring ausgeht, in den eine Fassung mit der in der Figur ersichtlichen Glasröhre eingeschliffen ist. Über den Spiegel setzt man eine Metallbüchse mit seitlichem Fenster.

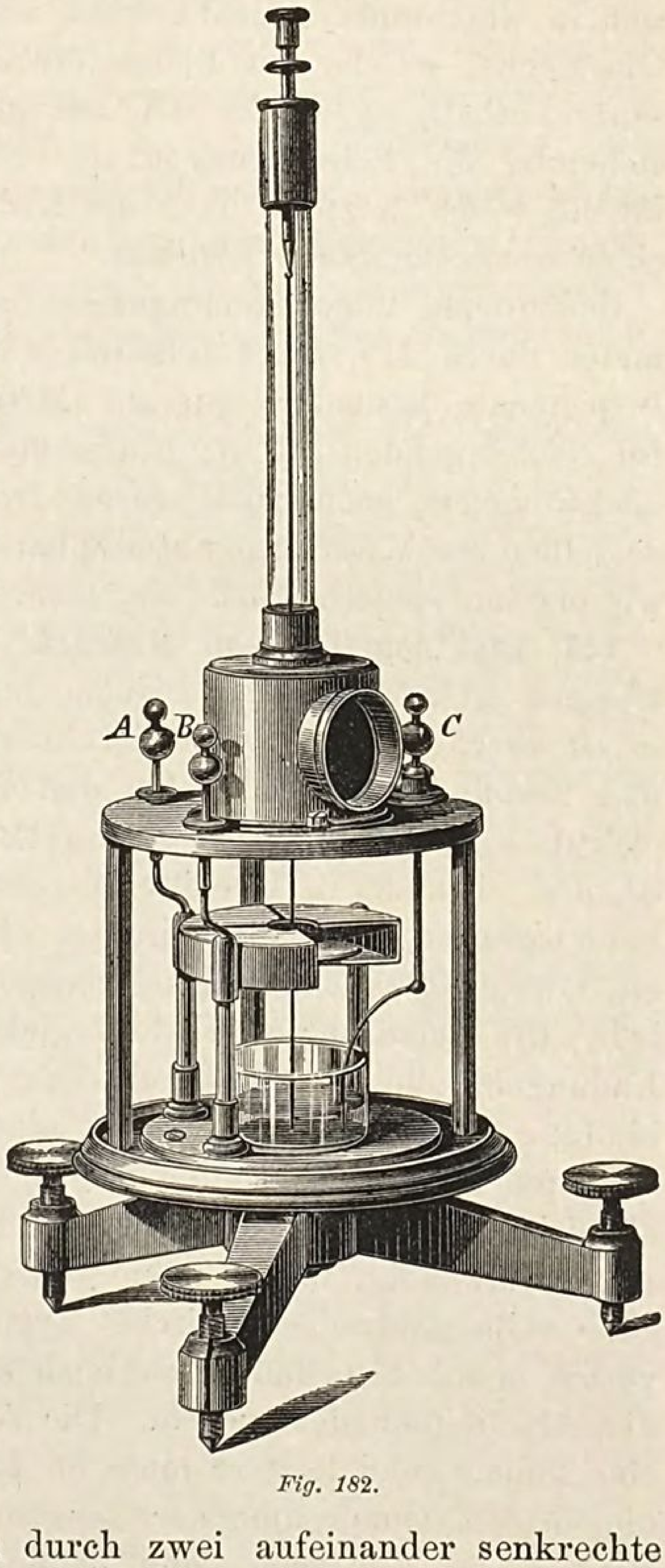


Fig. 182.

Die Bodenplatte, welche auf drei Messingsäulen eine zweite Messingplatte trägt, ist auf einem conischen Zapfen drehbar eingerichtet und trägt auf Glasfüßen die vier Quadranten. Auf den Deckel und die drehbare Grundplatte ist eine Metalltrommel aufgesetzt, welche den Apparat bedeckt und verhindert, dass äußere Elektricitätsmengen einen Einfluss auf die Organe des Elektrometers nehmen und störend einwirken.

In dem von Edelmann 1879([1]) construierten Quadrantenelektrometer besteht die Nadel aus zwei Cylindermantelabschnitten, welche durch einen Querarm verbunden sind. Die Quadranten werden ebenfalls aus einem verticalen Cylinder gebildet, den man durch zwei aufeinander senkrechte Axenschnitte in vier Quadranten theilt. Die Nadel ist in diesem

([1]) Carl's Repertorium Bd. 15, 1879.

Instrumente bifilar aufgehängt und trägt an der Drehungsaxe oberhalb einen Spiegel. Die Organe des Elektrometers befinden sich in einer unten geschlossenen, an dem Deckel befestigten Glasglocke, welche am Boden etwas concentrierte Schwefelsäure enthält, in welche der mit der Nadel in Verbindung stehende, die Schwingungen der Nadel dämpfende Flügel taucht, welch' letzterer auch die Ladung der Nadel z. B. mit einer trockenen Säule gestattet.

Bedeutende Vervollkommnungen hat das Quadrantenelektrometer durch Mascart erfahren und es eignen sich dessen Instrumente besonders gut zur Messung der Luftelektricität. Im Nachfolgenden soll die Einrichtung und Aufstellung dieses Elektrometers ausführlich erörtert werden(1); den Gebrauch desselben zur Messung der atmosphärischen Elektricität werden wir erst an späterer Stelle angeben.

427. Elektrometer von Mascart. Das Mascart'sche Elektrometer ist auch auf das Princip des Thomson'schen basiert; es ist aber einfacher construiert, besitzt dieselbe Genauigkeit und Empfindlichkeit, hat aber den Vortheil, dass es, was die elektrischen Wirkungen betrifft, vollkommen symmetrisch ist. Die ebenfalls in Biscuitform geschnittene Aluminiumnadel kann mittelst eines Platindrahtes elektrisiert werden, der in ein Glasgefäß taucht, welches concentrierte Schwefelsäure enthält. Die Quadranten erhalten gleiche und entgegengesetzte Ladungen, und zwar dadurch, dass man sie in leitende Verbindung mit den beiden Polen einer Batterie von einer bestimmten Anzahl Elementen bringt, deren Mitte zum Boden abgeleitet ist. Diese letztgenannte Vorsichtsmaßregel erweist sich nothwendig, wenn man wünscht, dass das Instrument eine vollkommene elektrische Symmetrie bewahrt. In das vorhin erwähnte Gefäß taucht noch ein Stäbchen, welches von der Aluminiumnadel ausgeht. Die Aufhängung der Nadel ist eine bifilare und letztere muss im Ruhezustande genau gegen die beiden Quadrantenpaare symmetrisch sein, in welcher Position sie sich auch dann befindet, wenn die Quadranten

(1) Man sehe diesbezüglich die „Notice sur l'électromètre de M. Mascart", welche von dem Constructeur des Instrumentes J. Carpentier ausgegeben wurde.

Elektricitäten von gleichen und entgegengesetzten Potentialen besitzen, während die Nadel mit dem Erdboden verbunden ist.

Will man bei dieser Anordnung die Potentiale verschiedener Elektricitätsquellen vergleichen, so ladet man die beiden Quadrantenpaare constant und bringt die Nadel successiv mit den beiden Elektricitätsquellen in leitende Verbindung; die entstehenden Nadelablenkungen sind unter der Voraussetzung, dass sie nicht groß sind, den studierten Potentialen proportional. Man kann dieses aus der Theorie des Elektrometers folgende Resultat ganz leicht mit demselben experimentell bestätigen.

Im Nachstehenden wollen wir nun genauer die Details des Mascart'schen Elektrometers betrachten. In der letzten Form, welche Mascart diesem Instrumente gegeben hat (Fig. 183), sind die Quadranten, die Nadel und das Glasgefäß in einem Metallcylinder eingeschlossen, welcher einen Schutz gegen Luftströmungen bildet, andererseits die eingeschlossenen Theile gegen äußere influencierende Wirkungen schützt. Der Cylinder ist an seinem oberen Theile durch eine bewegliche Kupferplatte geschlossen, welche die Hauptbestandtheile des Instrumentes trägt und durch zwei Schraubenknöpfe R und R' in ihrer Lage erhalten wird.

Die Quadranten sind an dieser Platte befestigt, und zwar mittelst isolierender Glasstäbe; der eine von ihnen kann verstellt werden, der Regulierung halber, indem man den Schraubenknopf V leicht in dem einen oder anderen Sinne drückt. Die Quadranten stehen nach außen in leitender Verbindung mittelst zweier Stäbchen B und B', welche frei eine Öffnung, die in der Platte angebracht ist, durchsetzen.

Ein kleines Hütchen C, welches sich auf dem Stabe mit sanfter Reibung verschieben lässt, gestattet die Verbindung eines jeden Stabes mit dem Gehäuse herzustellen oder nach Belieben zu isolieren. Es reicht hin, das Hütchen in die Lage C' zu bringen, um das Stäbchen und das Quadrantenpaar, welches demselben entspricht, zu isolieren und es in die Lage C herabzulassen, um eine Verbindung des Quadrantenpaares mit dem Metallgehäuse des Instrumentes und demzufolge mit dem Erdboden herzustellen.

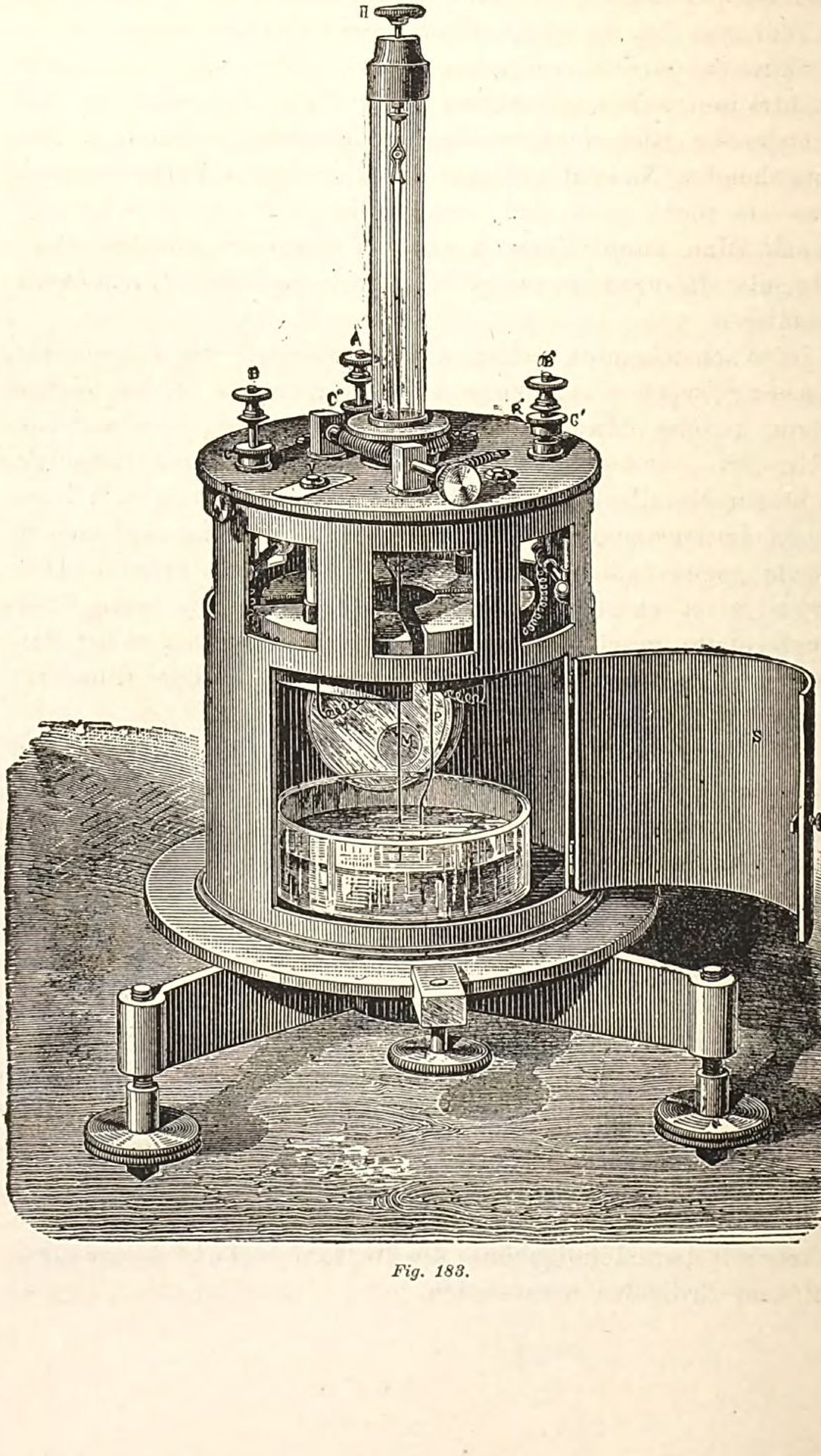


Fig. 183.

Ein drittes Stäbchen A, wie die vorhergehenden angeordnet, ist in Verbindung mit dem Platinstabe P, der zur Elektrisierung der Nadel durch die Schwefelsäure bestimmt ist.

Um die Nadel in eine passende Lage zu bringen, kann die Glasröhre, welche die Aufhängungsvorrichtung trägt, an ihrem unterem Theile mittelst einer Tangentialschraube gerichtet werden, welche zugleich eine sehr schwache Drehung derselben gestattet.

Ist es nothwendig, die Nadel um einen etwas größeren Winkel zu drehen, so kann man die Röhre mit der Hand drehen, nachdem man die Schraube entfernt hat.

Die Aufhängung besteht aus einem Coconfaden, dessen beide Enden zusammengeknüpft sind; dieser Faden geht an seinem oberen Ende in ein Doppelhäkchen, dessen Weite variabel ist, und in ein anderes an der Nadel befestigtes Häkchen.

Das obere Häkchen kann gehoben oder gesenkt werden, wenn man den Knopf H nach rechts oder links dreht; andererseits besteht dieses Häkchen aus zwei Armen, welche man nach Belieben mittelst eines Knopfes entfernen kann, wodurch die beiden Aufhängepunkte der bifilaren Aufhängung mehr oder weniger einander nahe gebracht werden. In den Instrumenten der neueren Construction ist die leicht zerbrechliche Glasröhre, durch welche noch ein Schlüssel zur Regulierung der beiden Fäden geht, durch eine Metallröhre ersetzt. Sie trägt am oberen Ende eine Welle, auf welcher sich der Faden aufrollt, und eine Schraube, welche erlaubt, die Entfernung der beiden Fäden zu regeln. Das Legen der Fäden und die Regulierung derselben sind dann viel leichter.

Das Gehäuse des Apparates besitzt mehrere Öffnungen; eine Thür, welche den unteren Theil der Sectoren zu beobachten und das mit Schwefelsäure erfüllte Gefäß einzuführen gestattet; acht Fenster befinden sich am oberen Theile des Gehäuses und werden durch ein cylindrisches Glas geschlossen; durch letzteres kann man die Nadel und die Quadranten sehen. Eine dem Spiegel gegenüber gestellte Linse L vermag ein reines reflectiertes Bild zu erzeugen. In diesem Falle ist der Spiegel ein ebener; man kann aber auch einen Concav-

spiegel anwenden, wobei man die Linse durch eine Platte mit parallelen Seiten ersetzt.

Der Platinstab, welcher den Spiegel trägt und in die Schwefelsäure taucht, ist am unteren Theile von zwei oder drei kleinen Nadeln durchsetzt, und zwar normal zum Stabe und in einer und derselben Ebene. Diese Nadeln bilden eine Art von Gitter, welches die Schwingungen in einer beträchtlichen Weise dämpft.

428. Die Ablesung der Nadelablenkung kann entweder durch Projection des reflectierten Bildes oder durch directe Beschauung erfolgen.

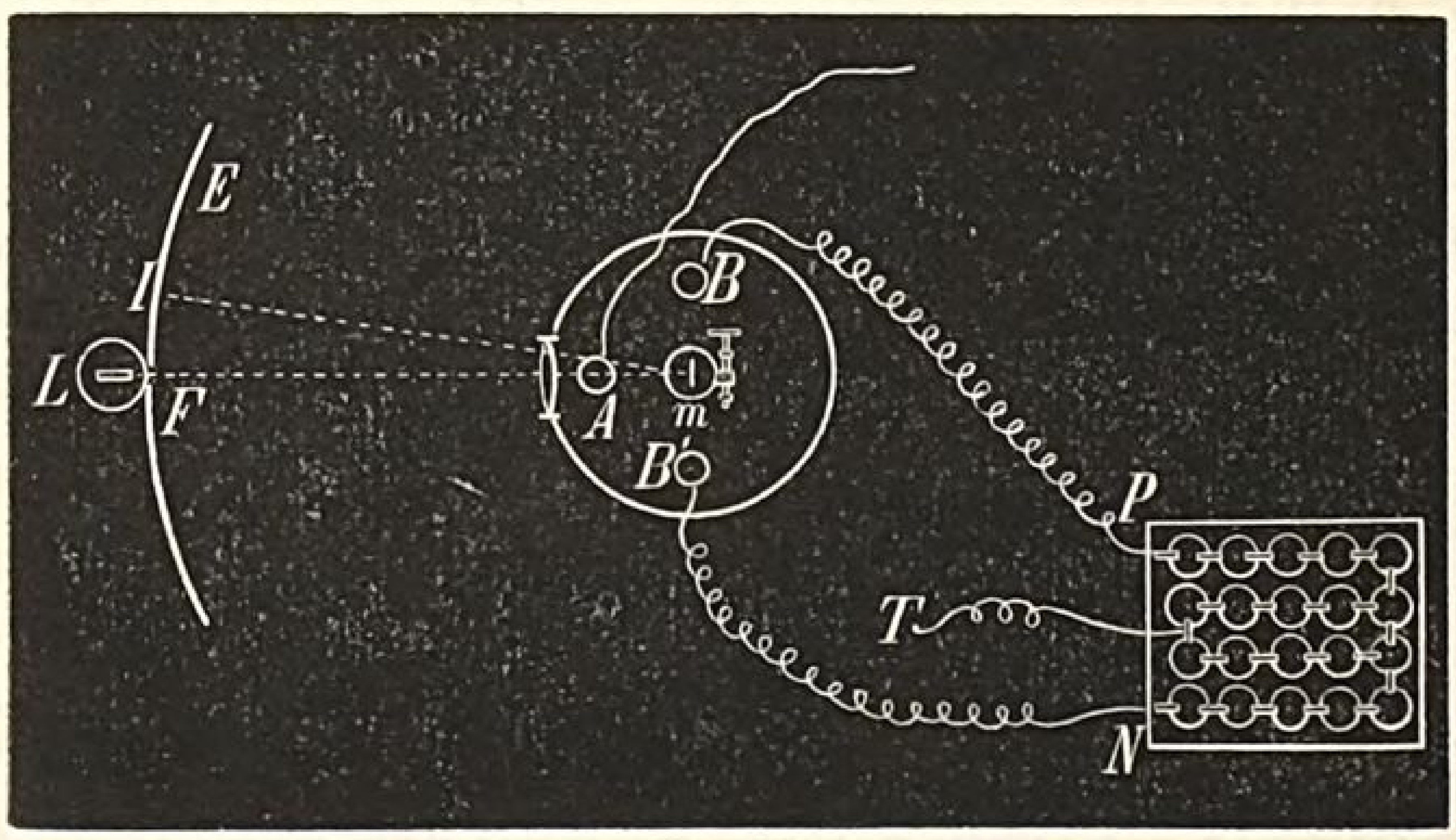


Fig. 184.

Im ersten Falle trägt ein Schirm E (Fig. 184) einen horizontalen getheilten Streifen und hat eine Öffnung F, welche im Brennpunkte der Linse des Elektrometers sich befindet. Eine Petroleumlampe L sendet durch diese Öffnung ein Strahlenbündel auf den Spiegel *m*; das reflectierte Bündel entwirft auf der Scala ein leuchtendes Bild J der Öffnung, welches verrückt wird, wenn sich die Nadel dreht. Wenn die Lampe eine flache Flamme erzeugt, so kann man sich einer sehr breiten Öffnung bedienen und auf der getheilten Scala das Bild der Flamme selbst projicieren. Eine andere vorzügliche Methode ist die, dass man in dem Schirme eine weite, rechteckige oder kreisförmige Öffnung anbringt, vor welcher man einen Metalldraht spannt. Das reflectierte Bild besteht dann aus einem breiten Lichtfleck, der von einem schwarzen Strich unterbrochen ist.

Diese Anordnung hat den Vortheil, dass die Theilungen der Scala rechts und links von dem Zielpunkte erleuchtet sind, ein Umstand, der die Ablesungen erleichtert.

Im zweiten Falle beobachtet man mittelst eines Fernrohres die Theilungen einer horizontalen Scala, welche durch Reflexion im Spiegel *m* gesehen wird. Das System der Linse und des ebenen Spiegels spielt die Rolle eines Concavspiegels; man stellt die Eintheilung in die Brennebene dieses Systemes und man betrachtet sie mit einem Fernrohre, das auf Unendlich eingestellt ist. Die Scala ist ein wenig tiefer als die Axe des Systemes gestellt, so dass die reflectierten Strahlen ober der Scala gehen, und das Fernrohr erreichen. Ersetzt man die Linse durch eine planparallele Glasplatte und den ebenen Spiegel *m* durch einen Hohlspiegel, so muss die Scala im Hauptbrennpunkte des Spiegels aufgestellt werden und man beobachtet wieder mit dem auf Unendlich eingestellten Fernrohre.

Das Instrument ist ferner auf einem Dreifuße mit Stellschrauben und mit sich drehender Platte gestellt, mittelst welcher man es orientieren und mit großer Leichtigkeit vertical stellen kann.

Die beiden Stäbchen B und B′ sind mit den Polen P und N einer Säule in leitender Verbindung, deren Mitte mit dem Erdboden durch einen Draht T leitend verbunden ist.

429. Regelung und Ingangsetzung des Instrumentes für den experimentellen Gebrauch. Wenn man sich des Elektrometers bedienen will, muss man zuerst concentrierte und reine Schwefelsäure in das Glasgefäß bringen; die Entfernung des Glasgefäßes kann in der Weise geschehen, dass man die beiden Knöpfe R und R′ abschraubt und die obere Platte entfernt.

Nehmen wir an, man experimentiere nach der Projectionsmethode: Man stellt das Instrument der Reflexionsscala gegenüber auf, bringt mittelst der sich drehenden Platte die Linse gegenüber der Eintheilung, dreht den Knopf H, bis die Nadel sich fast in gleicher Entfernung von den oberen und unteren Seiten der Quadranten einstellt. Man operiert dann mit den Stellschrauben, um den Stab, welcher die Nadel

trägt, so genau als möglich in den Mittelpunkt der Quadranten zu bringen und stellt sie auf Null ein.

Die erste Vorsichtsmaßregel besteht darin, dass man das Metallgehäuse in leitende Verbindung mit dem Erdboden bringt, was man in der Weise vollzieht, dass man z. B. an einem der Füße einen Kupferdraht befestigt, dessen anderes Ende zu den Wasserleitungs- oder Gasröhren abgeleitet ist. Man senkt dann die drei Hüte C, C′, C″, um die Quadranten und die Nadel vollkommen neutral zu machen und dann bringt man zuerst mit der Hand, sodann mit der Tangentialschraube die Symmetrielinie der Nadel in die Richtung des einen Schlitzes der Quadranten. Der Spiegel wird dann zur Seite der Scala gedreht und nun kann man die Höhe derselben und ihre Entfernung so regulieren, dass das Bild sich auf der Eintheilung gut projiciert; man reguliert auch ihre Lage in horizontaler Richtung, so dass, wenn man durch die Öffnung blickt, die ober der Thüre des Elektrometers ist, man den Nullpunkt der Theilung in der Verlängerung der Trennungslinie der Sectoren erblickt. Es bleibt nur übrig den Lichtfleck auf Null zu bringen, indem man ein wenig die Tangentialschraube dreht. Diese Einstellung auf Null ist dennoch nicht definitiv, denn die Elektrisierung der Quadranten kann ein wenig die Lage der Nadel verändern. Um die Quadranten zu laden, verbindet man die Stäbchen B und B′ mit den beiden Polen der Batterie und man hebt gleichzeitig die beiden entsprechenden Hütchen C und C′, während man das dritte Hütchen C″ gesenkt erhält. Wenn der Lichtfleck unbeweglich bleibt, so ist das Elektrometer reguliert und man kann zu den Versuchen übergehen; wenn der Lichtfleck sich nach rechts oder links bewegt, kann man ihn auf Null bringen, indem man die beweglichen Quadranten leicht verrückt.

Man kann noch etwas die Scala im entgegengesetzten Sinne der Ablenkung des Fleckes verschieben, die Säule entfernen, die Quadranten mit dem Erdboden verbinden und das Bild vom neuen mittelst der Tangentialschraube auf Null bringen. Man kann dann auch bestätigen, ob die Elektrisierung der beiden Quadrantenpaare keine Ablenkung hervorruft.

Nehmen wir nun an, man wollte die Ablenkung mittelst directer Ablesung oder mittelst eines Fernrohres ablesen. Man bestimmt annähernd die Lage des Hauptbrennpunktes des Spiegels M, wenn dieser Spiegel concav ist, oder des Systems, welches aus der Sammellinse und dem ebenen Spiegel besteht; man stellt dann die Scala so symmetrisch als möglich zur Symmetrieebene des Elektrometers, so dass der Nullpunkt der Eintheilung in die Verlängerung der Trennungslinien der Sectoren fällt; diese Scala muss etwas unter der horizontalen Ebene sein, welche durch die Axe des reflectierenden Systemes hindurchgeht. Etwas ober dieser Ebene und in einer beliebigen Entfernung stellt man die Axe des Fernrohres auf, welches man vorläufig auf Unendlich eingestellt hat, so dass man die Theilungen der Scala durch Reflexion im Spiegel wahrnimmt und man verrückt die Scala, bis die Theilungen gerade recht stehen. Man notiert die Theilung, welche sich unter dem verticalen Faden des Fadenkreuzes befindet. Man elektrisiert dann die beiden Quadrantenpaare wie oben, wobei man die Nadel in Verbindung mit dem Erdboden lässt; bedeckt der Faden des Fadenkreuzes wieder denselben Theilstrich, so ist die Nadel symmetrisch zu den Quadranten und man hat nur mehr schließlich das Fernrohr derart zu stellen, dass das Bild des Nullpunktes der Scala unter dem Faden des Fadenkreuzes ist. Wenn der beobachtete Theilstrich sich infolge der Elektrisierung der Quadranten geändert hat, so dreht man die Tangentialschraube derart, dass man den ursprünglich notierten Theilstrich in das Fadenkreuz bringt. Man klebt dann mittelst Arcanson (einer Mischung von 1 Theil gelben Wachses und ungefähr 4 Theilen Colophonium), welches leicht schmilzt und welches, einmal abgekühlt, sehr stark hält, die Stücke an, welche leicht sich verrücken können.

Die eine der größten Schwierigkeiten, welcher man bei der Construction des Elektrometers begegnet, ist die vollkommene Isolierung der Quadranten und der Nadel.

Die Schwefelsäure, welche in dem Gefäße eingeschlossen ist, erhält die Glasstäbchen vollkommen trocken, aber diese Bedingung genügt nicht immer und es ist nothwendig, auf

experimentellem Wege die Isolierung der verschiedenen Theile zu erproben.

Man isoliert ein Quadrantenpaar und elektrisiert dasselbe sehr schwach; zu diesem Zwecke nähert man z. B. dem Elektrometer einen elektrisierten Körper, bis das Bild um die Hälfte der Scala abgelenkt ist, berührt mit dem Finger den Knopf B oder B', welcher isoliert war; das Bild kehrt auf Null zurück. Man entfernt den Finger, dann den influencierenden Körper; das Bild wandert auf die andere Seite.

Die Isolierung ist umso besser, je langsamer das Bild, nachdem es feststand, sich dem Nullpunkte der Scala nähert. Man wiederholt denselben Versuch mit dem anderen Quadrantenpaare (es genügt, zu diesem Behufe A und B zu verbinden). Wenn dieses System isoliert ist und das andere Quadrantenpaar mit dem Erdboden verbunden ist, macht man ein ähnliches Experiment, welches den Verlust angibt, welchen das System der Nadel und eines Quadrantenpaares erleidet.

Im allgemeinen stellt man sich mit dem Nachweise zufrieden, dass der Verlust durch die Nadel sehr langsam ist; denn die Säule reicht bei gewöhnlicher Anordnung immer hin, um die Potentiale der Quadranten zu erhalten. Zu diesem Zwecke sind die beiden Stäbe B und B' in leitender Verbindung mit den beiden Polen einer Volta'schen Säule von 20 Elementen, deren Mitte mit dem Erdboden verbunden ist; man gibt der Nadel mittelst des Stäbchens A eine gewisse Ladung, entweder mittelst eines kleinen Elektrophors oder indem man dasselbe einige Momente mit dem einen der Stäbchen B oder B' berührt. Man beurtheilt dann den Wert der Isolierung nach der Langsamkeit, mit welcher die abgelenkte Nadel gegen Null zurückkehrt.

430. Will man die Potentiale zweier Elektricitätsquellen vergleichen, zweier Elemente z. B., so bringt man die beiden Stäbe B und B' auf entgegengesetzt gleiche Potentiale, verbindet die erste Elektricitätsquelle durch einen leitenden Draht mit dem Knopfe A; ein Commutator ist in diesem Drahte eingeschaltet. Der Commutator gestattet, abwechselnd die Nadel mit dem Erdboden oder mit der Elektricitätsquelle zu verbinden: der Unterschied der beiden entsprechenden

Ablesungen, sobald die Nadel in Ruhe ist, gibt die Ablenkung an, welche dem Potentiale der Elektricitätsquelle proportional ist. Man beginnt dieselbe Operation für die zweite Elektricitätsquelle, das Verhältnis der beiden Ablenkungen ist dem Verhältnisse der Potentiale der beiden Elektricitätsquellen proportional.

Der in den folgenden Figuren 185 und 186 dar gestellte Commutator eignet sich sehr gut für diese Art Versuche. Wenn man z. B. den Unterschied des Potentials (oder die elektro-

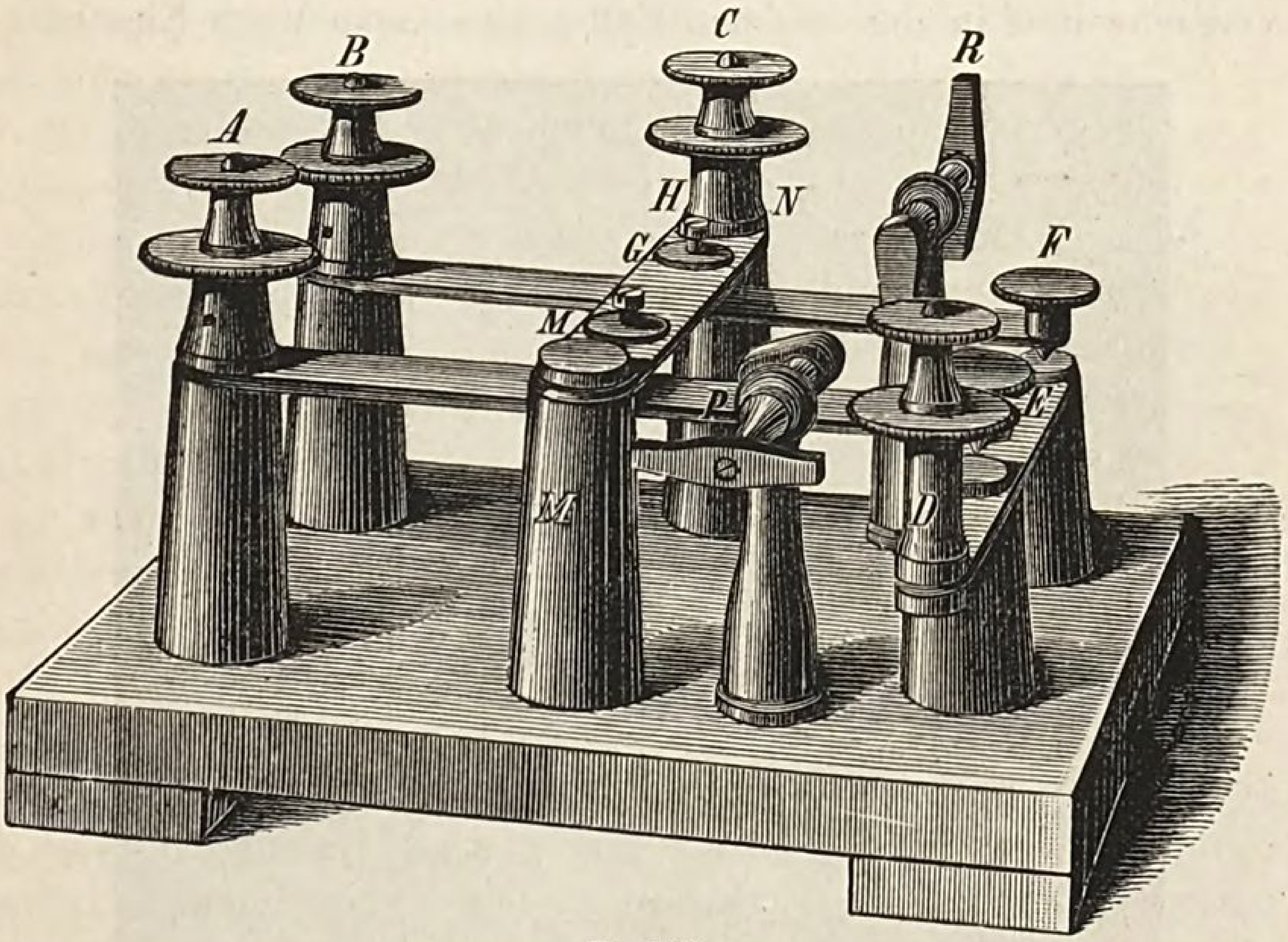


Fig. 185.

motorische Kraft) eines Elementes X bestimmen will, so kann man die Verbindungen wie folgt herstellen. Man sieht, dass wenn man den Taster F herunterdrückt, der positive Pol des Elementes in Verbindung mit der Elektrometernadel steht, während der negative Pol zur Erde abgeleitet ist. Das Umgekehrte findet statt, wenn man den Taster E senkt. Die Entfernung der beiden entsprechenden Positionen des Bildes ist der doppelten elektromotorischen Kraft proportional, welche man sucht; man eliminiert so die Fehler der Symmetrie und der Regulierung.

Die Empfindlichkeit des Apparates hängt von der Entfernung der beiden Fäden der bifilaren Aufhängevorrichtung

ab und von der Anzahl der Elemente, welche die Ladungssäule besitzt; sie kann von der Art sein, dass ein einziges Daniell'sches Element das Bild bis zum Ende der Scala ablenkt, was gestattet, davon den 1000. Theil zu bestimmen.

Diese Empfindlichkeit ist daher je nach der Natur der Versuche variabel. Man kann 10 bis 100 Elemente anwenden, um die Quadranten zu laden, aber 40 genügen im allgemeinen. Die Elemente können sehr klein sein, aber auch so identisch als möglich und wohl isoliert. Für Vorlesungsversuche und in den meisten Fällen kann man Volta-Elemente

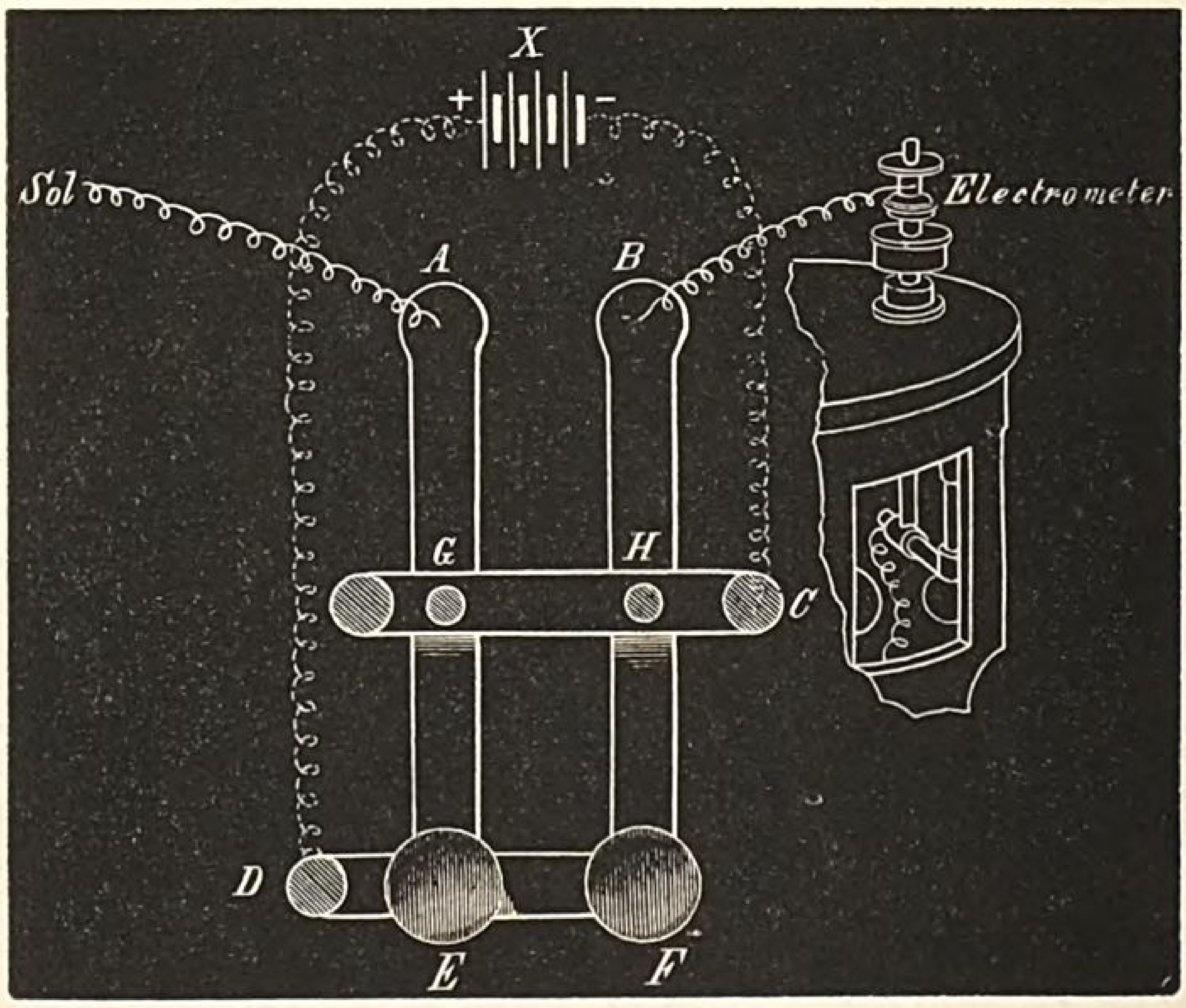


Fig. 186.

(Zink, Kupfer und gewöhnliches Wasser) nehmen. Man construiert dann leicht die Säule mit kleinen Fayencetöpfchen, die in einem Holzkasten untergebracht und in Paraffin eingefügt sind. Diese Töpfchen sind successiv mittelst eines Kupfer- und Zinkstreifens verbunden und mit Wasser fast bis zum Rande erfüllt. Wenn man will, dass der Apparat längere Zeit in Stand bleibe, so wendet man am besten das Chlorsilberelement von Warren de la Rue an.

431. Methode der Schwingungen. Man kann schließlich in gewissen Fällen auf die Methode der Schwingungen, welche

von Coulomb angewendet wurde, zurückgreifen. Wenn die bewegliche Nadel, anstatt isoliert und an einem Coconfaden aufgehängt zu sein, leitend und an einem Metalldrahte befestigt ist, der mit der Erde in leitender Verbindung steht, und wenn der elektrisierte Körper, welchen man auf die Nadel wirken lässt, in constanter Entfernung von letzterer sich befindet, so wird die Anzahl der in einer gegebenen Zeit ausgeführten Schwingungen der Quadratwurzel aus der elektrischen Kraft, d. h. dem Potentiale des äußeren Körpers proportional sein; dies liefert in gewissen Fällen ein bequemes Mittel, verschiedene Potentiale zu vergleichen.

Dieser Versuch gestattet auch absolute Messungen auszuführen. Wenn z. B. die Nadel in eine Kugel endigt und wenn der influencierende Körper ebenfalls eine Kugel von demselben Durchmesser ist, so kann man die Wirkung der beiden Kugeln als Function des Potentiales rechnen und die Dauer der Schwingungen bestimmen. Leider erstrecken sich die Tabellen von Thomson nur auf den Fall, in welchem die Entfernung der Kugeln kleiner als der Durchmesser einer von ihnen ist, eine Bedingung, welche nicht günstig ist, um den Isochronismus der Schwingungen zu erhalten, und auch nicht in Versuchen, in welchen man es mit sehr hohen Potentialen zu thun hat; man müsste anders den Punkt der beweglichen Kugel kennen, in welchem die Resultierende der elektrischen Kräfte angreift; das ist aber eine Größe, welche Thomson nicht gerechnet hat.

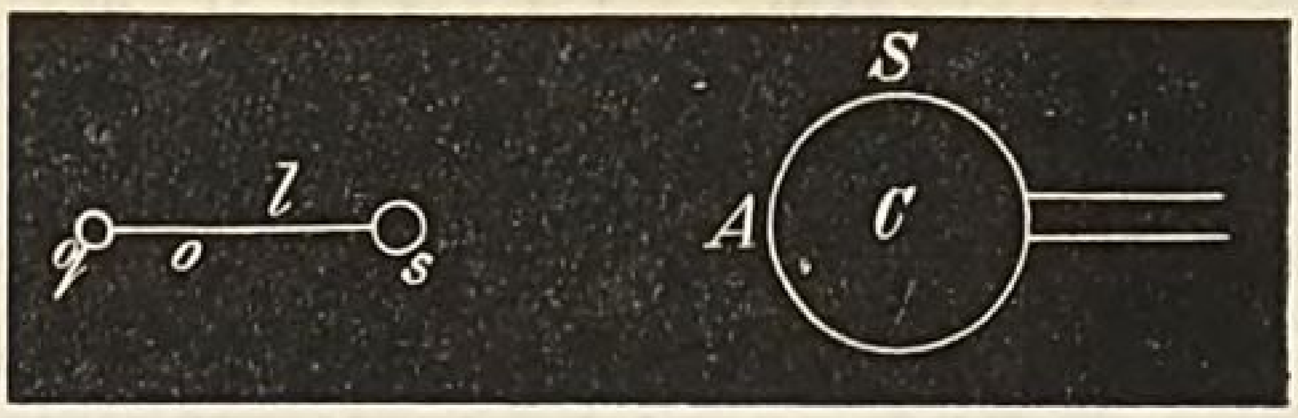


Fig. 187.

432. In Ermanglung allgemeiner Formeln, die sich auf die Wirkung der Kugeln beziehen, kann man experimentelle Anordnungen treffen, welche einfachere Rechnungen zulassen.

Zu diesem Behufe wird die Nadel aus einem Metallstäbchen, das am einen Ende in eine Korkkugel s (Fig. 187) ausgeht, die mit einem Stanniolblatt überkleidet ist, gebildet und an einen Metalldraht aufgehängt, der mit der Erde in leitender Verbindung steht. In einer gewissen Entfernung stellt man

eine Kugel S von einem viel größeren Durchmesser auf, welche auf ein Potential V gebracht ist. Seien R und r die Radien der beiden Kugeln, M und $-m$ ihre elektrischen Ladungen und D die Entfernung ihrer Mittelpunkte. Wenn der Halbmesser der kleinen Kugel r klein ist im Verhältnisse zum Radius der großen Kugel und der Entfernung der beiden Oberflächen, so wird die Vertheilung der Elektricität auf der influencierenden Kugel fast homogen sein.

Da die Kugel s mit der Erde in leitender Verbindung steht, ist ihr Potential Null und man hat für das Centrum in angenäherter Rechnung:

$$\frac{-m}{r} + \frac{M}{D} = 0, \quad \text{woraus sich } m = M\frac{r}{D}$$

ergibt; man kann auch für den Mittelpunkt der Kugel S schreiben:

$$V = \frac{M}{R} - \frac{m}{D} = \frac{M}{R}\left(1 - \frac{Rr}{D^2}\right).$$

Die elektrische Kraft ist nahezu gleich dem Producte der Elektricitätsmengen getheilt durch das Quadrat der Entfernung der Mittelpunkte und man hat für dieselbe folgende Formel:

$$F = \frac{Mm}{D^2} = \frac{1}{D^2}\left(\frac{VR}{1 - \frac{Rr}{D^2}}\right)^2 \frac{r}{D} = V^2 \frac{R^2 r}{D^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{Rr}{D^2}\right)^2}$$

Der Angriffspunkt dieser Kraft ist der Schwerpunkt der elektrischen Bilder, welche in der Kugel s durch die verschiedenen Elektricitätsmengen der Kugel S hervorgerufen werden oder nahezu das elektrische Bild des Mittelpunktes C; die Entfernung dieses Angriffspunktes von der Rotationsaxe unterscheidet sich wenig von der Entfernung l dieser Axe vom Mittelpunkte der beweglichen Kugel. Nennen wir schließlich I das Trägheitsmoment der Nadel, c das Drehungsmoment des Drahtes für einen Winkel gleich der Einheit und N die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, so wird man haben:

$$N^2 = \frac{Fl + c}{\pi^2 I}.$$

Ist die Anzahl der Schwingungen gleich n, wenn der Apparat im neutralen Zustande ist, so hat man auch

$$n^2 = \frac{c}{\pi^2 I}$$

und daraus erhält man:

$$N^2 - n^2 = \frac{1}{\pi^2 I} Fl = \frac{l}{\pi^2 I} V^2 \frac{R^2 r}{D^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{Rr}{D^2}\right)^2},$$

welchen Ausdruck man auch reducieren kann auf:

$$N^2 - n^2 = \frac{l}{\pi^2 I} V^2 \frac{R^2 r}{D^3}.$$

Man wird das Trägheitsmoment I nach gewöhnlichen Methoden bestimmen.

Ich habe es z. B. als sehr bequem gefunden, an die Nadel einen langen verticalen Metalldraht aufzuhängen, der in eine kleine ebene Schale endigt, auf welche man horizontal Metallstäbchen legt, deren Trägheitsmoment man leicht rechnen kann. Diese Anordnung hat den Vortheil, dass es verhindert wird, dass die Nadel nicht in einer verticalen Ebene schwingt, und dass sie sich der großen Kugel zufolge der elektrischen Anziehung nicht nähert. Andererseits ist das Torsionspaar des Drahtes oft zu schwach und die Schwingungen sind zu langsam, als dass die Bestimmung des Trägheitsmomentes mit Genauigkeit sich ausführen lässt; man ergänzt dies, indem man dem Apparate eine größere Richtkraft mittelst eines Magnetes ertheilt.

Man sieht, dass alle in der Formel enthaltenen Größen auf experimentellem Wege bestimmt werden können, und man wird daraus den Wert von V in absoluten Einheiten erhalten.

In dem Apparate, dessen ich mich bediente, hatte man z. B.

$$R = 115^{mm}$$
$$r = 10{\cdot}5^{mm}$$
$$l = 174^{mm}$$

und die Entfernung D variierte von 180 bis 240 Millimeter. In diesem Falle erreichte das Glied $\frac{Rr}{D^2}$ nicht 4 Hundertstel

und da es sich um Versuche über den elektrischen Funken, welche keine große Genauigkeit gestatten, handelte, waren die Fehler von dieser Ordnung ganz und gar zu vernachlässigen.

433. Man könnte die Rechnung ein wenig genauer anstellen und in allen Fällen die Fehlergrenzen angeben, zwischen denen die Näherungsrechnung eingeschlossen ist. So ist das Potential der Elektricitätsmenge M im Mittelpunkte der kleinen Kugel größer, als wenn die Elektricitätschichte homogen wäre, aber kleiner, als wenn man sie ganz im Punkte A verlegt denken würde; man kann aus diesem Grunde die Ungleichungen aufschreiben:

$$\frac{M}{D-R} > \frac{m}{r} > \frac{M}{D};$$

man wird ebenso haben:

$$\frac{M}{R} - \frac{m}{D-r} > V > \frac{M}{R} - \frac{m}{D},$$

$$\frac{Mm}{(D-R-r)^2} > F > \frac{Mm}{D^2}.$$

Diese Ungleichungen geben einen Begriff vom Maximum des Fehlers, den man begeht.

Die von Poisson früher aufgestellten Formeln für den Fall, in welchem die Entfernung der beiden Kugeln sehr groß im Verhältnisse zu einem der Radien ist, können überdies im gegenwärtigen Falle von Nutzen sein. Man würde dann für die Bestimmung der Elektricitätsmengen M und m die Gleichungen haben:

$$V = \frac{M}{R} - \frac{m}{D},$$

$$0 = -\frac{m}{r} + \frac{M}{D} + \frac{R^3}{D^2(D^2-R^2)} m.$$

Wenn man die Elektricitätsmenge m im Bilde des Mittelpunktes C bezüglich der kleinen Kugel betrachtet in einer Entfernung x vom Mittelpunkte dieser Kugel, so würde man haben

$$Dx = r^2,$$

$$F = \frac{Mm}{(D-x)^2},$$

und der Hebelarm der Kraft F, welche die Nadel um den Mittelpunkt O dreht, würde gleich sein $l+x$; daraus würde man für die Anzahl der Schwingungen erhalten:

$$N^2 = \frac{F(l+x)+c}{\pi^2 I}.$$

Die so gerechneten Resultate würden genauer sein können, wenn der Versuch selbst eine genügende Genauigkeit zulassen würde.

Entladungs-Elektrometer.

434. Die Idee, die Elektricitätsmenge zu messen, welche ein Körper besitzt, sei es durch die Intensität des Funkens, welche man bei der Entladung erhält, oder durch die Anzahl der Funken derselben Art, welche man hervorrufen kann, ist sehr alt.

Um die Ladung einer Leydnerflasche zu bestimmen, nahm Canton(1) die Flasche in die eine Hand, ließ sie einen Funken an einen isolierten Leiter abgeben, dann entlud er den Leiter mit der anderen Hand und wiederholte diesen Versuch, bis die Flasche vollständig entladen war und schätzte die Gesammtladung nach der Anzahl der Funken. Die Methode würde genau sein, wenn man bei einem bestimmten elektrischen Zustande bleiben würde; in diesem Versuche aber variieren die Elektricitätsmengen, welche die Flasche bei jedem Funken verliert, wie die Glieder einer geometrischen Progression und man kann eine um so größere Funkenzahl nachweisen, je feiner die Vorgänge der Beobachtung sind.

435. Elektrometer von Lane. Einige Jahre später(2) ersann Lane ein Mittel, um immer identische Funken zu erhalten. Sein Elektrometer besteht aus einer Leydnerflasche, deren äußere Belegung mit einer Kugel B (Fig. 188) in leitender

(1) Priestley, t. I, p. 249.

(2) Phil. trans. abridged, vol. XII., p. 475 (1767).

Verbindung ist, welche man mittelst einer Mikrometerschraube F mehr oder weniger einer anderen Kugel A, in welche die innere Belegung ausgeht, nähern kann. Wenn der Knopf B mit dem Erdboden leitend verbunden ist und die Kugel A mit einem Apparate, der Elektricität hervorruft, z. B. einer Elektrisiermaschine, so wird von selbst zwischen den beiden Kugeln ein Funke entstehen, wenn das Potential der inneren Belegung einen gewissen Wert erreicht haben wird. Gleichwohl ist die Entladung nicht nach jedem Funken vollständig wegen der Rückstände; aber, da die Erscheinung in continuierlicher Weise sich wieder hervorruft, so ist die gesammte Menge der Elektricität, welche abfließt, der Funkenanzahl proportional. Die Einheit des Maßes, d. h. die Menge der Elektricität, die bei jedem Funken aufgewendet wird, ist der Capacität der Flasche proportional und hängt von der Schlagweite ab, welche man nach Belieben ändern kann; sie variiert auch, wie es Gaugain nachgewiesen hat, mit dem Widerstande des Leiters, welcher die äußere Belegung mit der Kugel B in Verbindung setzt.

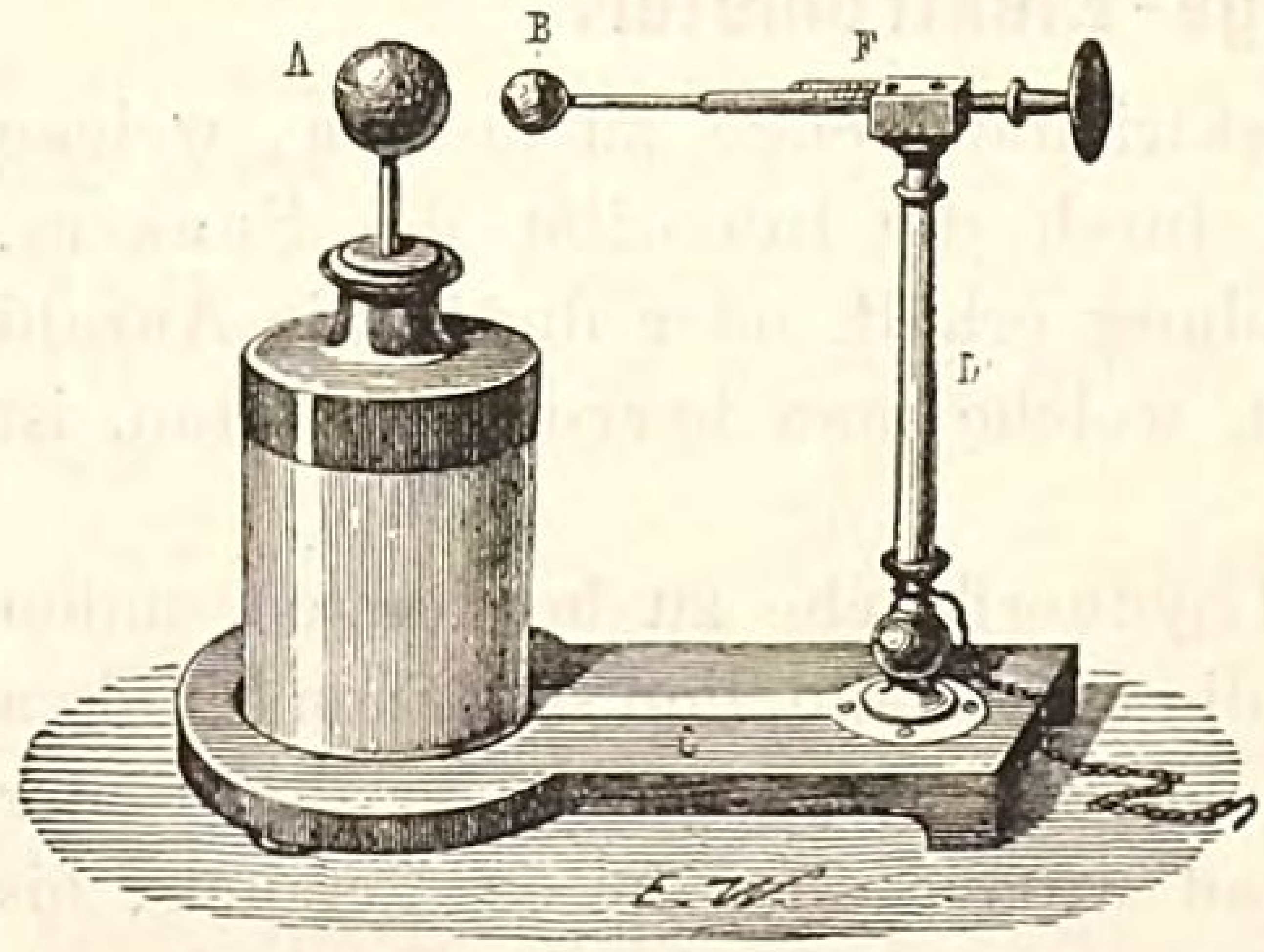


Fig. 188.

Da dieser Apparat zahlreiche Anwendungen hat, so ist es nützlich, die Construction des Apparates zu beachten, welche ausgeführt werden muss, damit dessen Angaben eine gewisse Giltigkeit haben. Wenn die innere Belegung aus Blättern von Flittergold gebildet ist, mit denen ein Stäbchen, das oben in eine Kugel endigt, in Berührung steht, so kommt es vor, dass nach einer gewissen Anzahl Funken die Blätter von Rauschgold, welche in der Nähe des Stäbchens sich befinden, wegfliegen und dass sich rings um diesen Stab ein isolierender Hohlgang bildet. Dieser hinzutretende Umstand hat keine große Bedeutung, wenn der äußere Funke genügend lang ist, wenn man aber die Kugeln bis zu einer kleinen Entfernung

nahe bringen will, so vollziehen sich die Entladungen nicht mehr in regulärer Weise.

Es ist daher nothwendig, sich der vollkommenen Verbindung der fixen Kugel A mit der inneren Belegung zu versichern. Wenn man Blätter von Stanniol oder Rauschgold anwendet, muss man die Flasche damit vollständig anfüllen, so dass das centrale Stäbchen in dieselben mit harter Reibung dringt; noch besser ist es, wenn der Hals hinlänglich weit ist, Stanniolstreifen auf der ganzen inneren Oberfläche der Flasche aufzukleben und diese Fläche in leitende Verbindung mit der Kugel mittelst mehrerer gekrümmten Messingstäbe zu bringen, welche gegen die Wände federn.

Andererseits reißen die heftigen Funken Metalltheilchen mit sich fort und verderben die Oberflächen der Kugeln, zwischen denen der Funke überspringt; dieser Umstand kann die Bedingungen ebenfalls modificieren. Rieß empfiehlt, die Kugel B mit der äußeren Belegung durch einen langen Draht zu verbinden, damit der größte Theil der durch die Entwicklung geleisteten Wärme auf diesem Drahte frei wird und nicht im Funken selbst erscheint. Es muss dann das Mikrometer von einem Glasstäbchen getragen werden, damit die Verbindung der Kugel B mit der äußeren Belegung in irgendeiner Weise hergestellt werden kann.

436. Funkenmikrometer. Wir werden sehen, dass die Schlagweite zwischen zwei Leitern zwischen gewissen Grenzen dem Potentialwerte auf dem einen von ihnen proportional ist, wenn der andere in leitender Verbindung mit dem Erdboden ist, oder auch allgemeiner, der Differenz der Potentiale der beiden Körper. Danach wird die Ladung der Lane'schen Flasche fast der Entfernung der beiden Kugeln proportional sein. Wenn man nur Potentialdifferenzen vergleichen will, benützt man oft einen Apparat, den Rieß ein Funkenmikrometer genannt hat und welcher einfach aus zwei isolierten Kugeln besteht, von denen die eine fix ist, während die zweite der ersten mittelst einer Mikrometerschraube genähert oder von ihr entfernt werden kann. Man kann sich zu diesem Behufe der Laneschen Flasche bedienen und wenn die Condensation hinderlich sein sollte, kann man sie entfernen, wenn man nur die Ver-

bindung der beweglichen Kugel mit der äußeren Belegung entfernt und diese Belegung isoliert erhält.

437. Messung der Ladung einer Batterie. Will man die Lane'sche Flasche anwenden, um die Ladung einer Batterie zu messen, so kann man das Experiment in zweifacher Weise anordnen:

1. Manchmal isoliert man die Batterie: man bringt die innere Belegung mit der Elektricitätsquelle in Verbindung und die äußere Belegung mit dem Knopfe A der Lane'schen Flasche, deren äußere Belegung mit dem Knopfe B und mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht. Je mehr die Batterie sich ladet, z. B. mit positiver Elektricität, desto mehr negative Elektricität erhält ihre äußere Belegung durch Influenz und gibt auf die Lane'sche Flasche positive Elektricität ab, welche die Entladungen erzeugt. Entfernt man die Elektricitätsquelle nach n Funken, so hat die innere Belegung der Batterie eine Ladung M_1 und ein Potential V_1 angenommen, die äußere Belegung befindet sich auf dem Potentiale V_2, so dass man, wenn man mit C die Capacität der Batterie bezeichnet, erhält:

$$M_1 = C\,(V_1 - V_2).$$

Wäre die äußere Belegung der Batterie auf dem Potentiale Null, so würde ihre Ladung $-M_1$ sein; sie besitzt aber andererseits eine positive Elektricitätsmenge $+m$, welche das Potential V_2 auf dieser Belegung und auf der Lane'schen Flasche hervorruft; bezeichnet man mit C' die Capacität dieses neuen Leiters, so ergibt sich:

$$m = C'V_2.$$

Schließlich ist die Menge der positiven abgeflossenen Elektricität $M_1 - m$ und wenn man mit q jene bezeichnet, welche jedem Funken entspricht, so hat man:

$$M_1 - m = nq.$$

Wenn man nun die Batterie entladet, so wird das Potential auf den beiden Belegungen gleich V_2 bleiben und wenn man annimmt, dass kein Rückstand sich auf ihnen befindet, so ist die jedesmalige Menge der Elektricität, welche durch den Funken verschwindet:

$$M_1 = nq + m = nq + C'V_2.$$

Da es nur von Interesse ist, jene Elektricitätsmenge zu messen, welche während der Entladung verschwindet, so sieht man, dass diese nur dann der Funkenanzahl proportional ist, wenn m vernachlässigt werden kann, d. h. wenn das Potential V_2 sehr klein ist im Verhältnis zu jenem, welches jedem Funken entspricht. Von diesem Gesichtspunkte aus würde die Anwendung eines dünnen Drahtes in der Lane'schen Flasche, wie es von Rieß angegeben wurde, hinderlich sein, weil dann die Funken nicht mehr das innere Potential auf Null bringen; es gibt aber eine andere schwerer ins Gewicht fallende Fehlerquelle, welche von dem Rückstande der Batterie herkommt. Es ist daher nothwendig, entweder den Rückstand zu bestimmen, oder, was noch correcter ist, denselben zu eliminieren. Zu diesem Behufe muss man die erste Entladung der Batterie als nicht geschehen betrachten, die Batterie vom neuen laden, so dass die Lane'sche Flasche fast dieselbe Anzahl Funken gibt und sie dann erst entladen. Der Rückstand, sowohl auf der Batterie als auch auf der Lane'schen Flasche, ist derselbe in den beiden Fällen und die Elektricitätsmenge, welche man bei dieser neuen Entladung verbraucht, ist genau der Funkenzahl der Lane'schen Flasche proportional.

2. Am öftersten bestimmt man die Ladung einer Batterie, indem man in folgender Weise vorgeht: man bringt die Elektricitätsquelle in Verbindung mit der inneren Belegung A einer isolierten Lane'schen Flasche, die äußere Belegung dieser Flasche mit der inneren der Batterie und die äußere Belegung der Batterie mit dem Erdboden. Die elektrische Kraft, welche zwischen zwei benachbarten Leitern herrscht, und die elektrischen Dichten auf den Seiten, welche einander gegenüberstehen, sind proportional der Differenz der Potentiale und es ist fast evident, dass die Hervorrufung eines Funkens zwischen zwei Leitern nur von dem Potentialunterschiede und nicht von dem absoluten Werte der Potentiale abhängt und dass die Elektricitätsmenge, welche bei jedem Funken abfließt, immer dieselbe ist. Bei der gegenwärtigen Anordnung wird daher die Ladung der Batterie genau der Anzahl der Funken der Lane'schen Flasche proportional sein und man wird den Einfluss der Rückstände durch die Wiederholung der Versuche eliminieren.

438. Rieß hat auf experimentellem Wege zu zeigen versucht, dass die plötzliche Entladung der Batterie der gesammten Ladung proportional ist. Die beiden Belegungen der Batterie waren einzeln mit den beiden Kugeln A' und B' eines Funkenmikrometers, die um eine bestimmte Entfernung getrennt waren, verbunden und die Lane'sche Flasche befand sich auf der Strecke zwischen der Maschine und der inneren Belegung. Unter diesen Bedingungen entstand eine Entladung zwischen den Kugeln A' und B' nach dem sechsten Funken der Lane'schen Flasche und, wenn man die Maschine fortwährend in Wirksamkeit lässt, erfordert jede der folgenden Entladungen nur fünf Funken. Dasselbe Verhältnis $\frac{6}{5}$ wurde erreicht, wenn man die Entfernung der Kugeln A' und B' von 1 bis 9 veränderte, so dass der Rückstand immer gleich dem sechsten Theile der gesammten Ladung war.

Gleichwohl ist das Experiment complicierter, als es zu sein scheint, weil nach jeder Entladung die Potentiale auf den beiden Belegungen der Batterie nicht gleich sind und der Unterschied, welcher dann zwischen ihnen bleibt, von der Schlagweite abhängt. Das Verhältnis des Rückstandes zur Ladung kann in diesen Versuchen constant bleiben, aber man kann daraus nicht schließen, dass dasselbe der Fall wäre, wenn die Batterie jedesmal durch zwei Leiter, die zur Berührung gebracht wurden, entladen worden wäre; im Gegentheile ist vorauszusehen, dass der Rückstand weniger schnell wächst, als die gesammte Ladung und es ist besser, diese Fehlerquelle durch Wiederholung der aufeinanderfolgenden Versuche zu eliminieren.

439. Entladungselektrometer von Gaugain. Das Elektrometer von Lane eignet sich nur für Versuche, in welchen die Potentiale hinlänglich groß sind, weil es nothwendig ist Funken wahrzunehmen; überdies hört die regelmäßige Bildung dieser Funken auf, sobald sie zu kurz sind und dann sind die Entfernungen schwerer zu bestimmen. Gaugain hat in jenen Fällen, in welchen die elektrischen Ladungen sehr gering sind, einen Messapparat in Anwendung gebracht, den

er das elektroskopische Probemaß oder das Entladungselektroskop [1] nennt.

Es ist ein gewöhnliches Goldblatt-Elektroskop, das sich in einer Glocke befindet, in welche man eine Messingkugel A (Fig. 189) einführt, die mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht. Wird das Elektroskop elektrisiert und ist die Ladung genügend, so divergieren die Goldblättchen und das eine von ihnen berührt die Kugel A und entladet den Apparat. Wenn ein elektrisierter Körper mit dem Elektroskope in Verbindung steht und wenn man bewirkt, dass die Elektricität langsam zufließt, so ist es klar, dass jede Berührung des Goldblättchens mit der Kugel A dieselbe Elektricitätsmenge wird entweichen lassen und dass die Ladung, welche der Körper besitzt, der ganzen Anzahl der Berührungen, welche erhalten werden, bis er in den neutralen Zustand übergegangen ist, proportional sein wird.

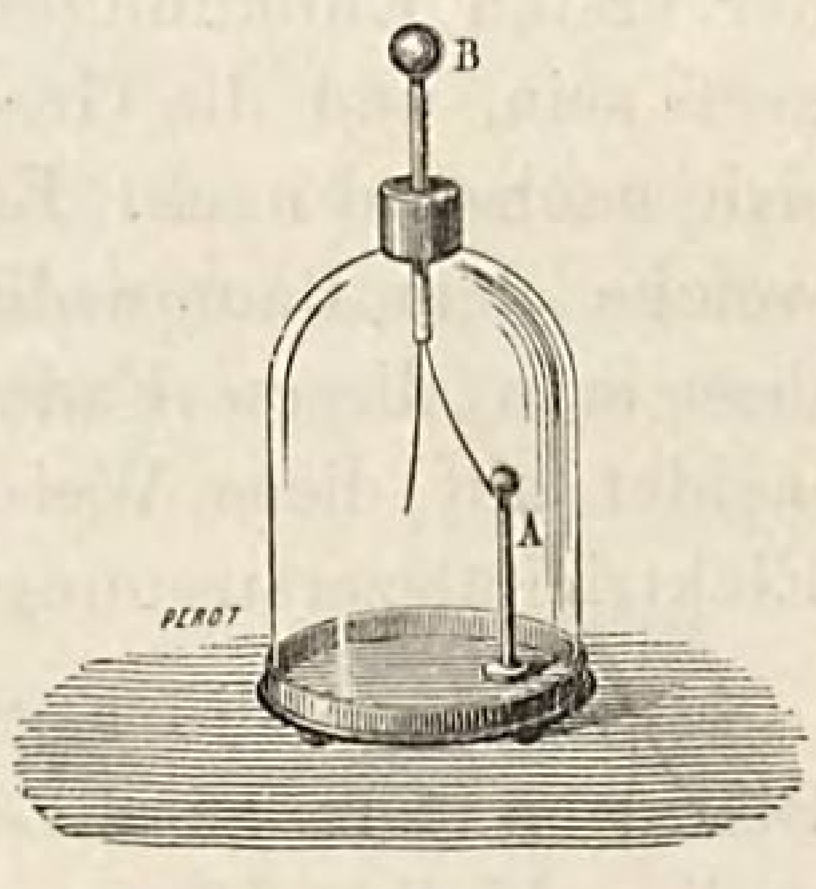


Fig. 189.

Damit die Entladungen identisch sind, muss das Goldblättchen, welches die Kugel A berührt, sich sogleich nach der Berührung losmachen; es ist schwer in vollkommener Weise zu verhindern, dass nicht bisweilen Adhärenzen, die einige Augenblicke währen, entstehen, aber man vermeidet sie soviel als möglich, wenn man Sorge trägt, dass die Kugel A gut geglättet und nicht überfirnisst sei oder auch dadurch, dass man sie, bevor man sie in die Glocke einführt, bis zur Rothglühhitze bringt; dadurch ruft man nämlich auf der Oberfläche der Kugel eine zarte Schichte von Metalloxyd hervor.

In allen Fällen ist es nothwendig, den Apparat während seiner Thätigkeit zu überwachen und jedesmal den Tisch leicht zu schütteln, wenn das Goldblättchen nicht augenblicklich nach dem Contacte herabfällt.

Man erhält nun ein langsames Fließen der Elektricität, wenn man das Elektroskop mit dem elektrisierten Körper

(1) Gaugain, Ann. de Chimie et Physique 46, p. 174, 1628.

durch einen mittelmäßigen Leiter verbindet, z. B. einen Baumwollfaden von 30 oder 40 Centimeter Länge oder vielmehr einer Länge und einem Durchmesser, die den Versuchen angepasst sind, welche man im Auge hat, so dass man Entladungen erhält, welche in passenden Zeitintervallen erfolgen. Wenn der Faden zu gut leitend ist, werden die Entladungen zu rasch, die Elektricitätsmenge, welche bei jedem Contacte abfließt, ist nicht dieselbe, weil der Contact dann nicht allein das Elektroskop, sondern auch einen Theil des Fadens selbst in den neutralen Zustand bringt. Ist der Faden ein guter Isolator, so werden die Entladungen zu selten und die Elektricitätszerstreuung hat einen zu großen Einfluss; es muss das Intervall der ersten Entladungen wenigstens eine oder zwei Secunden groß sein, und die Geschwindigkeit des Abfließens vermindert sich nach und nach. Es ist auch gut, alle Fäden und Fasern, welche dem Baumwollfaden anhaften, zu entfernen, dadurch, dass man diesen Faden mit Nelkenöl befeuchtet; man vermeidet auf diese Weise eine der wirksamsten Ursachen der Elektricitätszerstreuung.

440. Sobald die Entladungen aufgehört haben, fahren die Blättchen fort zu divergieren, ohne die Kugel zu erreichen und es bleibt dann auf dem Körper und dem Elektroskope eine gewisse Elektricitätsmenge zurück, deren Bestimmung von Nutzen ist.

Um den Rückstand des Elektroskopes zu erfahren, ladet man einen Körper von großen Dimensionen auf ein bestimmtes Potential, dann entladet man ihn, indem man ihn in Verbindung mit dem Elektroskope setzt und man notiert die Anzahl n der Berührungen. Man isoliert dann das Elektroskop, ohne es in den neutralen Zustand zu versetzen, bringt von neuem den Körper auf dasselbe Potential und erhält, nachdem man ihn in Verbindung mit dem Elektroskope gebracht hat, eine größere Anzahl, etwa n', Entladungen. Der Unterschied $n'-n$ stellt, wenigstens bis auf eine Entladung, den Rückstand des Elektroskopes nach dem ersten Versuche dar, weil bei diesem Grade der Genauigkeit der schließliche Rückstand in den beiden Fällen derselbe ist.

Um den Rückstand auf einem Körper M zu bestimmen, bringt man ebenso denselben in leitende Verbindung mit dem Elektroskope E und verbindet das Ganze mittelst eines Baumwollfadens mit einem anderen Körper N von viel größerer Capacität, der sich auf einem bestimmten Potentiale befindet; man beobachtet nun die Zahl m der Entladungen. Dann isoliert man M und E, ohne sie in den neutralen Zustand zu bringen, ladet N auf dasselbe Potential wie früher und stellt die Verbindung mit dem Elektroskope her, man findet jetzt eine Anzahl m' Entladungen.

Der Rückstand auf M und E ist $m'—m$,
der Rückstand auf dem Elektroskope E allein war $n'—n$,
der Rückstand auf dem Körper M allein ist daher $m'—m—(n'—n)$.

Indes ist es besser, wenn die Rückstände immer kleiner im Verhältnisse zu den gesammten Ladungen sind, weil die Divergenz der Goldblättchen, welche schließlich bestehen bleibt, nicht in allen Versuchen dieselbe ist und weil demzufolge der Rückstand variabel ist, was leicht vorhergesehen werden kann. Wir werden überdies an mehreren Gaugain entlehnten Beispielen sehen, wie es nützlich ist, diesen sinnreichen Apparat anzuwenden.

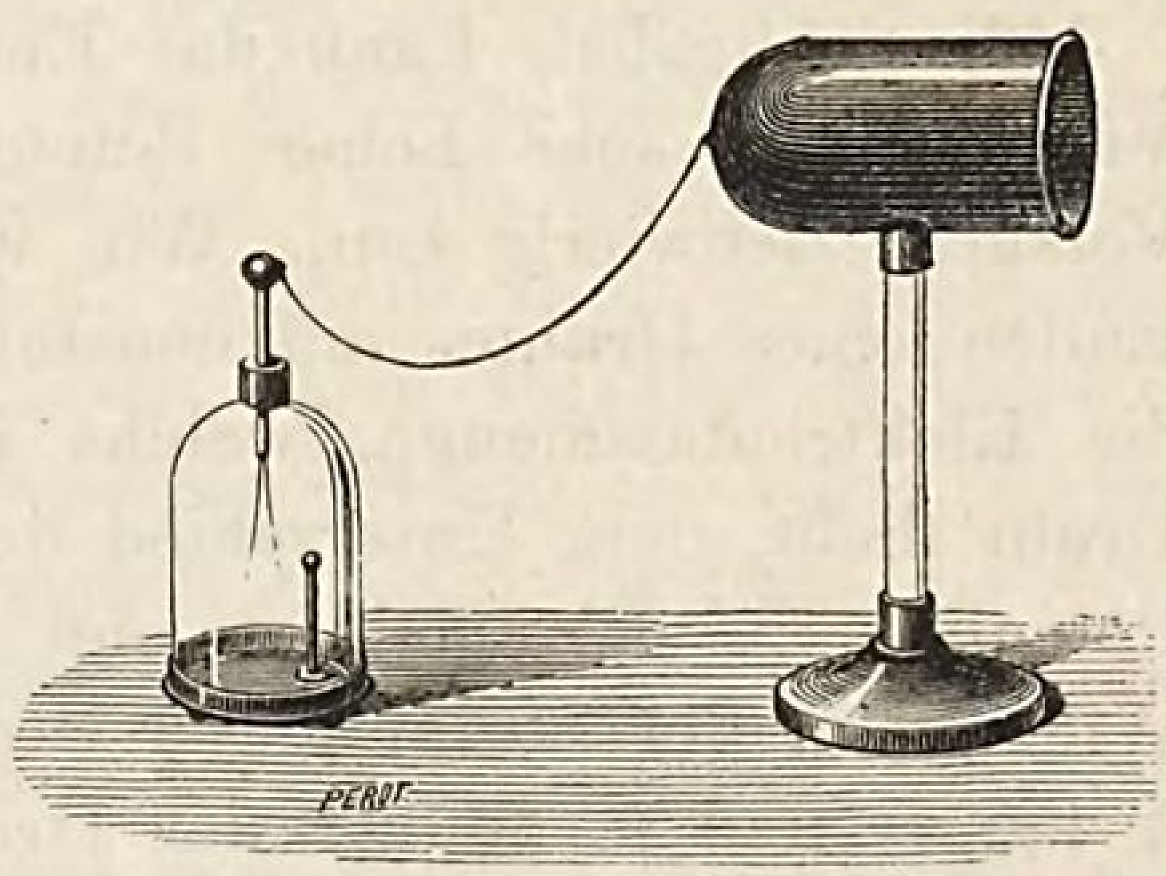


Fig. 190.

Schließlich kann man die Empfindlichkeit des Apparates modificieren, wenn man die Entfernung der fixen Kugel ändert, oder wenn man das Goldblatt durch einen Stanniolstreifen ersetzt, durch ein Pendel u. s. w.

441. Das Entladungselektroskop hat in Wirklichkeit sehr zahlreiche Anwendungen. So könnte man, wenn man Elektricitätsmengen vergleichen wollte, das Entladungselektroskop durch einen Baumwollfaden in leitende Verbindung mit einem isolierten Metallcylinder (Fig. 190), der an einem seiner Enden offen ist, setzen. Wenn man in das Innere dieses

Cylinders irgendeinen elektrisierten Körper taucht, auch einen Nichtleiter, so wird der Cylinder auf der äußeren Oberfläche sich mit einer Elektricitätsmenge laden, welche gleich jener des influencierenden Körpers ist und die Anzahl der Contacte des Goldblättchens mit der Kugel, jene mitgerechnet, welche dem Rückstande entsprechen, wird proportional der Elektricitätsmenge des vorausgesetzten Körpers sein. Man kann so z. B. in einer sehr einfachen Weise die elektrische Theilung zwischen zwei irgendwie gestalteten Leitern bestimmen; es wird genügen, dieselben, nachdem sie elektrisiert und mit einander berührt wurden, successiv in den Cylinder des Entladungselektroskopes einzuführen und das Verhältnis der ganzen Anzahl der Entladungen in den beiden Fällen zu nehmen; man wird sich überdies von der Zerstreuung der Elektricität frei machen, wenn man die Reihenfolge der Versuche umkehrt. Diese Methode würde auch den Vortheil haben, sich auch leicht auf die Vergleichung entgegengesetzter Elektricitäten anwenden zu lassen.

442. Schließlich kann das Entladungselektroskop noch zur Vergleichung sehr hoher Potentiale dienen, für welche die Versuche schwierig sind. Wir werden sehen, dass, wenn die Enden eines Drahtes auf constante Potentiale gebracht sind, die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Draht fließt, dem Unterschied der an den Enden herrschenden Potentiale proportional ist und um so geringer ist, jemehr Widerstand der Draht dieser Strömung entgegengesetzt, d. h. je länger und je dünner der Draht ist und je weniger leitend die Substanz ist, aus der er verfertigt wurde. Es wird daher genügen, das eine Ende eines Baumwollfadens mit dem Leiter zu verbinden, dessen Potential man bestimmen will und das andere Ende mit dem Entladungselektroskope, wobei man Sorge trägt, den Apparat gegen jede äußere Wirkung durch einen elektrischen Schirm zu schützen, welcher an einer Stelle durchbohrt ist, durch welche der Faden hindurchgeht. Der Unterschied des Potentiales zwischen den Goldblättchen und der Kugel wird ganz vernachlässigt werden können, die Zahl der während der Zeiteinheit beobachteten Contacte wird dem zu bestimmenden Potentiale proportional sein. In diesem

Falle ist das Experiment sogar viel einfacher, weil man den Rückstand nicht zu bestimmen hat.

Elektrische Thermometer.

443. Wenn ein leitender Körper in den neutralen Zustand gebracht wird, oder noch allgemeiner, wenn zwei elektrisierte Leiter, die auf verschiedenem Potentiale sich befinden, in leitende Verbindung gebracht werden, so ist die Verrückung der elektrischen Fluida von einer Verminderung der gesammten Energie begleitet. Dieser Energieverlust übersetzt sich in die Hervorrufung einer mechanischen Arbeit, wie z. B. die Hebung eines Gewichtes, oder offenbart sich durch ein Freiwerden von Wärme auf den verschiedenen Körpern, welche an dem Phänomen theilnehmen. Wenn die mechanische Arbeit Null ist, kann man in dem Freiwerden der Wärme das Maß der während der Entladung verbrauchten Energie suchen.

Ohne für den Augenblick bei der Art und Weise zu verweilen, wie die gesammte, von der Entladung herrührende Wärme sich auf die verschiedenen Theile des Weges, welchen der elektrische Strom durchläuft, vertheilt, kann man bemerken, dass die Entladung immer von einem Funken begleitet ist, welcher einen mehr oder weniger großen Theil der Energie absorbiert. Rieß hat sich speciell auf den Umstand, der schon durch frühere Experimentatoren erwiesen wurde, gestützt, dass die Gewalt des Funkens um so kleiner ist, je weniger gut leitend der Kreis ist, welcher vom Strome durchlaufen wird oder mit anderen Worten, je mehr Widerstand derselbe bietet. Wenn man also die beiden Belegungen einer Batterie mit einem Kupferstäbchen verbindet, so ist der Funken lärmend; bei Anwendung eines längeren und dünneren Kupferdrahtes wird der Funken bei derselben Batterieladung schwächer; ein Platindraht von denselben Dimensionen gibt einen noch viel schwächeren Funken; wenn man schließlich statt der Metalldrähte eine kleine Wasserschichte setzt, so findet die Entladung unter der Form eines kleinen geräuschlosen Funkens statt. In diesem Falle ist fast die ganze Wärme in der Flüssigkeit

frei geworden. Dies zusammenfassend ersieht man, dass man die einer Entladung entsprechende calorische Energie entweder in dem Funken selbst, oder in einem Drahte von großem Widerstande, der in die Bahn des elektrischen Stromes eingeschaltet ist, concentrieren kann; es bleibt noch übrig die Menge der in beiden Fällen freigewordenen Wärmen auszuwerten.

444. Thermometer von Kinnersley. Kinnersley [1] hat einen Apparat erdacht, von welchem er glaubte, dass er geeignet wäre, die Menge der durch den Funken selbst freigewordenen Wärme zu messen. Dieser Apparat besteht aus einem Glascylinder V (Fig. 191), der auf der unteren Seite durch einen Metallbeleg geschlossen ist, welcher dem Instrumente als Fuß dient, und am oberen Ende durch einen anderen Metallbesatz geschlossen ist. Im Innern des Cylinders befinden sich zwei leitende Kugeln *a* und *b*, welche einzeln mit den beiden Belegungen in Verbindung stehen und von denen die eine *a* mittelst eines Stäbchens gehoben oder gesenkt werden kann. Eine seitliche engere Röhre K steht in Verbindung mit dem Cylinder; man bringt in diese beiden communicierenden Gefäße eine gewisse Menge Flüssigkeit, z. B. gefärbten Wassers, und man merkt mit einem Index das Niveau der Flüssigkeit in der engen Röhre an. Wenn das Thermometer in der erwähnten Weise vorbereitet ist, bringt man die untere Metallfassung mit der äußeren Belegung einer Leydnerflasche durch eine Metallkette in leitende Verbindung und nähert der Kugel A den Knopf der inneren Belegung. Es entstehen dann zwei Funken, der eine außerhalb des Thermometers, der andere zwischen der Kugeln *a* und *b*. Dieser erwärmt die Luft, welche er durchsetzt und es wird die Flüssigkeit in die Seitenröhre

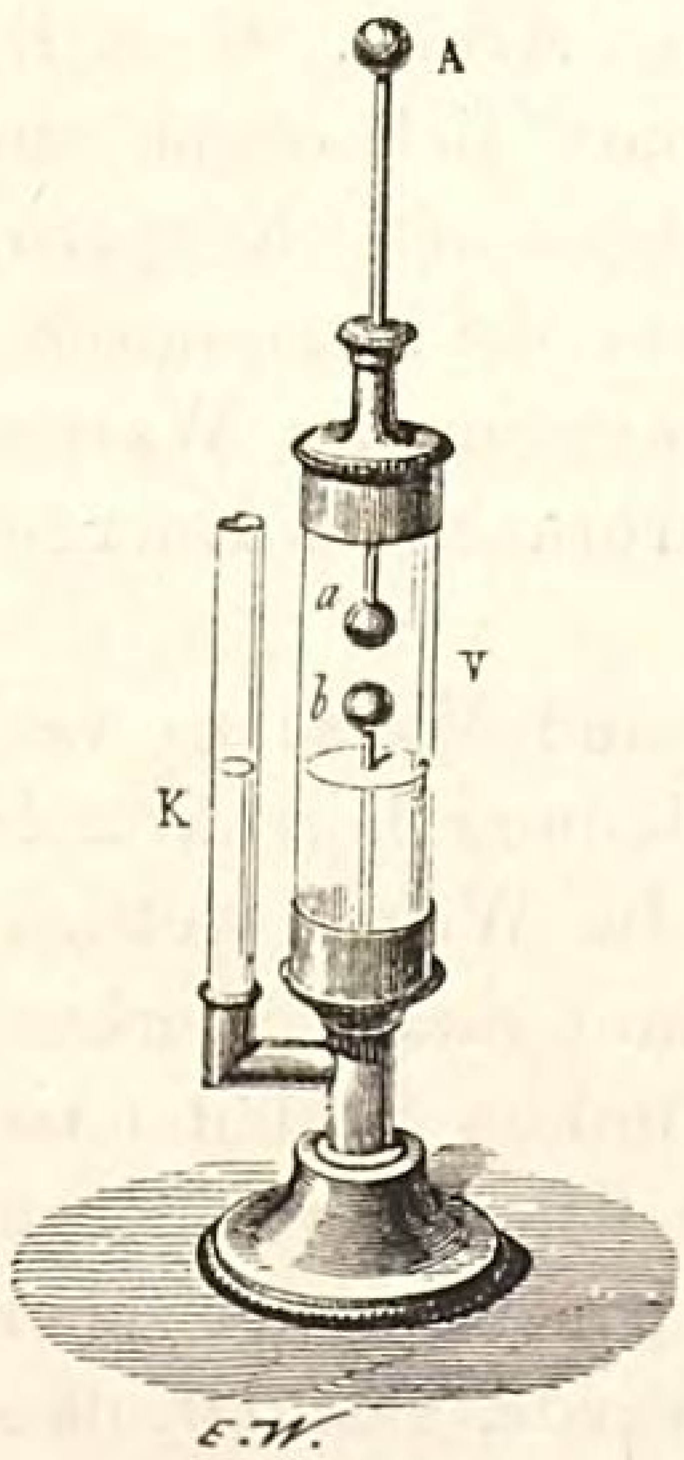


Fig. 191.

[1] Brief von Kinnersley an Franklin (1761). Werke von Franklin.

getrieben, wo das Niveau um eine bestimmte Größe sich hebt; die Verrückung der Flüssigkeit wird umso größer, je größer die Energie des Funkens ist, und ist umso größer, je enger die Röhre ist.

Dieser Apparat von Kinnersley kann nicht leicht in Messversuchen angewendet werden; er gibt keine sehr regelmäßigen Resultate, weil die Wirkung zu ungestüm vor sich geht und weil der Funken nicht nur die Luft erwärmt, sondern auch Metalltheilchen von den Kugeln *a* und *b* losreißt und sie verflüchtigt, welcher Umstand die Erscheinung compliciert macht. Man hat diesen Apparat in den Vorlesungen einzig und allein noch vorhanden, um durch einen einfachen Versuch das Freiwerden der Wärme bei der Entladung zu zeigen. Um die Wirkung zu vergrößern, ist es auch gut, die untere Kugel ein wenig unter das Niveau der Flüssigkeit tauchen zu lassen; der Funke kann dann, indem er diese Schichte durchsetzt, schnell eine große Menge Dampf erzeugen, wodurch die Flüssigkeit der seitlich angebrachten Röhre zum Austritte gebracht wird und sogar bis zu einer gewissen Höhe geschleudert werden kann.

445. Thermometer von Harris. Harris(¹) hat das Thermometer von Kinnersley in vortheilhafter Weise geändert, indem er einen sehr feinen Metalldraht in die Kugel eines wirklichen Luftthermometers setzte; letzteres bestand aus einer Glaskugel, die mit einer Capillarröhre in Verbindung war. Diese Röhre war zweimal umgebogen und enthielt eine gewisse Menge Flüssigkeit, welche den horizontalen Arm erfüllte und bei einer gewissen Stelle in den beiden verticalen Armen stand. Wenn eine elektrische Entladung durch den Draht geht, entsteht eine gewisse Wärmemenge, welche zuerst den Draht erwärmt, dann sich allmählig dem umgebenden Gase mittheilt, dessen Druck dadurch vergrößert wird. Die Verrückung der Flüssigkeit geschieht also in diesem Apparate weniger ungestüm als in dem Thermometer von Kinnersley und da es bei demselben keine secundären Wirkungen gibt, welche die Erscheinung compliciert machen, so kann man

(¹) Phil. trans. (1827), pg. 18.

durch die Niveauveränderung in den Röhren die Menge der in dem Drahte freigewordenen Wärme bestimmen. Es ist nicht nothwendig, eine Rechnung vorzunehmen, um zu ersehen, dass die Zunahme des Druckes und dem zufolge die Verrückung der Flüssigkeit der Menge der freigewordenen Wärme proportional ist.

446. Thermometer von Riess. Gleichwohl hat der Apparat von Harris eine zu geringe Empfindlichkeit, weil der Draht, wenn er geradlinig ist, keine große Länge haben kann; er absorbiert nur einen kleinen Bruchtheil der gesammten Entladungswärme; die Masse des umgebenden Gases ist ferner zu groß.

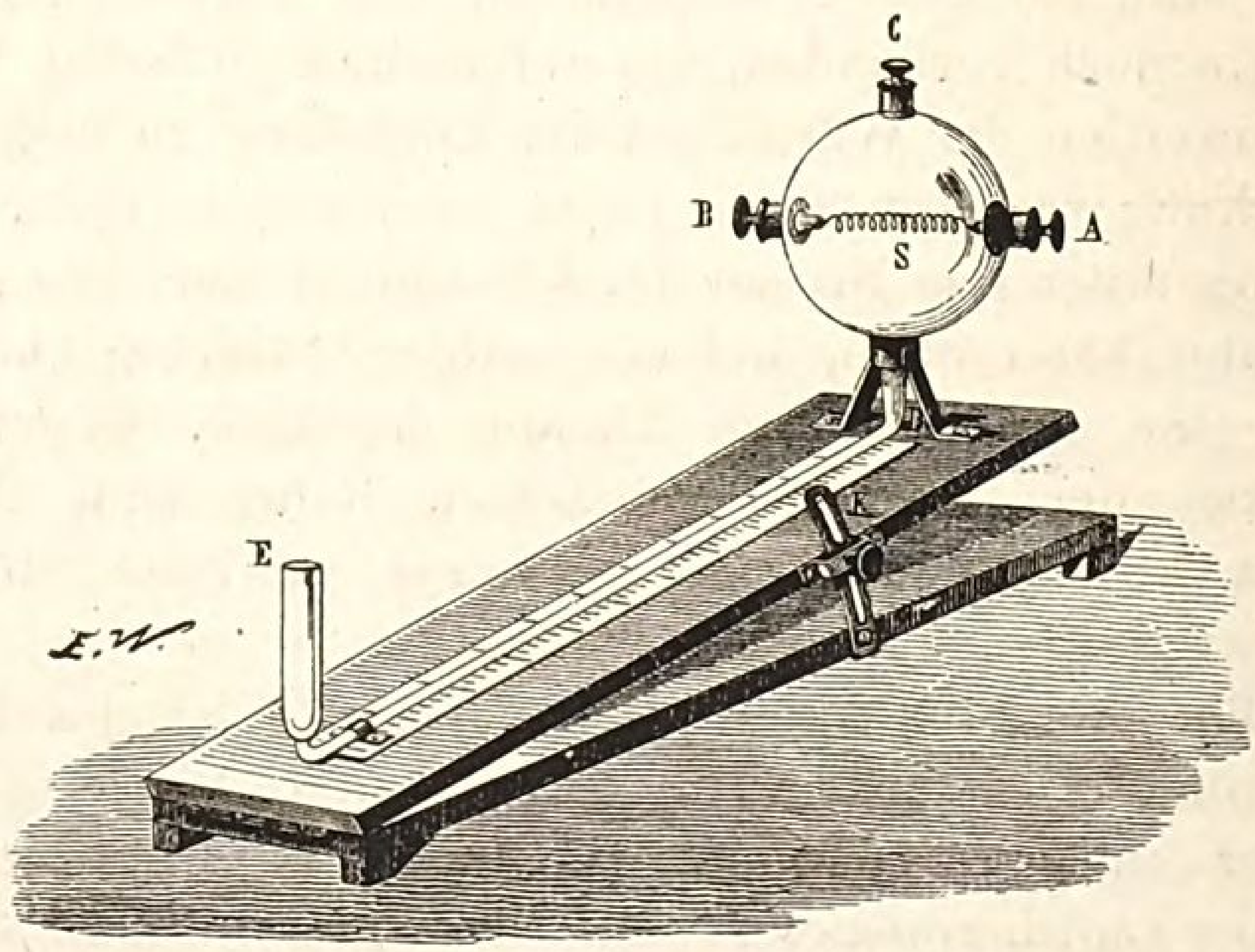


Fig. 192.

Rieß([1]) hat zwei sinnreiche Änderungen an dem Apparate angebracht. Der Metalldraht wurde durch eine Platinspirale E (Fig. 192) ersetzt, welche einen sehr großen Widerstand darbieten kann; dieselbe ist an zwei Stellen A und B befestigt. Die Capillarröhre ist nicht vertical, sondern befindet sich auf einem Brettchen, das man um einen beliebigen Winkel mittelst eines Bogens K und einer Druckschraube gegen den Horizont neigen kann; es steht die Röhre in Verbindung mit einem verticalen Rohre E von einem großen Durchmesser, durch

([1]) Reibungselektricität, Bd. I., pg. 391.

welche man eine bestimmte Menge Flüssigkeit in den Apparat einführt; die von Rieß angewendete Flüssigkeit war eine Mischung von Schwefelsäure und Alkohol, welcher man ein wenig einer färbenden Substanz hinzugesetzt hatte.

Der durch die Erwärmung hervorgerufene Drucküberschuss offenbart sich somit in einer längeren Verrückung der Flüssigkeit in der Capillarröhre und man kann die Empfindlichkeit des Apparates nach Belieben modificieren. Auf der Glaskugel ist eine Tubulatur C aufgekittet, welche durch einen Pfropf geschlossen ist, durch den man die Luft des Thermometers mit der Atmosphäre communicieren lassen kann und derselben zu Beginn dieses Versuches den Druck der äußeren Luft ertheilen kann.

Da die Erwärmung des Gases sehr schnell vor sich geht, so erreicht die Flüssigkeit fast augenblicklich nach der Entladung ihr Maximum der Verrückung und man kann den Wärmeverlust vernachlässigen, welcher durch Leitung oder Strahlung stattfindet. Die Änderung des Druckes und die des Volumens des Gases sind proportional der freigewordenen Wärmemenge und der Verrückung des Niveaus der Flüssigkeit in der Capillarröhre. Diese Verrückungen werden daher genügen, um die Verhältnisse der freigewordenen Wärmemengen in den verschiedenen Versuchen anzugeben.

447. Die Berechnung der absoluten Wärmemenge, welche frei geworden ist, ist fast unnötig; überdies bietet sie keinerlei Schwierigkeiten.

Sei V das ursprüngliche Gasvolumen, t die Temperatur des Gases und H der Druck desselben, in einer Säule der angewendeten Flüssigkeit ausgedrückt, sei ferner d die Anzahl der Theile, um welche sich die Flüssigkeit verschoben hat, u das Volumen jeder Theilung, h die entsprechende Änderung des Druckes und t' die neue Temperatur. Wenn man α den Ausdehnungscoefficienten des Gases nennt, wird man haben:

$$\frac{V.H}{1+\alpha t}=\frac{(V+du)(H+h)}{1+\alpha t'},$$

oder

$$\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}=\left(1+d\frac{u}{V}\right)\left(1+\frac{h}{H}\right).$$

Da die Änderung der Temperatur $t'-t$ sehr gering ist, so kann man diese Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\text{(1)}\qquad \frac{\alpha(t'-t)}{1+\alpha t}=d\frac{u}{V}+\frac{h}{H}.$$

Wenn S der Querschnitt der Röhre E, s der Querschnitt der Capillarröhre ist, x die Änderung des Niveaus in der Röhre E und β den Winkel bedeutet, den die Capillarröhre mit dem Horizonte bildet, so hat man

$$Sx=du$$

$$h=x+\frac{du}{s}\sin\beta=du\left[\frac{1}{S}+\frac{\sin\beta}{s}\right]=kd,$$

wenn man

$$k=u\left(\frac{1}{S}+\frac{\sin\beta}{s}\right)$$

setzt.

Ersetzt man h durch diesen Wert in der Gleichung (1), so wird

$$\text{(2)}\qquad \frac{\alpha(t'-t)}{1+\alpha t}=d\left(\frac{u}{V}+\frac{k}{H}\right).$$

Nennen wir andererseits P das Gewicht des Drahtes, C seine specifische Wärme und T die Temperatur, welche er erreichen würde, wenn er allein die Wärmemenge Q, die ihm die Entladung liefert, behalten würde; sei ferner p das Luftgewicht und c die specifische Wärme der letzteren, dann hat man auch:

$$\text{(3)}\qquad Q=PC(T-t)=(PC+pc)(t'-t).$$

Daraus erhält man:

$$\text{(4)}\qquad Q=(PC+pc)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)\left(\frac{u}{V}+\frac{k}{H}\right)d;$$

$$\text{(5)}\qquad T-t=\left(1+\frac{pc}{PC}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)\left(\frac{u}{V}+\frac{k}{H}\right)d.$$

Da alle innerhalb der Klammern befindlichen Größen constant sind, wenn man den Apparat nicht ändert, so ersieht man, dass die Menge der freigewordenen Wärme und die theoretische Erwärmung des Drahtes der Anzahl der Theilstriche proportional ist, um welche die Flüssigkeit verrückt wurde. Man wird auch bemerken, dass für eine und dieselbe Entladung der Effect fast unabhängig ist von den kleinen Veränderungen, welche der ursprüngliche Druck H und die anfängliche Temperatur *t* erfahren können.

Wollte man sich dieser Formel zu absoluten Messungen bedienen, so müsste man dennoch darauf Rücksicht nehmen, dass die Masse des Gases, aus welchem das Thermometer besteht, gleichzeitig Volums- und Druckänderungen erfährt; demzufolge ist die specifische Wärme, welche man in die Formeln einführen muss, eine Größe, welche zwischen der specifischen Wärme der Luft bei constantem Volumen und jener bei constantem Drucke liegt und der Wert dieser speciellen specifischen Wärme hängt von den Dimensionen des Apparates und der Neigung der Röhre ab. Um jeder Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen, würde es besser sein, in derartigen Versuchen die Röhre horizontal zu machen, damit der Druck des Gases constant bleibe.

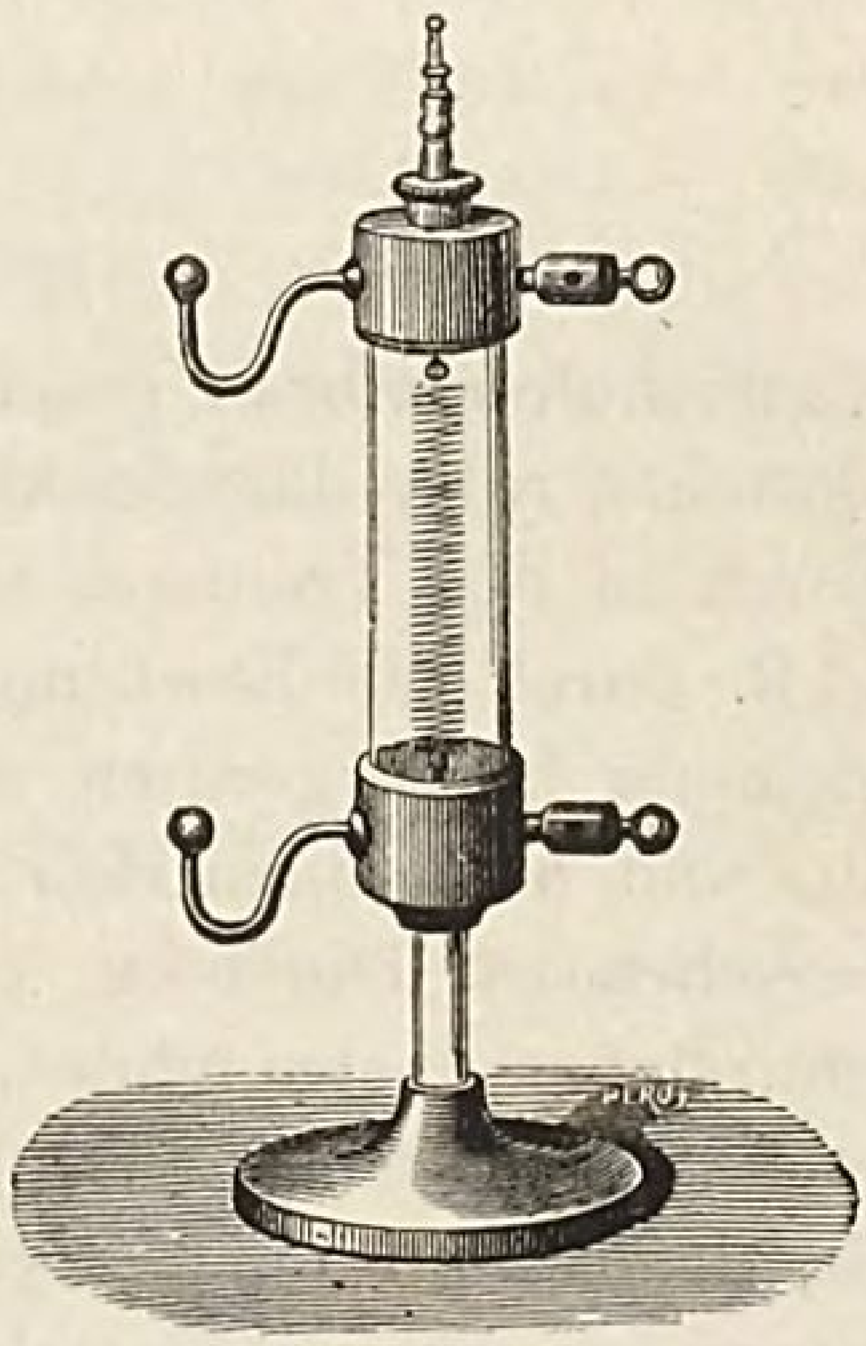


Fig. 193.

448. Selbstregistrierendes Thermometer. Man kann auch die Methode der Selbstregistrierung [1] in Anwendung bringen, welche gestattet, rasch eine Reihe von Versuchen auszuführen, deren Ergebnisse man dann mit Muße prüft. Zu diesem Zwecke besteht das Thermometer (Fig. 193) aus einer Glasröhre, welche in zwei Metallfassungen ausgeht, zwischen welchen eine Platindrahtspirale aufgehängt ist. Die Metallfassungen

(1) Journal de Physique, t. II., pag. 313.

sind mit Haken C und C' versehen und mit Klemmschrauben P und P', wodurch man die Entladungen im Drahte hervorrufen wird. Die obere Metallfassung trägt andererseits eine Tubulatur S, welche man durch eine Kautschukröhre mit einer Membran in Verbindung bringt, welche sowie jene ist, deren sich Marey mit großem Nutzen bei seinen physiologischen Versuchen bediente.

Diese Trommel besteht aus einer Metallkapsel (Fig. 194), welche mit einer Röhre T versehen ist und durch eine

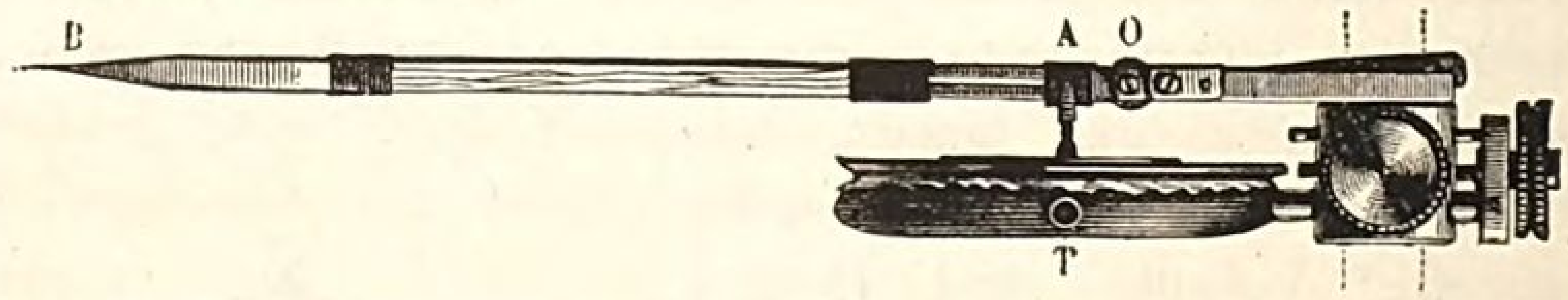


Fig. 194.

Kautschukmembran geschlossen wird, auf welcher ein Metallplättchen ruht, das ein kleines Stäbchen trägt. Wenn der Gasdruck in der Trommel aus irgendeinem Grunde größer wird, z. B. durch die Erwärmung, die bei der Entladung im Thermometer hervorgerufen wird, dann baucht sich die Membran aus und hebt einen Hebel OAB, dessen Ende mit einer Spitze versehen ist. Die Fig. 195 zeigt vollständig das Detail dieses sinnreichen Instrumentes. Die Spitze des Hebels, dessen Verrückung auch bei einer kleinen Druckänderung sehr merklich ist, drückt auf einen Cylinder, der mit angerauchtem Papier überzogen ist und mittelst eines Uhrwerkes in Bewegung gesetzt wird.

449. Wenn die Menge der freigewordenen Wärme klein ist,

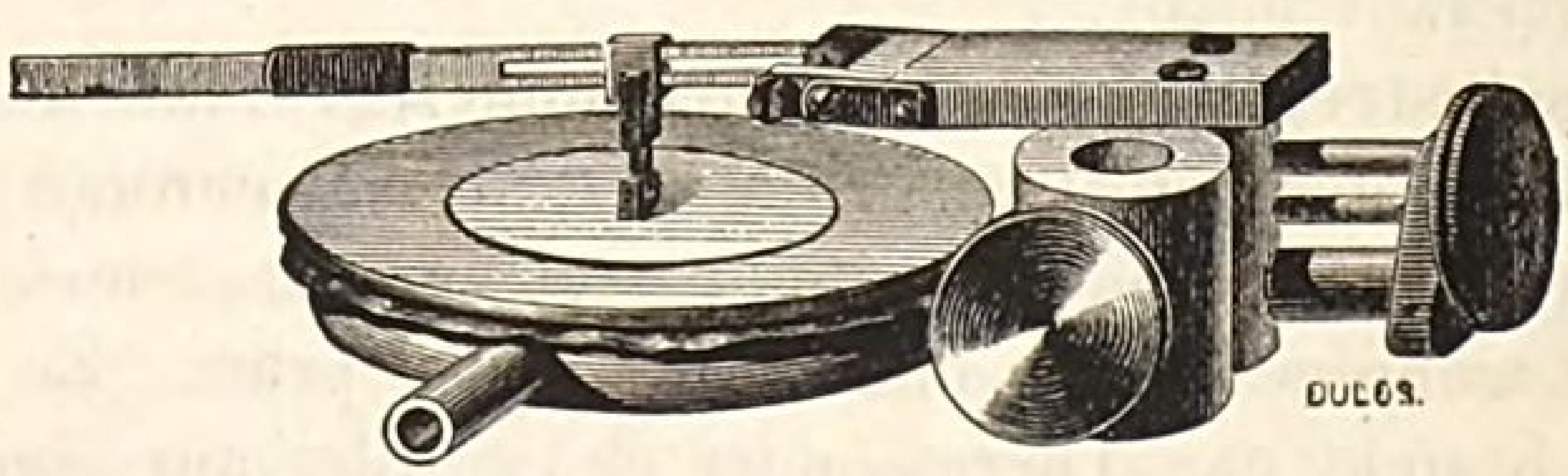


Fig. 195.

so kann man, auch ohne eine Rechnung zu machen, versichert sein, dass die Änderungen des Volumens des Gases, die Änderungen des Druckes und die Verrückungen des Hebels

untereinander und ebenso auch der Menge der bei der Entladung gelieferten Wärme proportional sind. In der (Fig. 196) z. B., welche eine möglichst genaue Reproduction der bei den Entladungen einer Batterie erhaltenen Curven ist, entsprechen die horizontalen Striche der Position der Spitze vor der Entladung; die Curve erhebt sich rasch in jenem Augenblicke, in welchem die Explosion stattfindet. Man sieht aus der Gestalt der Curven, dass die Erwärmung der Luft nicht augenblicklich eintritt; sie erreicht schnell ihr Maximum, dann vollzieht sich die Abkühlung langsam in regulärer Weise.

Die Figur entspricht den Versuchen, in welchen die Explosion mit einer Batterie hervorgebracht wurde, die mit variablen Elektricitätsmengen geladen worden war; die Nummern der verschiedenen Curven zeigen die Anzahl der Funken einer Lane'schen Flasche an, welche zum Messen der elektrischen Ladung diente. Um die Wärmemengen zu vergleichen, genügt es daher auf dem Papiere die Maximalordinaten dieser verschiedenen Curven zu messen.

Man erhält so:

Anzahl der Funken n	Maximal-ordinate h	$1000\frac{h}{n^2}$	Abkühlung h'	$1000\frac{h+h'}{n^2}$
11	7·4	60·9	0·5	65·3
13	10·6	60·3	0·8	67
15	13·3	59·6	1·1	65
17	19	66	1·4	70·6
20	25·5	63·7	2	68·7

Man kann noch die Rechnung in vollständigerer Weise ausführen, wenn man auf die durch den Apparat bewirkten Verluste während der Erwärmungsdauer Rücksicht nimmt. Die Curve der Abkühlung gestattet entweder durch Rechnung oder durch eine graphische Darstellung den Verlust zu bestimmen, welcher in der aufsteigenden Periode stattgefunden hat. Wenn man diesen Verlust dem Ordinatenmaximum hinzufügt, so wird man die Verrückung erhalten, welche der Apparat erhalten

würde, wenn er von dieser Fehlerursache frei wäre. Die vierte Colonne der Tabelle zeigt diesen Verlust an und die Rechnungen der fünften Colonne wurden mit den auf diese Weise corrigierten Zahlen ausgeführt. Man ersieht aus der dritten und fünften Colonne, dass die Wärmemenge nahezu dem Quadrate der Funkenanzahl proportional ist.

Ich will nicht länger bei dem Versuche selbst verweilen, welcher mit keiner besonderen Vorsicht gemacht wurde; ich wollte nur ein Beispiel der Methode der Selbstregistrierung geben und zeigen, dass die Prüfung solcher Curven, selbst

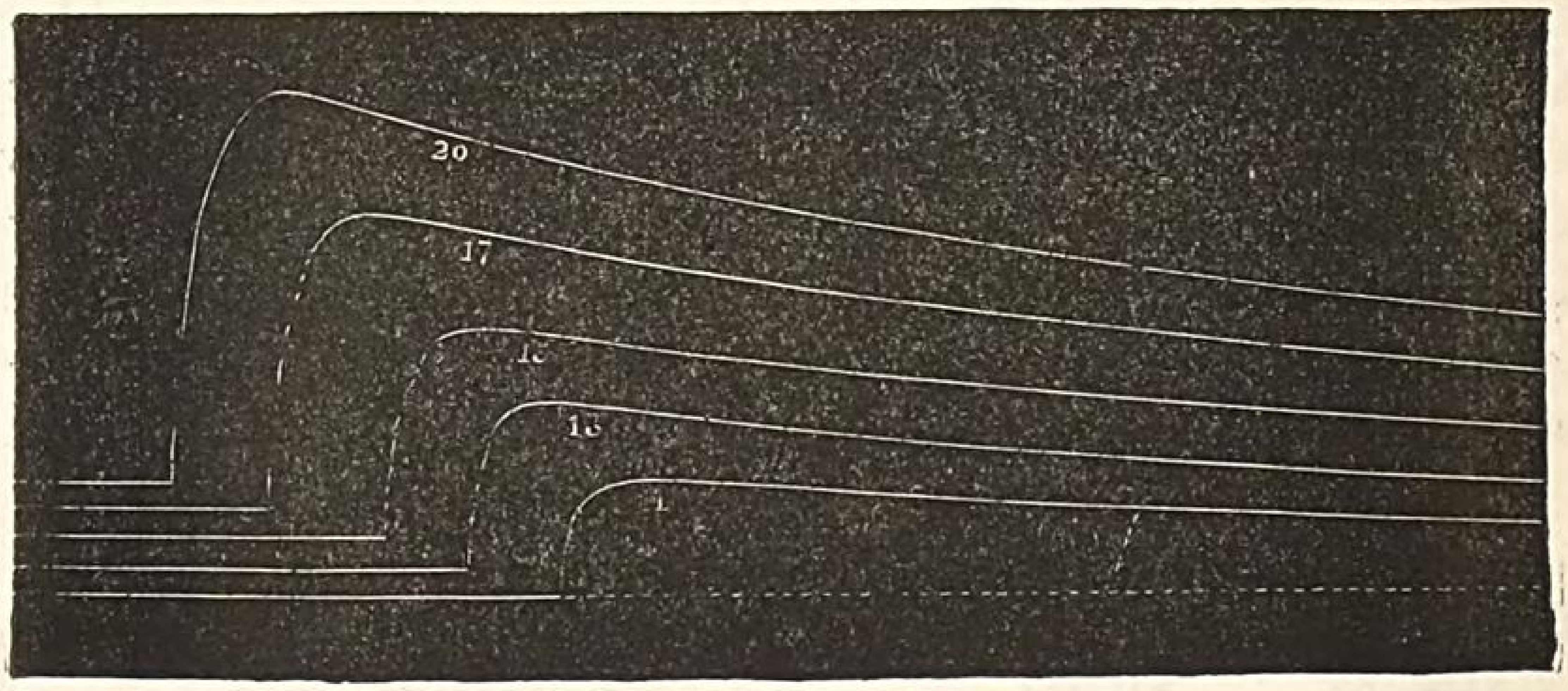


Fig. 196.

vom Standpunkte der numerischen Auswertung, bisweilen Hilfsmittel bringt, welche die directe Beobachtung nicht bietet.

Galvanometer.

450. Der Elektricitätsfluss, welcher in einem Conductor während der elektrischen Entladung stattfindet, ist eine Erscheinung, welche ganz und gar mit jenen Strömen verglichen werden kann, welche man erhält, wenn man die beiden Pole einer Volta'schen Säule durch einen Draht verbindet. In der That kann man in beiden Fällen die Körper wie z. B. Wasser zerlegen, die Magnetnadel ablenken und Magnetisation hervorrufen; es ist indes ein Unterschied zwischen den beiden Arten der Erscheinungen aufzustellen. Ein gewöhnlicher elektrischer Strom ist continuierlich und ruft reguläre Wirkungen

hervor; die Zerlegung der Körper erfolgt mit der Trennung der Elemente; die Magnetnadel wird so abgelenkt, dass der Nordpol zur Linken des Schwimmers ausweicht, und die Wirkung, welche sie erfährt, ist der Intensität des Stromes, d. h. der Elektricitätsmenge proportional, welche durch den Draht in der Zeiteinheit fließt. Die elektrischen Entladungen sind im allgemeinen dagegen eine so rasche Erscheinung, dass es schwer ist, die Wirkungen vorauszusehen und zu regulieren; der Durchgang einer Entladung durch Wasser oder einen anderen zusammengesetzten chemischen Körper ruft allerdings eine theilweise Zerlegung hervor, aber meistens bleiben die Elemente der Verbindung gemischt; andererseits wird eine Magnetnadel, die in der Nähe eines Leiters sich befindet, durch den die Entladung geht, im allgemeinen nicht abgelenkt, aber ihr Magnetismus kann gründlich geändert werden.

451. Versuche von Colladon. Colladon hat gezeigt(¹), dass wenn die Entladung continuierlich ist, wie jene, welche man erhält, wenn man den Conductor einer bewegten Elektrisiermaschine mit dem Erdboden in leitende Verbindung bringt, oder auch indem man die Belegungen einer Batterie mittelst eines mittelmäßig leitenden Körpers verbindet, diese Art der Entladungen auf eine Magnetnadel ebenso wirkt wie ein gewöhnlicher elektrischer Strom, indem der Nordpol zur Linken der mit der positiven Elektricität schwimmenden Figur abgelenkt wird. Man kann dann, um diese Erscheinungen zu beobachten, gewöhnliche Galvanometer anwenden, von denen wir hier die Beschreibung geben wollen.

Colladon bediente sich zuerst eines Galvanometers nach Nobili mit zwei Nadeln; der Rahmen (Fig. 197), in welchem die Nadeln schwebten, war umgeben von 100 Windungen eines Drahtes, der mit einer doppelten Lage Seide bedeckt war. Es ist in der That nothwendig, die verschiedenen Windungen des Multiplicators möglichst gut voneinander zu isolieren, um den Umstand zu vermeiden, dass die Entladung von einer Windung zur anderen unter der Form eines Funkens übergeht. Die beiden Galvanometerdrähte endigen in sehr feine

(¹) Annales de Chimie et de Physique, 2. serie, t. XXXIII., pag. 62.

Spitzen und man nähert dieselben den beiden Belegungen einer elektrisierten Batterie, die aus dreißig Flaschen besteht, deren gesammte Oberfläche 4000 Quadratfuß betrug. Die Nadel des Galvanometers fieng sich zu bewegen an, wenn die Spitzen 4 oder 3 Centimeter von den Belegungen entfernt waren; bei einer Entfernung von 1 oder 2 Centimeter erreichte die Ablenkung 23^0 und die Nadel kehrte in ihre ursprüngliche Lage nach einigen Secunden zurück. Colladon hat nachgewiesen, indem er die Drähte verwechselte oder die Batterie mit verschiedener Elektricität lud, dass die Ablenkung der Nadel immer nach einer Seite erfolgt, welche durch die Richtung der positiven Elektricitäts-Strömung voraus bestimmt werden kann. Die Dauer der Entladung wird mit der Entfernung der Spitzen größer und man kann so die Nadel mehr als eine Minute abgelenkt erhalten. Man muss nur vermeiden, die Spitzen zu sehr den Batteriebelegungen zu nähern, denn sonst findet die Entladung unter der Form einer Explosion statt.

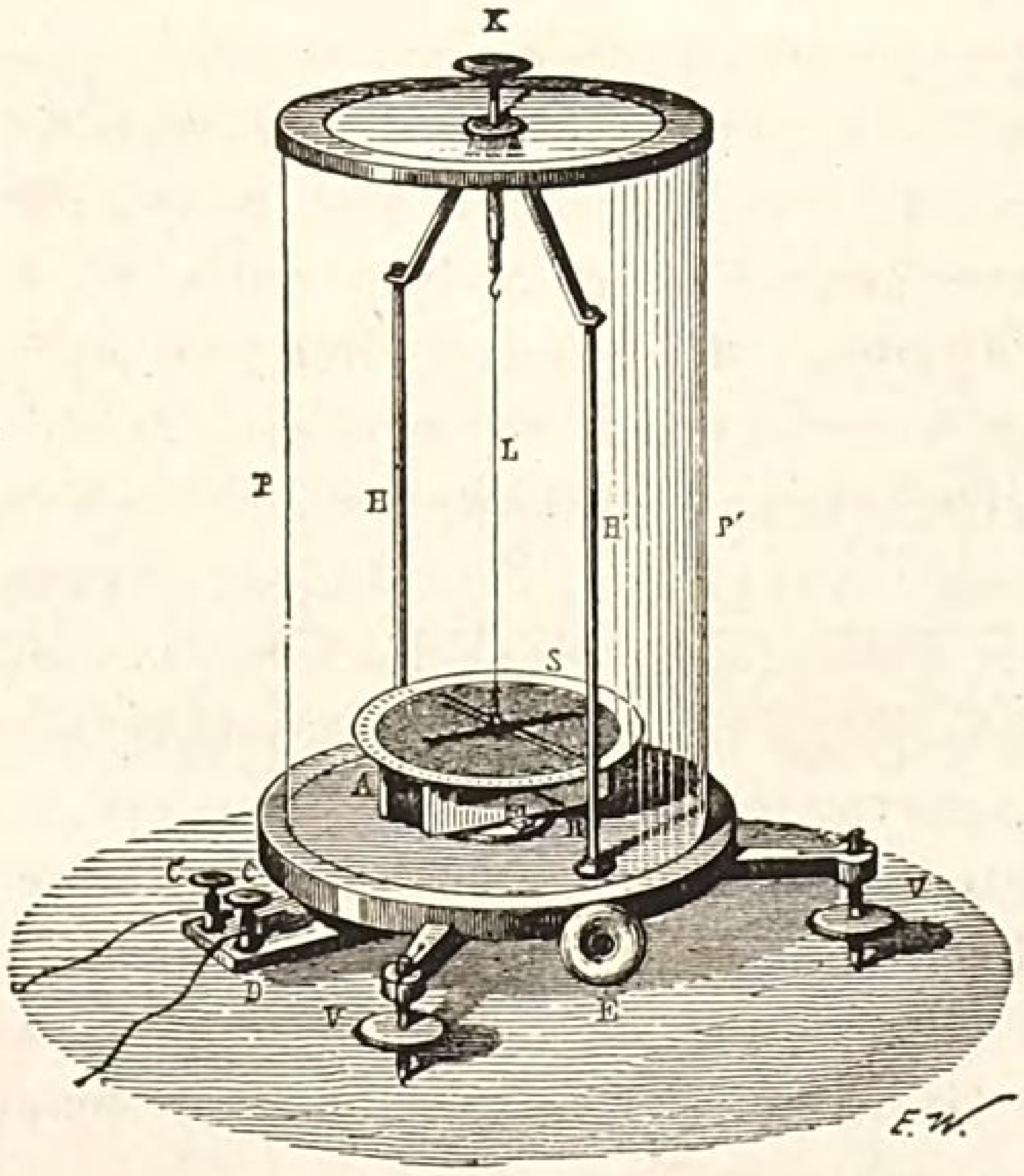


Fig. 197.

Da der Widerstand des Verbindungsdrahtes, welcher nothwendig ist, um die Entladung zu schwächen, im Verhältnisse zum Widerstande des Galvanometerdrahtes beträchtlich ist, so kann man die Anzahl der Windungen ohne Nachtheil vervielfachen. Colladon bediente sich eines Galvanometers mit 500 Windungen, dessen Draht doppelt mit Seide überzogen war und dessen verschiedene Windungen durch Taffetblätter getrennt waren; er erhielt auf diese Weise zehnmal größere Ablenkungen.

Indem er die beiden Drähte des Galvanometers mit den beiden Conductoren einer Maschine von Nairne verband, bestätigte er, dass die Ablenkung der Nadel proportional der Rotationsgeschwindigkeit der Maschine ist, und zwar innerhalb jener Grenzen, innerhalb welcher die Proportionalität auch bei gewöhnlichen Strömen stattfindet. Derselbe Versuch gelang mit den Maschinen von Ramsden, wenn die Kissen mit der Erde in leitender Verbindung stehen und wenn der Galvanometerdraht einerseits mit dem Erdboden, andererseits mit dem Conductor der Maschine verbunden war. Wenn die Verbindungen der Kissen ungenügend sind, so wird die Nadel bewegt, aber keine permanente Ablenkung erzeugt.

Man erhält regelmäßigere Wirkungen, wenn man dem Conductor der Maschine das eine Ende des in eine Spitze ausgehenden Galvanometerdrahtes nur nähert; wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Maschine constant vorausgesetzt wird, so ändert sich die Intensität des Stromes dann mit der Entfernung der Spitze vom Conductor, wie man aus den folgenden Versuchen ersieht:

Entfernung der Spitze vom Conductor D	Intensität des Stromes I	ID
1cm	20	20
2·5	20	50
5	19·5	97·5
10	18	180
20	10	200
40	5·5	220
80	3	240
100	2	200

Es ergibt sich daher aus diesen Versuchen zweierlei:

1. Die Wirkung, welche auf eine Magnetnadel durch die continuierliche Entladung einer Elektrisiermaschine ausgeübt wird, ist der von der Maschine erzeugten Elektricitätsmenge proportional.

2. Die Intensität des Stromes, welcher zwischen dem Conductor einer Elektrisiermaschine und einem Leiter, der in eine Spitze übergeht und mit dem Erdboden in leitender Verbindung

steht, durch die Luft geht, wird geringer, je größer die Dicke der Luftschichte wird und strebt umgekehrt proportional dieser Dicke zu werden.

452. Methode von Faraday. Ebenso kann die Entladung einer Batterie mittelst eines schlechten Leiters vollzogen werden; sie dauert dann länger und ruft eine constante Ablenkung der Galvanometernadel hervor, die aber sehr gering ist. Wenn andererseits die Entladung sehr schnell vor sich geht, aber nicht mehr augenblicklich ist, so gibt sie Veranlassung zu einem Strome, dessen mittlere Intensität im umgekehrten Verhältnisse zur Dauer desselben steht und welcher die Nadel bis zu einer bestimmten Entfernung bewegt. Faraday(1) hat gezeigt, dass der Bogen, welchen die Nadel infolge des Impulses beschreibt, von der Oberfläche der Batterie und dem schlecht leitenden Körper, durch welchen die Entladung stattfindet, unabhängig ist und der Elektricitätsmenge, welche durchfließt, proportional ist.

Eine Batterie von 8 Flaschen, welche durch 30 Scheibenumdrehungen einer gewöhnlichen Elektrisiermaschine geladen wurde, wurde dann mittelst einer angefeuchteten Schnur im Galvanometer entladen; dadurch wurde die Nadel um $5^1/_2$ Theilstriche einer willkürlichen Theilung bewegt; als der Batterie 7 Flaschen zugefügt wurden und dieselbe durch die gleiche Anzahl Umdrehungen geladen worden war, erhielt man genau dieselbe Ablenkung und mehrere nacheinander mit den beiden Batterien vorgenommene Versuche ergaben immer das gleiche Resultat.

Die ganze Batterie, geladen durch 50 Umdrehungen der Maschine, wurde dann durch einen einfachen angefeuchteten Faden, hierauf durch eine dünne Schnur von 38 Zoll Länge, welche mit destilliertem Wasser befeuchtet war, dann durch eine Schnur, die 12mal dicker war und 12 Zoll Länge hatte und in angesäuertes Wasser eingetaucht wurde, entladen. Mit der dicken Schnur erfolgte die Entladung fast augenblicklich, sie dauerte eine merkliche Zeit mit der dünnen Schnur; wenn man den Faden in Anwendung brachte, so waren zwei oder drei Secunden nothwendig, damit das Elektrometer der Batterie auf Null zurückkehrte. In allen Fällen war die Ablenkung der Nadel fast dieselbe.

(1) Experimental Researches, t. I., pag. 102.

Schließlich wurde die Batterie durch 60 Scheibenumdrehungen geladen; die Nadel erhielt einen Impuls, welcher sie genau um 11 Theilstriche ablenkte, d. h. die Ablenkung der Nadel war die doppelte jener, welche man erhalten hatte, wenn man die Batterie nur halb so stark lud.

Gleichwohl gibt diese Methode nur dann übereinstimmende Resultate, wenn keine Entladungen unter der Form von Funken zwischen den Windungen des Galvanometers entstehen, weil dann ein Theil des Stromes nicht durch den vollständigen Schließungskreis geht und der Magnetismus der Nadeln geändert werden kann. In den folgenden Versuchen von Rieß(1) wurde die Elektricitätsmenge der Batterien durch eine Lan e'sche Flasche bestimmt und die Entladung fand durch verschiedene Körper statt. Man sieht aus der Tabelle, dass die Ablenkung der Galvanometernadel nur von der Elektricitätsmenge abhängt; am Ende jeder Reihe zeigt sich aber eine Störung, welche von der Entstehung der Funken zwischen den Windungen des Galvanometers herrührt.

Schwingungsdauer der Nadel	Zwischengestellte Körper	Zahl der Batterieflaschen	Elektrische Ladung	Ablenkung der Nadel
6·8″	Wasser	7	18	32°
	"	2	18	31°
	"	7	18	31°
	Salmiaklösung	7	18	21°
10″	Wasser	7	10	27
	"	1	10	27
	Baumwollenschnur	1	10	27
	"	7	10	27
	Salmiaklösung	7	10	30
6·2″	Salmiaklösung	7	8	13
	"	7	8	14
	Wasser	7	8	13
	"	1	8	14
	Holzcylinder	7	8	14
		1	8	12

(1) Reibungslektricität, Bd. I., pag. 478.

453. Elektrodynamometer von Weber. Man kann auch für dieselbe Art von Untersuchungen das Elektrodynamometer von Weber[1] anwenden. Dieses Instrument (Fig. 198) ist ein Galvanometer, in welchem die Magnetnadel durch ein Solenoid ersetzt wird, in welchem die Ebene der Windungen senkrecht steht auf die Ebene der Windungen des Multiplicators. Das Solenoid ist an zwei Metalldrähten aufgehängt, welche am oberen Ende einer Glasröhre befestigt sind. Man hat so eine bifilare Aufhängung, durch welche man den Strom in das bewegliche Solenoid schicken kann und diesem Apparat eine beliebige Torsion zu geben im Stande ist. Passend angeordnete Rollen mit Stellschrauben gestatten die beiden Drähte mehr oder weniger einander nahezubringen und die Empfindlichkeit zu modificieren; man beobachtet überdies die Ablenkungen mittelst eines Spiegels, wodurch es möglich ist mit sehr kleinen Winkeln zu arbeiten. In dem hier zur Sprache kommenden Falle ist die wechselseitige Wirkung des Multiplicators und des Solenoids der Intensität des Stromes proportional, welcher in jedem dieser Theile sich bewegt; wenn daher derselbe Strom in den beiden Spulen fließt, so wird die Wirkung dem Quadrate der Stromstärke proportional sein. Wenn dieser Strom durch die Entladung einer

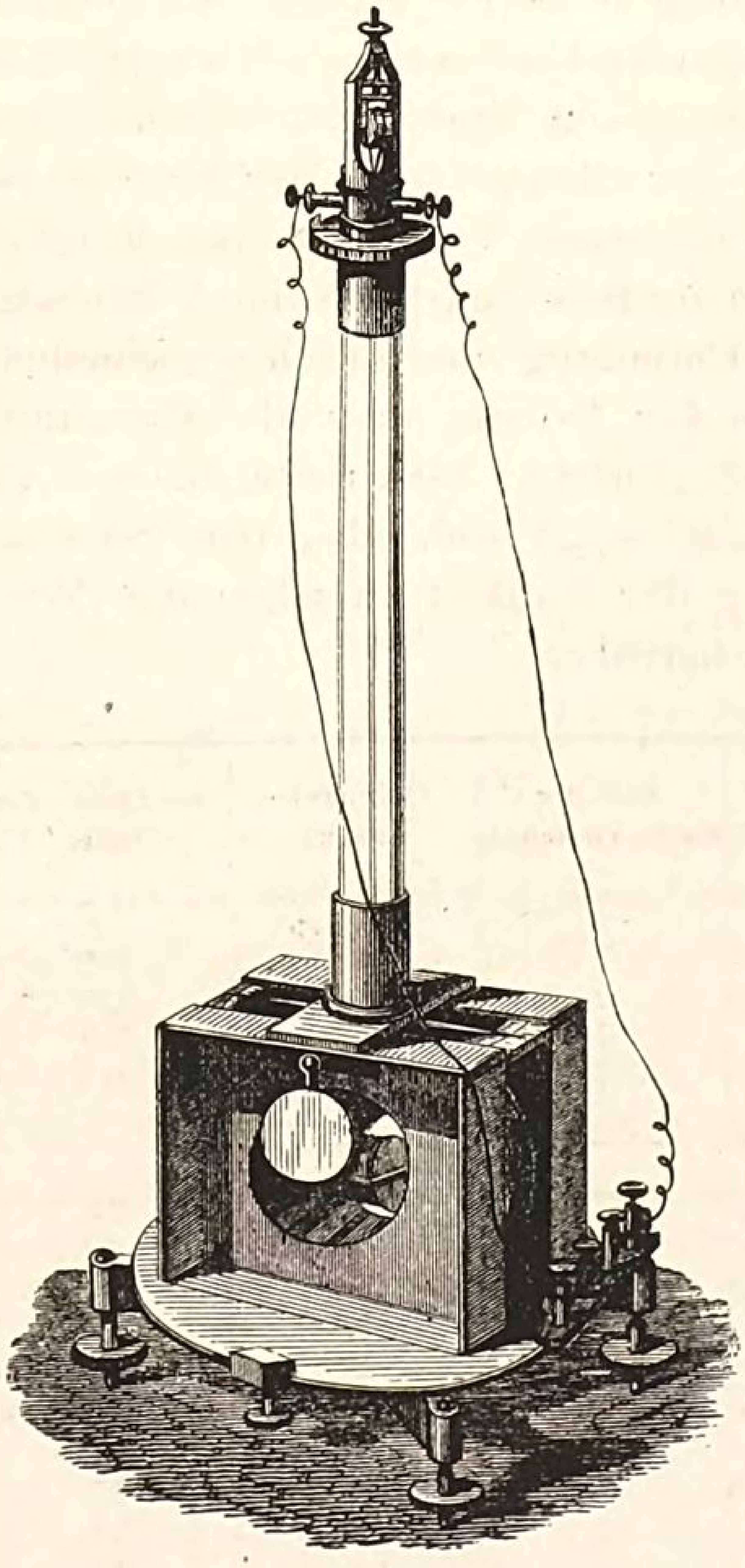


Fig. 198.

(1) Pogg. Annalen, t. LXXIII., pag. 197.

Batterie erhalten wird, welche sich in einer sehr kurzen Zeit θ vollzieht, so wird die mittlere Intensität des Stromes dem Quotienten $\frac{m}{\theta}$ aus der Elektricitätsmenge und der Dauer der Entladung proportional sein; der Ausschlagswinkel α' ist proportional der elektrischen Wirkung und der Dauer der Entladung und wird daher durch die Formel:

$$\alpha' = A' \frac{m^2}{\theta^2} \theta = A' \frac{m^2}{\theta}$$

ausgedrückt werden.

Wenn dieselbe Entladung durch ein Galvanometer mit Magnetnadel geht, wird sie die letztere um einen Winkel α ablenken, der nur der Elektricitätsmenge proportional ist, so dass

$$\alpha = Am.$$

ist. Man erhält hieraus:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'} = \frac{A^2}{A'} \theta = a\theta.$$

Weber(1) hat diesen Versuch ausgeführt, indem er gleichzeitig in den Entladungsweg einer Batterie ein Galvanometer und ein Elektrodynamometer brachte und die Erscheinung mittelst einer Hanfschnur von variabler Länge und 3·1 Linien im Durchmesser, die vor jedem Versuche angefeuchtet wurde, schwächte. Die Batterie wurde jedesmal derart geladen, dass ein Quadrantenelektrometer dieselbe Ablenkung anzeigte; die Einheit des Ablenkungsmaßes entsprach ungefähr 17″.

Länge der Schnur l	Ablenkung		$\frac{\alpha^2}{\alpha'} = a\theta$
	Galvanometer α	Elektrodynamometer α'	
2 m	79·9	65·6	97·3
1	76·6	153	38·3
0·5	82·3	293·8	23
0·25	87·3	682	11·2
0·25	82	609·1	11·3
0·5	95·6	422·8	21·6
1	95·8	210·1	43·7
2	101·5	98	105

(1) Elektrodynamische Maßbestimmungen, pag. 84.

Man erkennt aus den Zahlen der vierten Columne, dass die Dauer der Entladung mit der Länge der eingeschalteten Schnur größer wurde, und dass sie fast unabhängig von der Ablenkung im Galvanometer, d. h. von der Ladung der Batterie ist.

Wenn man für die Dauer der Entladung θ das Mittel der für eine und dieselbe Schnurlänge erhaltenen Zahlen nimmt, so ersieht man durch die folgende Vergleichung, dass die Dauer der Entladung nahezu der Länge der eingeschalteten Schnur proportional ist.

Länge der Schnur l	**Dauer der Entladung** θ	$\frac{\theta}{l}$
1	11·3	11·3
2	22·3	11·1
3	41·0	10·2
4	101·1	12·6

X. Kapitel.

Versuche, welche sich auf die Influenz und Condensation beziehen. — Elektrische Capacitäten.

Anziehungen und Abstoßungen.

454. Wirkung zweier Körper in constanter Entfernung. Um nicht die Reihenfolge der Betrachtungen zu unterbrechen, haben wir gelegentlich der Besprechung der Consequenzen aus der Theorie der elektrischen Erscheinungen die bestätigenden Versuche nicht erwähnt; wir müssen nun darauf zurückkommen und wir werden bisweilen zu einigen Wiederholungen genöthigt sein.

Das eine der einfachsten Resultate besteht darin, dass die Wirkung zweier Körper, welche in constanter Entfernung sich befinden und unter einander in Verbindung stehen, dem Quadrate der Elektricitätsmenge oder allgemeiner dem Quadrate des Potentiales proportional ist.

Diese Eigenthümlichkeit, welche als Grundsatz bei der Graduierung mehrerer Elektrometer gedient hat, wurde von Cavendish 1772 nach den von Harris erwähnten Manuscripten in der nachstehenden Weise demonstriert. An den beiden Enden eines isolierten Metallstabes befestigte Cavendish zwei Paare von Pendeln A und B, die aus Kugeln und

(1) Harris, Leçons d'électricité, p. 155.

Leinenfäden bestehen und die wir identisch voraussetzen wollen. Die Pendel des einen Paares wurden so belastet, dass man, um sie bis zu derselben Divergenz, wie die Pendel des anderen Paares, zu bringen, eine viermal größere repulsive Kraft nothwendig hatte. Er brachte dann den Knopf einer elektrisierten Leydnerflasche in Berührung mit dem Stabe; die belasteten Pendel B zeigten z. B. eine Divergenz von 12^0 an, die anderen eine viel größere. Er berührte dann die innere Belegung der ersten Flasche mit dem Knopfe einer anderen identischen, im neutralen Zustande sich befindenden Flasche; die Capacität des Stabes und der Pendel waren unbedeutend im Verhältnisse zu jener der Flaschen; nach der Berührung reducierte sich die Elektricitätsmenge der ersten Flasche auf die Hälfte und man stellte fest, dass das erste Pendelpaar A in diesem Augenblicke eine Divergenz von 12^0 anzeigte. Diese Methode ist principiell ausgezeichnet; sie ist nur ein wenig wegen der Schwierigkeit der Graduierung des Elektrometers fehlerhaft (380).

455. Wenn ein elektrisierter Körper A in eine constante Entfernung von einem zweiten Körper B, der mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht, gebracht wird, so ist ebenso die Anziehung, welche zwischen den beiden Körpern sich äußert, dem Quadrate der Ladung oder dem Quadrate des Potentiales des elektrisierten Körpers proportional.

Harris[1] hat dies zu bestätigen versucht, indem er seine Schwimmerwage (392) in Anwendung brachte; der eine von den einander anziehenden Körpern *b* war in leitende Verbindung mit dem Erdboden gebracht; den anderen Körper *a* berührte er mit einem elektrisierten Cylinder, der von einem isolierenden Fuße getragen wurde; er bestimmte die Anziehung entweder durch Gegengewichte, die auf die andere Seite gelegt wurden, bis die Nadel auf einen bestimmten Theilstrich zurückkehrte, oder noch einfacher durch Beobachtung der Ablenkung der Nadel und indem er mittelst einer Graduierungstabelle die Kraft rechnete, welche sich zwischen den beiden Platten bei derselben Entfernung äußern würde. Er berührte dann diesen ersten Cylinder mit einem oder zwei

[1] Phil. trans. (1834), pag. 219.

identischen isolierten Cylindern, die sich im neutralen Zustande befanden; diese entfernte er dann und bestimmte die neue Anziehung, nachdem die Elektricitätsmenge auf dem ersten Körper in dieser Weise um die Hälfte oder zwei Drittel vermindert worden war. Die folgende Tabelle, in welcher *m* die aufeinander folgenden Ladungen bezeichnet und *f* die attractive Kraft für eine und dieselbe Entfernung von einem Zoll darstellt, zeigt, dass die Übereinstimmung der Versuche mit der Theorie genügend ist.

$\frac{1}{m}$	f	$\frac{f}{m^2}$
1	30	30
2	7·8	31·2
3	3·27	29·43
4	1·8	28·8

Unter dieser Form gelingt der Versuch schwer, weil die Elektricitätszerstreuung bedeutend ist und weil die Capacität des angewendeten Cylinders im Verhältnisse zu jener der anziehenden Körper zu klein ist.

Es ist besser, die untere Scheibe *a* in leitende Verbindung mit einer großen Leydnerflasche (Fig. 165) zu bringen, welcher man mittelst einer Lane'schen Flasche verschiedene Ladungen ertheilt; Harris hat so erkannt, dass die Anziehung der beiden Scheiben dem Quadrate der Anzahl der Funken der Lane'schen Flasche proportional ist.

456. Das Elektrometer von Cuthbertson (391) gestattet leicht dasselbe Gesetz zu bestätigen. Es genügt, den Apparat in leitende Verbindung mit einer Batterie zu setzen und nachzuweisen, dass die durch die verschiedenen Positionen des Laufers angegebenen Gewichte den Quadraten der Elektricitätsmengen proportional sind, welche nöthig sind, um den Wagebalken ins Schaukeln zu versetzen und die Entladung der Batterie hervorzurufen. Cuthbertson und Singer(¹)

(¹) Nicholson Journal, t. XXVI., pag. 218.

hatten bei einer Reihe von Versuchen über die Vergleichung der Elektrisiermaschinen gefunden, dass die Anzahl der Umdrehungen der Maschine, welche nöthig sind, um die Entladung des Elektrometers hervorzurufen, der Verrückung des Index proportional wächst, aber diese Beziehung kann nicht genau sein.

457. Dieselbe Methode wurde von Rieß(¹) in strengerer Weise in Anwendung gebracht. Ein Hebel, analog jenem der Wage, trägt am einen Ende eine Schale und am anderen eine Metallkugel, welche, wenn der Wagebalken horizontal ist, in Berührung mit einer anderen oberhalb befindlichen Kugel ist, die mit der inneren Belegung einer Leydnerflaschenbatterie in leitende Verbindung gesetzt ist. Wenn das Gleichgewicht so hergestellt ist, dass diese Kugeln sich ohne Druck berühren, so bringt man in die Wageschale ein Übergewicht p und bestimmt mittelst einer Lane'schen Flasche die Elektricitätsmenge, mit welcher man die Batterie laden muss, damit die Kugeln sich von einander entfernen. Rieß hat auf diese Weise nachgewiesen, dass das Gewicht p dem Quadrate der elektrischen Dichte proportional ist, d. h. dem Quadrate des Quotienten aus der Elektricitätsmenge durch die Anzahl der Flaschen der Batterie. Wenn alle Flaschen identisch sind, so ist dieses Verhältnis dem Potentiale der inneren Belegung proportional. In der folgenden Tabelle sind die Gewichte p in Gran ausgedrückt, n bezeichnet die Anzahl der Flaschen der Batterie und m die Anzahl der Funken einer Lane'schen Flasche, deren Kugeln um eine halbe Linie entfernt waren; man muss daher, wenn K ein constanter Coefficient ist, haben:

$$p = \mathrm{K}\left(\frac{m}{n}\right)^2 \text{ oder } p\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \mathrm{K}.$$

(¹) Reibungselektricität, Bd. I., pag. 373.

Gewicht	1 Flasche		2 Flaschen		3 Flaschen		4 Flaschen		5 Flaschen	
	m		m		m		m		m	
p	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.
1	2	2·2	4·5	4·5	7	6·7	8·7	8·9	10	11·2
2	3·5	3·2	6	6·3	10	9·5	12	12·6	15·5	15·8
3	4	3·9	7·7	7·7	11·7	11·6	15	15·5	20	19·4
4	4·5	4·5	9	8·9	13·3	13·4	17·7	17·9	24	22·4

Man sieht, dass die gerechnete Anzahl der Funken in genügender Weise mit der beobachteten Anzahl übereinstimmt; die Beobachtungsergebnisse resultieren aus zwei Versuchsreihen.

In einer anderen Gruppe von Untersuchungen wurde die bewegliche Kugel *a* (Fig. 199) durch eine oberhalb befindliche

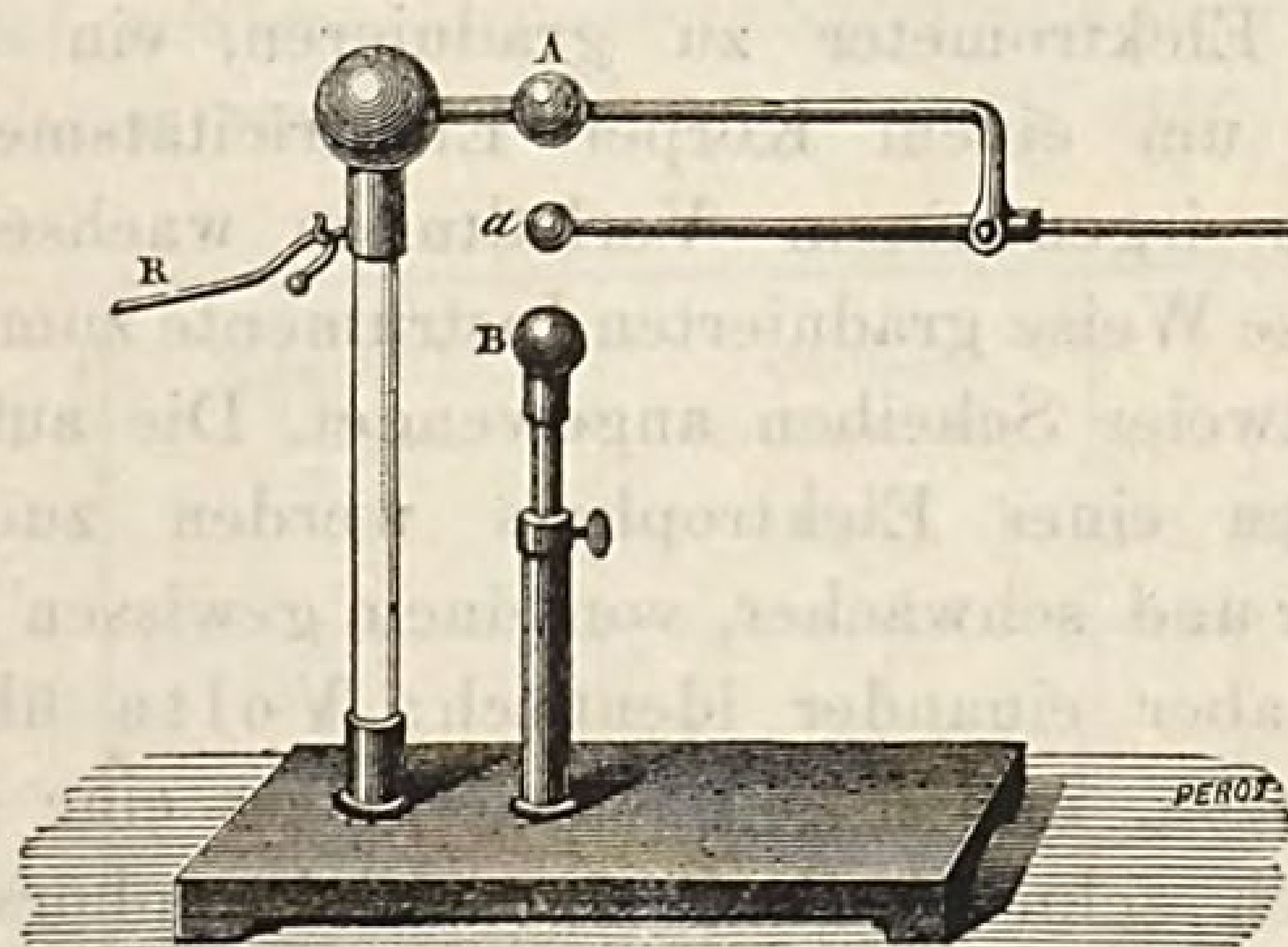


Fig. 199.

Kugel A, die mit ihr in leitender Verbindung steht, abgestoßen und gleichzeitig von einer unterhalb befindlichen Kugel B, die mit dem Erdboden verbunden war, angezogen. Die Abstoßung der Kugel A und die Anziehung der Kugel B waren beide dem Quadrate der mittleren Dichte der Elektricität auf der Batterie oder dem Quadrate des Potentiales proportional; deshalb muss die Dichte, welche nöthig ist, um die Kugel *a* aus ihrer Berührung mit der oberen Kugel A zu bringen,

oder um diese Kugel von einer zwischenliegenden Position, in welcher sie durch eine Hemmung erhalten wurde, fallen zu lassen, der Quadratwurzel aus den Zulegegewichten p proportional sein; dies zeigt die folgende Tafel:

Gewicht p	2 Flaschen m beob.	2 Flaschen m gerech.	3 Flaschen m beob.	3 Flaschen m gerech.	4 Flaschen m beob.	4 Flaschen m gerech.
1	3·5	3·6	5·5	5·4	"	"
2	5	5·1	7·5	7·6	10	10·1
3	6	6·2	9·7	9·3	12	12·4
4	7	7·2	11	10·7	15	14·3

458. Elektrische Influenz zwischen zwei Platten. Volta hatte, um seine Elektrometer zu graduieren, ein einfaches Mittel ersonnen, um einem Körper Elektricitätsmengen zu ertheilen, die in irgendeinem Verhältnisse wachsen (1) und er hat die auf diese Weise graduierten Instrumente zum Studium der Attraction zweier Scheiben angewendet. Die aufeinander folgenden Funken eines Elektrophors werden zuerst sehr schnell schwächer und schwächer, von einem gewissen Momente an werden sie aber einander identisch; Volta überzeugte sich überdies davon, indem er nachwies, dass eine Leydnerflasche, die durch zehn Funken eines Elektrophors geladen war, den Blättchen eines Elektrometer immer dieselbe Ablenkung ertheilte, wenn man mehreremale den Versuch wiederholte. Da andererseits die Capacität einer gewöhnlichen Leydnerflasche im Verhältnisse zu jener einer Elektrophorscheibe sehr groß ist, so konnte man annehmen, dass die Ladung der Flasche der Anzahl der Funken, welche ihr durch diese Scheibe gegeben wurden, proportional war.

Volta hieng dann eine leitende Scheibe an den Balken einer Wage mittelst Seidenfäden oberhalb eines Tisches auf,

(1) Collezione dell' opere, t. I., part. II., pg. 14.

welcher selbst eine größere nicht isolierte Scheibe trug; diese letztere befand sich ungefähr zwei Zoll von der ersteren. Die isolierte Scheibe wurde mittelst einer Leydnerflasche elektrisiert und man bestimmte die Gewichte, welche man in die andere Wageschale bringen musste, um der elektrischen Anziehung das Gleichgewicht zu halten. Volta hat gefunden, dass für einen und denselben Grad des Elektrometers, d. h. für ein constantes Potential, die Anziehung proportional der Oberfläche der beweglichen Scheibe ist und dass diese Anziehung proportional dem Quadrate des elektrischen Grades, oder dem des Potentiales ist.

So waren in einer Reihe von Versuchen die Gewichte successiv 24, 12, 6 und 3 Gran, die Ablenkungen der Blättchen des Elektroskopes, welche durch die Flasche, die zum Laden der Scheibe diente, hervorgerufen wurden, waren 45, 35, 25 und zwischen 17 und 18 Grade. Da die Proportionalität der Ablenkungen mit den Elektricitätsmengen fast genau bis 35° stattfindet und die Graduierungstabelle für den ersten Versuch eine Ladung von 50 ergibt, so erhält man:

Elektrische Ladung m	Anziehung der Scheiben p	$\frac{p}{m^2}$
50	24	104
35	12	102
25	6	104
17·5	3	102

459. Dieselben Gesetze wurden von Harris(¹) bestätigt, indem er — um das Potential auf dem elektrisierten Körper zu variieren — ein einfaches Influenzphänomen in Anwendung brachte. Eine leitende isolierte Scheibe A (Fig. 200) wird durch einen Draht mit der einen der einander anziehenden Scheiben a der Wage in leitende Verbindung gebracht, während die andere Scheibe b mit dem Erdboden in leitender Ver-

(¹) Leçons d'électricité, pg. 35 u. f.

bindung steht. Eine zweite Platte B, welche ebenfalls isoliert ist, wird von einer Mikrometerschraube getragen, die es gestattet, die Scheibe B in verschiedene Entfernungen von der Scheibe A zu bringen. Man bringt die Scheibe A in Verbindung mit dem Erdboden, ladet die Scheibe B mit einer Leydnerflasche von genügend großer Capacität, so dass sie durch diese Berührung nur einen unmerklichen Verlust erfährt, dann isoliert man A, entfernt B und bestimmt die Wirkung, welche zwischen den Scheiben *a* und *b* bei einer bestimmten Distanz herrscht. Man beginnt dann dieselbe Operation für eine andere Entfernung der Scheiben A und B. Harris hat auf diese Weise gefunden, dass die anziehende Kraft zwischen den Scheiben *a* und *b* genau umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernungen der Scheiben A und B ist. Daraus folgt, dass die Menge der durch Influenz auf der Scheibe A hervorgerufenen Elektricität umgekehrt proportional ist der Entfernung von der influencierenden Scheibe B, was eine Folgerung der Theorie ist.

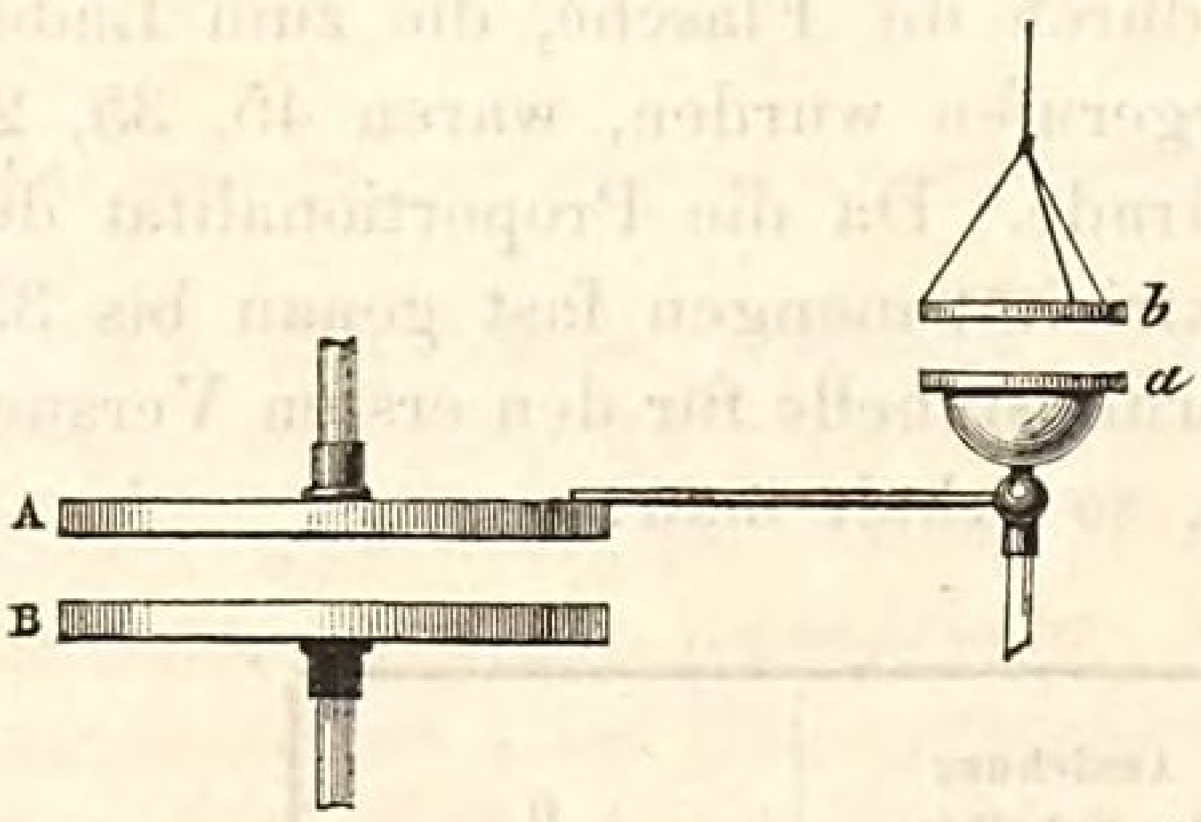


Fig. 200.

Wenn man die Scheibe A mit der Leydnerflasche ladet, während die Scheibe B mit dem Erdboden in leitender Verbindung ist und dann entfernt wird, so ist die anziehende Kraft der Scheiben wieder dem Quadrate der Entfernung der Platten umgekehrt proportional. Dies musste sein, da die elektrische Capacität der Platte A fast umgekehrt proportional ihrer Entfernung von der Platte B ist.

Wenn schließlich die beiden Scheiben *a* und *b* der Wage mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen und isoliert sind, ziehen sie sich im umgekehrten Verhältnisse der sie trennenden Distanz an. Das von Harris nachgewiesene Gesetz muss genau sein, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, welche von den Dimensionen der einander anziehenden Scheiben abhängen, da die Wirkung einer elektrisierten Ebene auf

einen äußeren Punkt der Entfernung dieses Punktes von der Ebene umgekehrt proportional ist.

Die Theorie der Influenzwirkung zweier parallelen Ebenen wurde überdies von Thomson gelegentlich der Construction der absoluten Elektrometer in erschöpfender Weise studiert und bestätigt.

460. Wirkung zweier Kugeln. Harris hat auch die Wirkung zweier gleichen Kugeln bestimmt, von denen die eine mit einer Leydnerflasche in leitende Verbindung, d. h. auf constantes Potential gebracht war, während die andere nicht isoliert war. Er hat gefunden, dass die Anziehung der beiden Kugeln fast umgekehrt proportional war der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kugeln und der Entfernung $c - 2r$ ihrer Oberflächen. Wenn man den Radius der Kugeln als Einheit nimmt und mit F die anziehende Kraft bezeichnet, so hat man daher:

$$F = \frac{K}{c(c-2)}.$$

Dieser Ausdruck ist in vollkommener Übereinstimmung mit den Beobachtungsresultaten von Harris, aber er kann zufolge keiner Theorie als Repräsentant des physikalischen Gesetzes der Erscheinung betrachtet werden. Denn es würde nach dieser Formel die Wirkung in einer großen Entfernung dem Quadrate der Entfernung der Mittelpunkte umgekehrt proportional werden; wenn aber die Kugeln sehr entfernt sind, so strebt die Elektricitätsmenge der nicht isolierten Kugel der Entfernung umgekehrt proportional zu werden, die anziehende Kraft ist dem Producte der Elektricitätsmengen der beiden Kugeln direct und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, so dass schließlich die Wirkung der dritten Potenz von c umgekehrt proportional sein muss. Thomson(¹) hat auf den Fall der Versuche von Harris die Formeln in Anwendung gebracht, welche er für die Anziehung der Kugeln aufstellte. Die folgende Tabelle zeigt, dass die so gerechneten Resultate merklich von den Beobachtungsergebnissen differieren;

(¹) Reprint of papers, pg. 21.

die Unterschiede zeigen sich aber in jenem Sinne, den man voraussehen konnte; andererseits wurden die Versuche von Harris nicht mit so genügender Sorgfalt ausgeführt, dass man diesen Mangel der Übereinstimmung als einen Einwurf gegen die Theorie betrachten könnte.

Entfernung der Mittelpunkte	Anziehung		
	beobachtet	gerechnet nach der Formel	
		von Harris	von Thomson
2·3	15	"	"
2·5	8·25	8·28	7·94
2·8	4·6	4·62	4·18
3	3·5	3·45	3

Elektrische Capacitäten.

461. Experimentelle Bestimmung der Capacität nach der Methode von Cavendish. In dem Zeitraume von 1771—1781 bestimmte Cavendish(¹) schon die Capacitäten verschiedener Körper im Vergleiche mit den von gewissen Einheitscondensatoren, die er „trial plates“ (Vergleichsplatten) nannte. Die von Cavendish erhaltenen Resultate sind — wenn man die damaligen noch ungenauen und unvollkommenen Beobachtungsmittel in Erwägung zieht — von einer bewunderungswerten Genauigkeit und stimmen mit der Theorie im allgemeinen sehr gut überein.

Im Nachstehenden wollen wir die Versuchsmethode, welche Cavendish in Anwendung brachte, eingehender studieren. Die „trial plates“ waren Glaslamellencondensatoren, welche mit Stanniol überkleidet waren; sie hatten verschiedene Capacitäten, die im absoluten Maße bestimmt waren, indem man sie verglich mit der Capacität einer Kugel von 12·5 Inch

(¹) Man sehe Harris, leçons d'électricité, pg. 159 und „the electrical researches of the Hon. Henry Cavendish, F. R. S., written between 1771—1781,“ edited by J. Clerk Maxwell, F. R. S. Cambridge 1879.

(1 *m* hat 39.370432 Inch) im Durchmesser, welche in der Mitte des Versuchszimmers aufgehängt war. Die Capacität der kleinsten Vergleichsplatte wurde als Einheit angenommen. Cavendish verschaffte sich so eine Sammlung von „trial plates“ indem

3	die	Capacität	1
3	„	„	3
3	„	„	9
1	„	„	27

besaßen. Durch geeignete Combination dieser Platten konnte ein Condensator construiert werden, dessen Capacität zwischen den Grenzen 1 und 40 lag. Eine von den Vergleichsplatten war mit einer gleitenden Belegung versehen, d. h. mit zwei übereinanderliegenden Stanniolplatten, welche gegeneinander verschoben werden konnten, so dass die Capacität einer solchen Vergleichsplatte um eine sehr geringe Quantität variiert werden konnte.

Bei der Vergleichung der Capacitäten zweier verschiedenen Körper haben wir zu bedenken, dass wenn wir sie beide gleichzeitig mit derselben Elektricitätsquelle verbinden, also sie auf dasselbe Potential bringen, die Ladungen, welche diese Körper annehmen, direct ihren Capacitäten proportional sind und man muss deshalb, wenn man das Verhältnis der letzteren kennen will, das Verhältnis der Ladungen auf den beiden Körpern bestimmen.

Die erste Versuchsweise Cavendish bezog sich auf die Vergleichung der Capacität des zu untersuchenden Körpers (etwa eines Condensators) und der variablen Vergleichsplatten, welche er als willkürliche Einheiten construierte.

Diese Vergleichsmethode wurde von Cavendish als Nullmethode („zero method“) bezeichnet, indem die Vergleichsplatte so gewählt wurde, dass zwischen ihr und dem zu prüfenden Condensator oder Körper im allgemeinen keine Capacitätsdifferenz bestand. In den folgenden Figuren ist diese Methode (Fig. 201) schematisch dargestellt: B bedeutet den zu untersuchenden Condensator, A den Vergleichscondensator oder die Trialplatte. Man bringt die beiden oberen Belegungen mit einer und derselben Elektricitätsquelle, etwa dem

Knopfe einer geladenen Leydnerflasche, in leitende Verbindung und leitet die unteren Belegungen zur Erde ab. Die obere Belegung des zu prüfenden Condensators nimmt die Elektricitätsmenge $+ x$ an, die obere Belegung des Vergleichscondensators die Elektricitätsmenge $+ y$ und es ist begreiflich, dass — weil die beiden Condensatoren dasselbe Potential besitzen — die Ladungen x und y sich sowie die Capacitäten

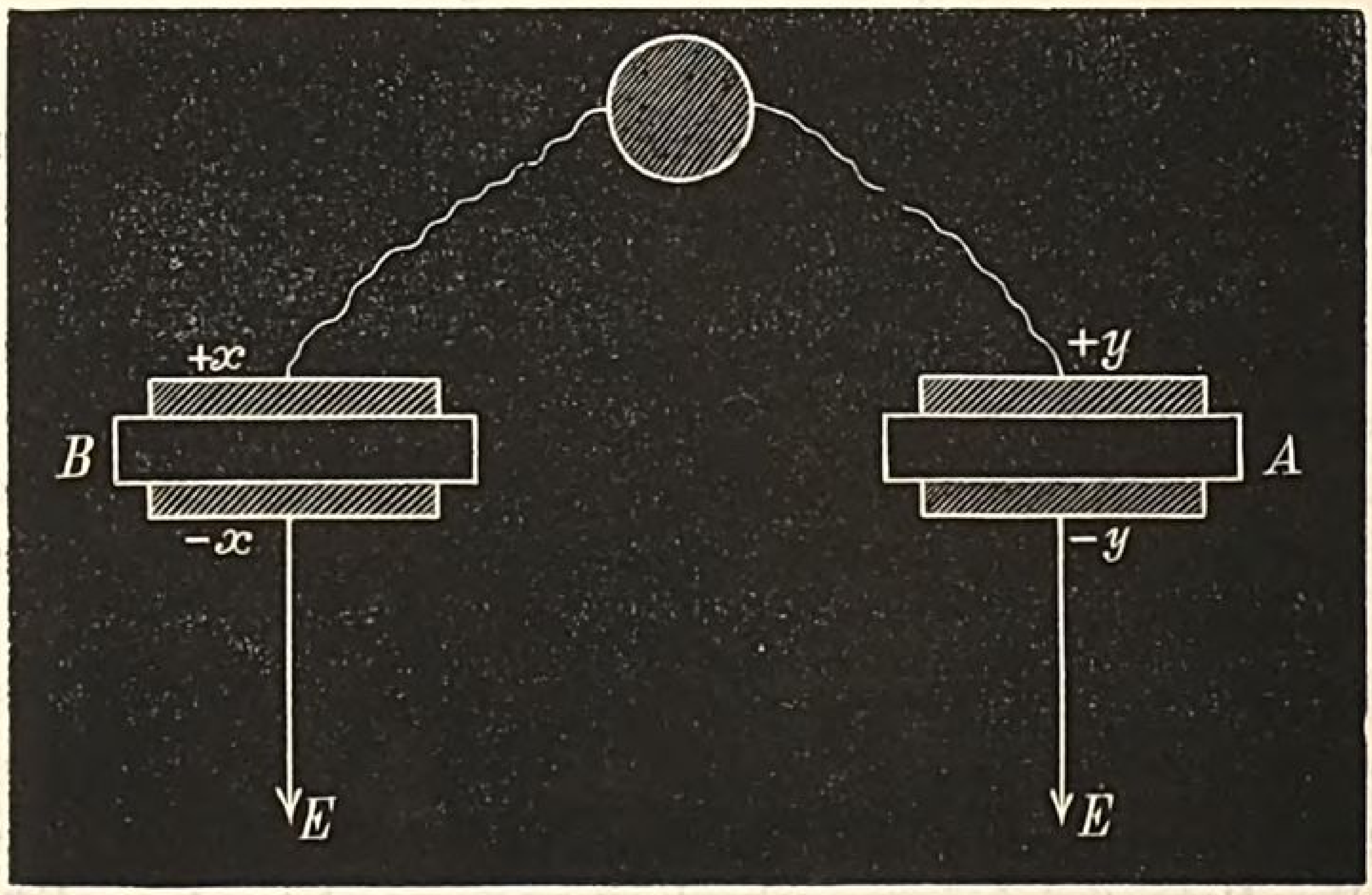


Fig. 201.

von B und A verhalten. Die unteren Belegungen der beiden Condensatoren erhalten die Elektricitätsmengen $- x$ und $- y$ durch Influenz.

Stellt man durch eine geeignete mechanische Vorrichtung die durch die zweite Figur (Fig. 202) dargestellte Verbindung her, d. h. leitet man die untere Belegung von B und die obere von A zur Erde, und verbindet die obere Belegung des Condensators B mit der unteren Belegung des Condensators A durch einen Draht, auf dem ein Markkugelelektrometer hängt, so wird, wenn die Capacitäten von B und A einander gleich sind, keine Divergenz der Pendel eintreten, da die positive Elektricitätsmenge x die negative Elektricitätsmenge $- y$ neutralisiert. Wenn aber die Pendel mit positiver Elektricität divergieren, dann ist die Capacität von B größer als jene von A und umgekehrt. Durch geeignete Wahl der Trialplatte konnte man die Capacität der letzteren jener des zu prüfenden Körpers äquivalent machen.

Man hat es für zweckmäßig befunden, zwei Vergleichsplatten A und A' von der Beschaffenheit zu suchen, dass die Capacität der ersteren um ebensoviel kleiner, als die Capacität der letzteren größer als die Capacität des zu untersuchenden Condensators B ist. Das arithmetische Mittel der Capacitäten von A und A' gibt die Capacität von B an.

Wie man die Capacitäten der „trial plates" oder der Vergleichscondensatoren nach absolutem Maße messen kann, indem man sie in Vergleichung mit der Capacität einer Kugel zieht, zeigen die beiden folgenden Figuren (Fig. 203 und 204), in denen B diese Kugel, A die Vergleichsplatte bedeutet. Diese schematischen Figuren bedürfen keiner weiteren Erläuterung, es sei nur bemerkt, dass strenge genommen die

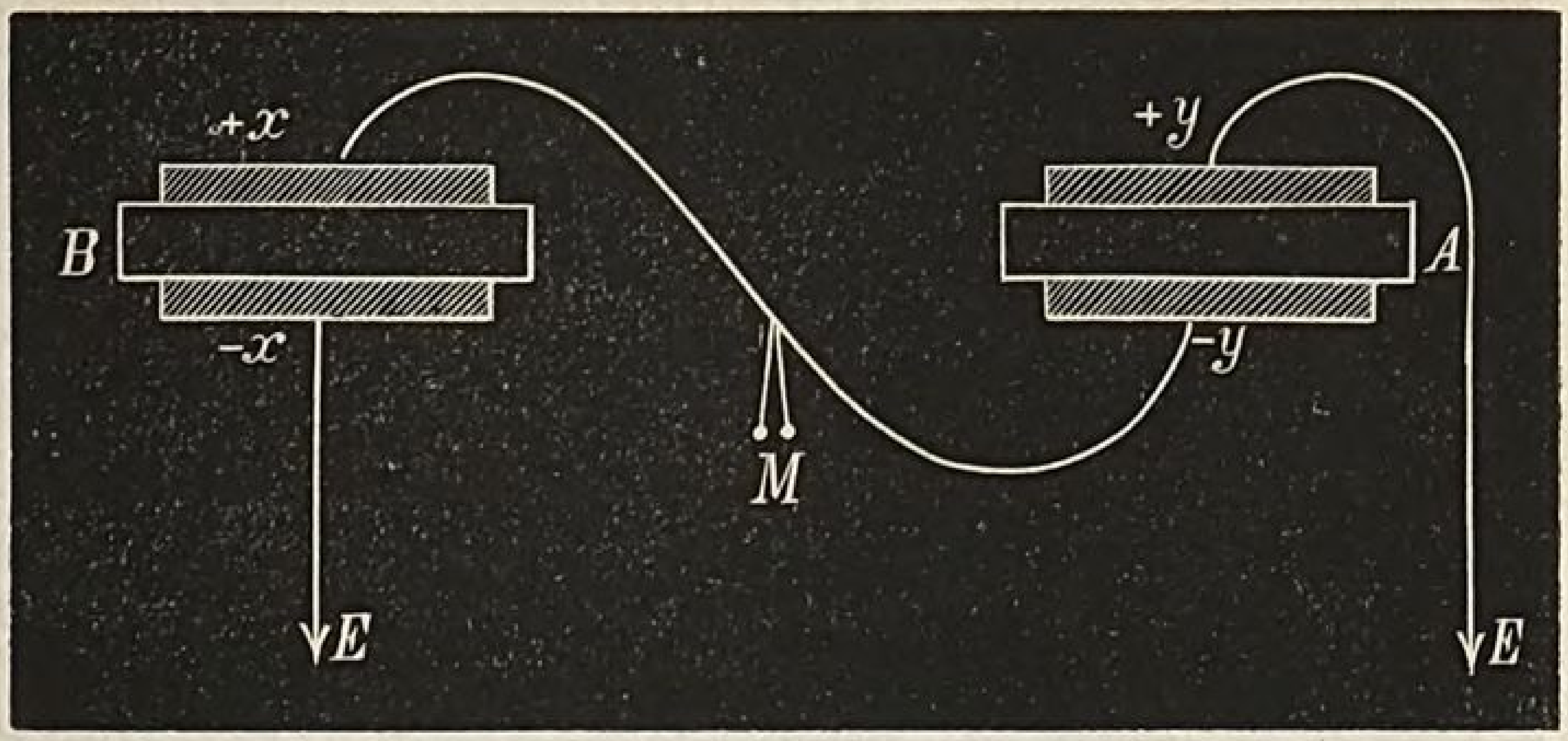


Fig. 202.

Kugel B die obere Belegung eines Condensators vorstellt, dessen untere Belegung die Wände und der Boden des Versuchszimmers bilden, während die zwischenliegende Luft das isolierende Medium darstellt.

462. Principiell wenig verschieden von der jetzt erörterten Methode, die Capacitäten von Körpern und Condensatoren zu bestimmen, ist die folgende auch von C a v e n d i s h in Anwendung gebrachte: Als Vergleichskörper wurde eine leitende Scheibe von variabler Größe benützt, welche aus zwei übereinanderliegenden quadratischen Zinnplatten gebildet war, die gegeneinander verschoben werden konnten. Mit einer und derselben Elektricitätsquelle z. B. einer Nairne'schen Elektrisiermaschine wurden zwei i d e n t i s c h e Leydnerflaschen elektrisiert, wobei die äußeren Belegungen abgeleitet waren;

hierauf berührte man den einen der zu studierenden Körper mit der inneren Belegung der ersten Flasche, dann die Vergleichsplatte mit der äußeren Belegung der zweiten, nachdem man die zweite Flasche isoliert und ihre innere Belegung abgeleitet hatte. Der Körper und die Scheibe sind also mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen und wenn man sie miteinander in leitende Verbindung setzt, bringt man sie in den neutralen Zustand, wenn ihre Capacitäten einander gleich sind; durch Probieren gelangt man zur Verwirklichung dieser Bedingung. Wenn die beiden Körper, die man vergleichen will, einer und derselben Größe der Scheibe äquivalent sind,

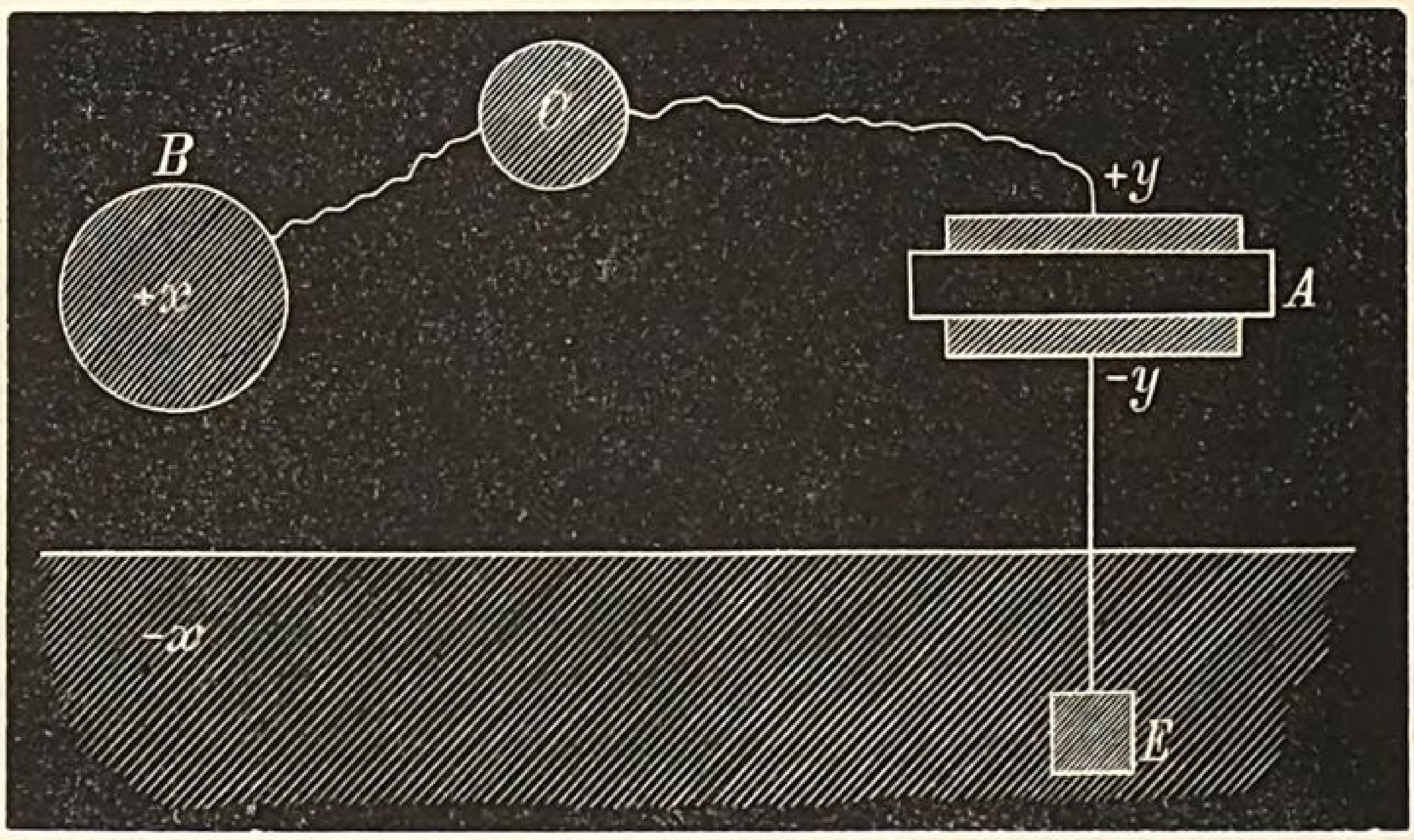


Fig. 203.

so haben sie dieselbe Capacität; im entgegengesetzten Falle geben die Dimensionen der äquivalenten Vergleichsplatten einen Begriff des Verhältnisses der elektrischen Capacitäten der Körper.

Cavendish gelangte auf diese Weise zu sehr bemerkenswerten Resultaten, von denen wir nur einige anführen wollen:

„(1) Wenn man in einem sphärischen Raume von 16 Fuß Durchmesser eine Kugel von 1 Fuß im Durchmesser aufhängt, so wird die Ladung dieser Kugel im Verhältnisse von 16:15 größer, wenn man die umgebende Oberfläche im entgegengesetzten Sinne ladet.“ Dies ist das Gesetz der Vertheilung der Elektricität auf zwei concentrischen Kugeloberflächen.

„(2) Die Capacität einer kreisförmigen Scheibe steht zu der Capacität einer Kugel von demselben Halbmesser im Verhältnisse von 1 zu 1.57." Dieses Resultat stimmt ganz mit jenem überein, welches der Calcul liefert.[1])

Für viele andere geometrisch regulär gestaltete Körper bestimmte Cavendish die elektrische Capacität und es stehen seine Ergebnisse im besten Einklange mit den später insbesonders von Maxwell angestellten Rechnungen; so fand er z. B. das Verhältnis der Capacität eines Quadrates von der Seite 1 zu jener einer Kugel vom Durchmesser 1 gleich 0·747 : 1, während die theoretischen Betrachtungen das nahe gleiche Verhältnis 0·7214 : 1 ergaben.[2]) Unter anderem ist zu

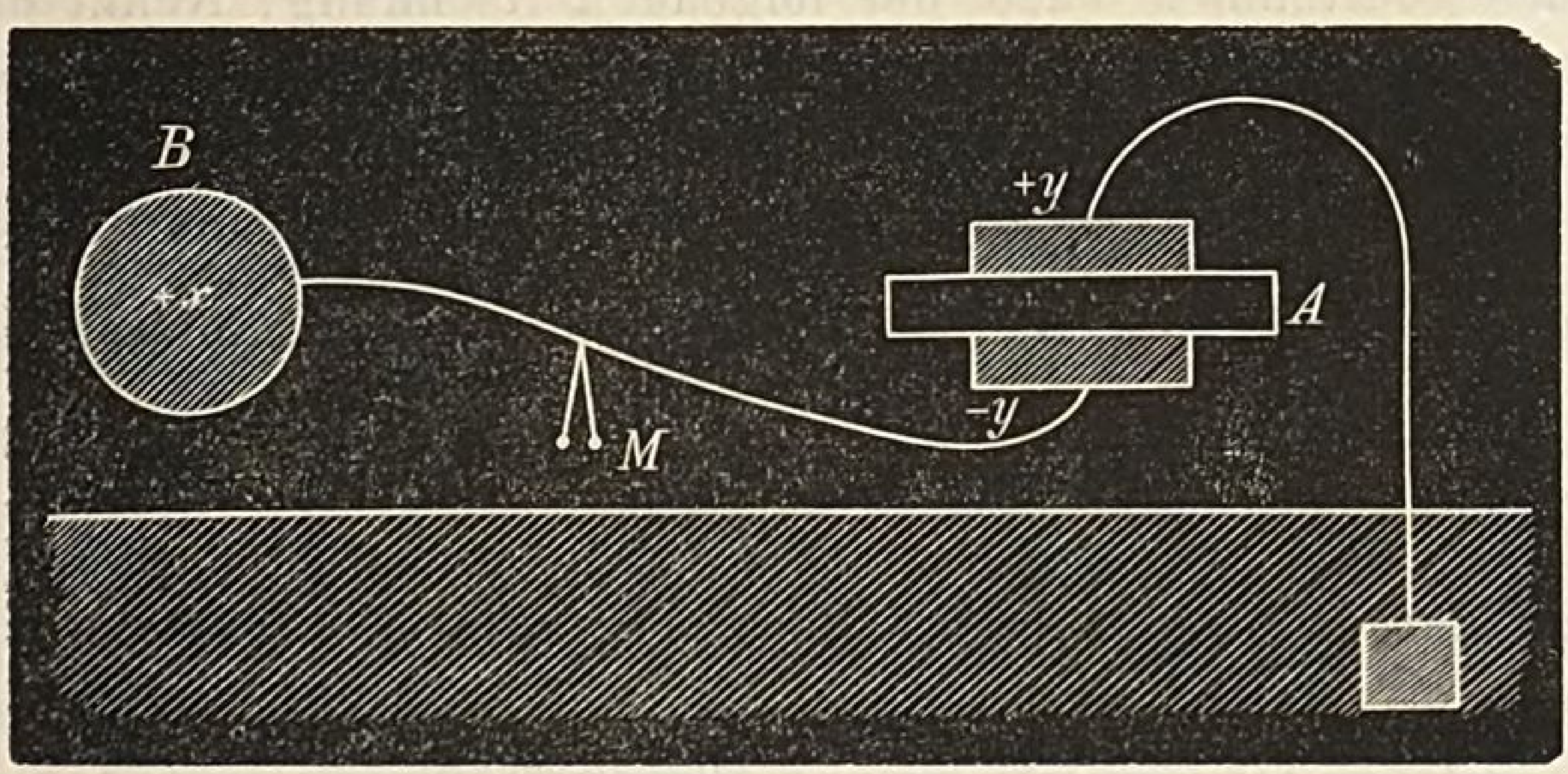


Fig. 204.

erwähnen, dass Cavendish der erste war, welcher gezeigt hat, dass für einen und denselben elektrischen Zustand die Elektricitätsmenge, welche ein belegter Glasstreifen erhalten kann, der Oberfläche der Belegung direct und der Glasdicke umgekehrt proportional ist.

463. Bezüglich der Berechnung der Ladungen sei Folgendes bemerkt: Es wurde hierbei die im Dunkeln bei der Entladung durch die Lichtphänomene sichtbare Verbreitung der Elektricität auf dem Glase berücksichtigt; daraus ergab sich, dass die Belegungen bei den dicken (ungefähr $^1/_5$ Zoll) und dünnen ($^1/_{15}$ Zoll) Platten $^7/_{100}$ resp. $^9/_{100}$ Zoll am Rande

([1]) Thomson: Reprint of papers pg. 180.
([2]) Phil. trans., t. LXVI, pg. 196.

größer zu nehmen sind. Übrigens hat Cavendish den Betrag der diesbezüglichen Correction auf folgende äußerst sinnreiche Weise [1]) geschätzt: Man verglich ganze Stanniolbelegungen mit solchen, in welchen zahlreiche Einschnitte sich befanden. Zwei solche gleichflächige Platten unterschieden sich dadurch, dass die geschlitzte Platte eine viel größere Randlänge hatte. Das Verhältnis der Capacitäten der beiden Scheiben gab das Verhältnis der Flächen der geladenen Platten an, d. i. das Verhältnis der Flächen des getheilten Stanniols und des elektrisierten Feldes um deren Ränder zu der Fläche der ungeschlitzten Stanniolplatte und des elektrisierten Raumes um deren Ränder. Man konnte so die wirkliche Fläche der elektrisierten Oberfläche bestimmen nach der folgenden Rechnung: Nennt man A die Fläche jeder Stanniolbelegung, a die Größe der elektrisierten Fläche um die ungeschlitzte Platte, b die elektrisierte Fläche um die geschlitzte Platte, M das Verhältnis der Ladungen, $N = \frac{a}{b}$ das Verhältnis der Längen der Ränder, so ist:

$$M = \frac{A + a}{B + b}$$

und daraus nach einfacher Rechnung unter Berücksichtigung der Formel:

$$N = \frac{a}{b}$$

$$a = \frac{(M - 1)\,A}{1 - \frac{M}{N}}$$

Da die Größen A, M, N mit großer Genauigkeit gemessen werden konnten, so ergab sich aus der zuletzt aufgestellten Gleichung die Größe a, um welche bei der Berechnung der Ladung der Stanniolbelegung die letztere vergrößert gedacht werden muss.

Auf die Anwendung der Methode von Cavendish zur Messung der specifischen Inductionscapacität kommen wir noch im Schlusscapitel dieses Bandes zurück.

([1]) Man sehe auch Gordon, a physical treatise on electricity and magnetisme. London 1880; Vol. I., pg. 74.

464. Volta[1] hat zur Vergleichung der elektrischen Capacitäten verschiedener Körper mittelst eines graduierten Elektrometers eine Methode zur Anwendung gebracht, die beinahe identisch mit jener ist, deren Gebrauch seitdem allgemein wurde, und deren Princip wir bereits oben angegeben haben.

De Saussure[2] beschreibt diese Methode an der Stelle, an welcher er das Mittel, absolute Messungen vorzunehmen, angibt, in folgenden Worten: „Man müsste zu diesem Behufe," sagt er, „als Vergleichsglieder gut geglättete Metallkugeln nehmen, welche in der Luft durch einfache Seidenfäden aufgehängt sind. Eine von diesen Kugeln ist nicht elektrisiert und würde, wenn sie in Berührung mit dem Körper, dessen Capacität man kennen lernen will, gebracht wird, die Spannung oder die abstoßende Kraft dieses Körpers vermindern; die Größe, um welche diese Berührung die Kraft vermindern würde, würde das Verhältnis der Capacität des Körpers zu jener der Kugel liefern. . . . Es scheint mir, dass man nach diesen Principien die Elektrometrie behandeln müsste, wenn man wenigstens annimmt — wie es hinlänglich geprüft zu sein scheint — dass die Capacität der Körper bezüglich des elektrischen Fluidums unter sonst gleichen Umständen ihrer Oberfläche proportional ist." Wenn man von dem Fehler absieht, welcher in den letzten Worten dieses Citates enthalten ist, erkennt man, dass man wenig hinzuzufügen hat, um die Beschreibung der Versuche zu vervollständigen.

465. Um die Potentiale eines Leiters A, der nacheinander isoliert, dann in leitende Verbindung mit einem anderen Leiter B gesetzt wurde, zu vergleichen, kann man nach dem Vorgange von Faraday mittelst eines Probescheibchens oder einer Probekugel das Verhältnis der elektrischen Dichten in einem und demselben Punkte des Körpers A in den beiden Fällen bestimmen; aber diese Methode besitzt keine große Genauigkeit.

(1) Collezione dell' opere, t. I., part. II., pg. 53.
(2) Voyage dans les Alpes, t. II., pg. 179.

Sehr oft vergleicht man die Potentiale mit einem Elektrometer und dann ist es nothwendig, die Capacität dieses Elektrometers, welche im allgemeinen nicht vernachlässigt werden kann, in Rechnung zu ziehen. Man kann überdies als Vergleichsglied zwischen zwei vorausgesetzten Körpern die Capacität des Elektrometers selbst nehmen; diese kann man leicht nach Belieben vergrößern, wenn man den Apparat in leitende Verbindung mit irgendeinem isolierten Leiter bringt.

Die Methode bietet keinerlei Schwierigkeiten, wenn man sich einfach die Aufgabe stellt, das Verhältnis der Capacitäten zu bestimmen. Nehmen wir z. B. an, dass man ein Elektrometer wie jenes von Thomson anwendet, in welchem die Ablenkung der beweglichen Nadel deren Potential proportional ist. Nennen wir C und C′ die Capacitäten der beiden Körper A und B, welche man vergleichen will, und C_1 die Capacität des Elektrometers, wenn es entweder allein oder mit einem Leiter verbunden ist.

Man ladet die Nadel des Elektrometers mit einer bestimmten Elektricitätsmenge und man bestimmt die Ablenkung δ_1; man bringt dann das Instrument in Verbindung mit dem fernstehenden Körper A, die Ablenkung wird nun auf δ reduciert; man hat dann:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{C_1 + C}{C_1},$$

woraus man schließt, dass

$$\frac{C}{C_1} = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta}$$

ist.

Man beginnt vom neuen den Versuch mit dem Körper B und man erhält die Ablenkungen δ'_1 und δ', welche liefern

$$\frac{C'}{C_1} = \frac{\delta_1' - \delta'}{\delta'}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{C}{C'} = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1' - \delta'} \cdot \frac{\delta'}{\delta}.$$

Es gibt außerdem verschiedene Methoden, um die Versuche anzuordnen. Wenn man eine Elektricitätsquelle von constantem Potentiale V anwendet, z. B. eine elektrische Säule, so kann man so vorgehen, dass die Capacität des Elektrometers gar nicht in Betracht kommt. Der Körper A nimmt, wenn er mit der Elektricitätsquelle in leitende Verbindung gesetzt wird, eine Elektricitätsmenge gleich CV an; man verbindet ihn dann mit der Nadel des Elektrometers, die ursprünglich im neutralen Zustande war, und erhält eine Ablenkung α. Nachdem man vom neuen den Körper A mit der Elektricitätsquelle geladen hat, isoliert man ihn und bringt ihn in leitende Verbindung mit dem Körper B; es bleibt auf dem ersten Körper dann nur mehr ein Bruchtheil $\frac{C}{C + C'}$ seiner ursprünglichen Ladung; man unterbricht diese Verbindung und verbindet den Körper A mit dem Elektrometer; man erhält dann eine neue Ablenkung α'. Die Ablenkungen sind den beiden Ladungen des Körpers A proportional und deshalb hat man:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{C}{C + C'};$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{C}{C'} = \frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'}.$$

Es resultiert daraus auch die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\alpha'}{\alpha - \alpha'} = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1' - \delta'} \cdot \frac{\delta'}{\delta},$$

welche zur Controlle der Genauigkeit der Versuche dienen wird.

Wenn die Ablenkungen des Elektrometers den Potentialen nicht proportional sind, so wird man diese Ablenkungen durch Zahlen ersetzen, welche aus einer Graduierungstabelle entnommen sind. Man muss nur sich dessen versichern, dass die Capacität des Elektrometers fast unabhängig von der Lage der Nadel innerhalb jener Grenzen ist, innerhalb welcher man es anwendet.

Bei Capacitätsbestimmungen dieser Art ist die Voraussetzung gemacht, dass die Vertheilung der Elektricität auf der Elektrometernadel, den Quadranten und den einzelnen miteinander verbundenen Körpern bei ihrer wechselseitigen Verbindung ebendieselbe ist, wie wenn sie für sich allein geladen wären, mit anderen Worten, dass man die Ladung der Verbindungsdrähte unberücksichtigt lassen kann.

466. Um die Capacitäten C und C′ in absoluten Werten zu bestimmen, ist es nothwendig, einen Körper von bekannter Capacität zu haben. Die erste sich darbietende Idee ist die, als Vergleichsglied eine Kugel zu wählen, deren Capacität durch dieselbe Zahl wie der Radius dargestellt wird; man begegnet aber da einer Hauptschwierigkeit.

Es ist fast unmöglich, einen aus einer einzigen Oberfläche gebildeten Leiter, wie eine Kugel, dem Einflusse der äußeren Körper zu entziehen, so z. B. dem Einflusse der Wände des Saales, in welchem man arbeitet, und der mannigfaltigen Gegenstände, welche den Körper umgeben. Diese Fehlerquelle kann niemals vernachlässigt werden und man kann sie nur dadurch vermeiden, dass man Leiter von einer zusammengesetzteren Gestalt anwendet, so z. B. sphärische Luftlamellen-Condensatoren, oder cylindrische oder scheibenförmige Condensatoren dieser Art, für welche man die Formel für die elektrische Capacität kennt.

467. Wenn man einen Condensator anwendet, der aus einer Kugel vom Radius R_1 gebildet ist, die von zwei den Magdeburgischen Halbkugeln ähnlichen Calotten, deren innerer Halbmesser R_2 ist, umgeben wird, so weiß man, dass die Capacität der inneren Kugel dargestellt ist durch:

$$R_1 \frac{R_2}{R_2 - R_1}.$$

Man muss nur dafür Sorge tragen, dass die beiden sphärischen Oberflächen nicht zu nahe sind, damit man den Unterschied $R_2 - R_1$ mit genügender Genauigkeit bestimmen kann und damit der Fehler der Centrierung der beiden Oberflächen keinen zu großen Einfluss habe. Angot[1] bediente sich z. B.

[1] Ann. sc. de l'Ecole Normale 3, pg. 253, 1874.

eines sphärischen Condensators, dessen Halbmesser, in Millimeter ausgedrückt, waren

$$R_1 = 39{\cdot}5$$
$$R_2 = 62,$$

woraus man für die Capacität der inneren Kugel erhält:

$$C_1 = 39{\cdot}5 \frac{62}{62 - 39{\cdot}5} = 109.$$

Vier Reihen verschiedener Versuche, die nach einer Methode angestellt wurden, welche der oben angegebenen analog ist, lieferten für die Capacität des Elektrometers die Werte: 433, 435, 429, 431, deren Mittel 432 ist. Wir haben diese Zahlen erwähnt, um zu zeigen, welchen Genauigkeitsgrad diese Bestimmungsart zulässt.

468. Andere Methoden, um die Capacität von Condensatoren zu vergleichen. Außer den erwähnten Methoden zur Vergleichung der Capacität von Condensatoren hat man noch andere mit Vortheil in Anwendung gebracht.

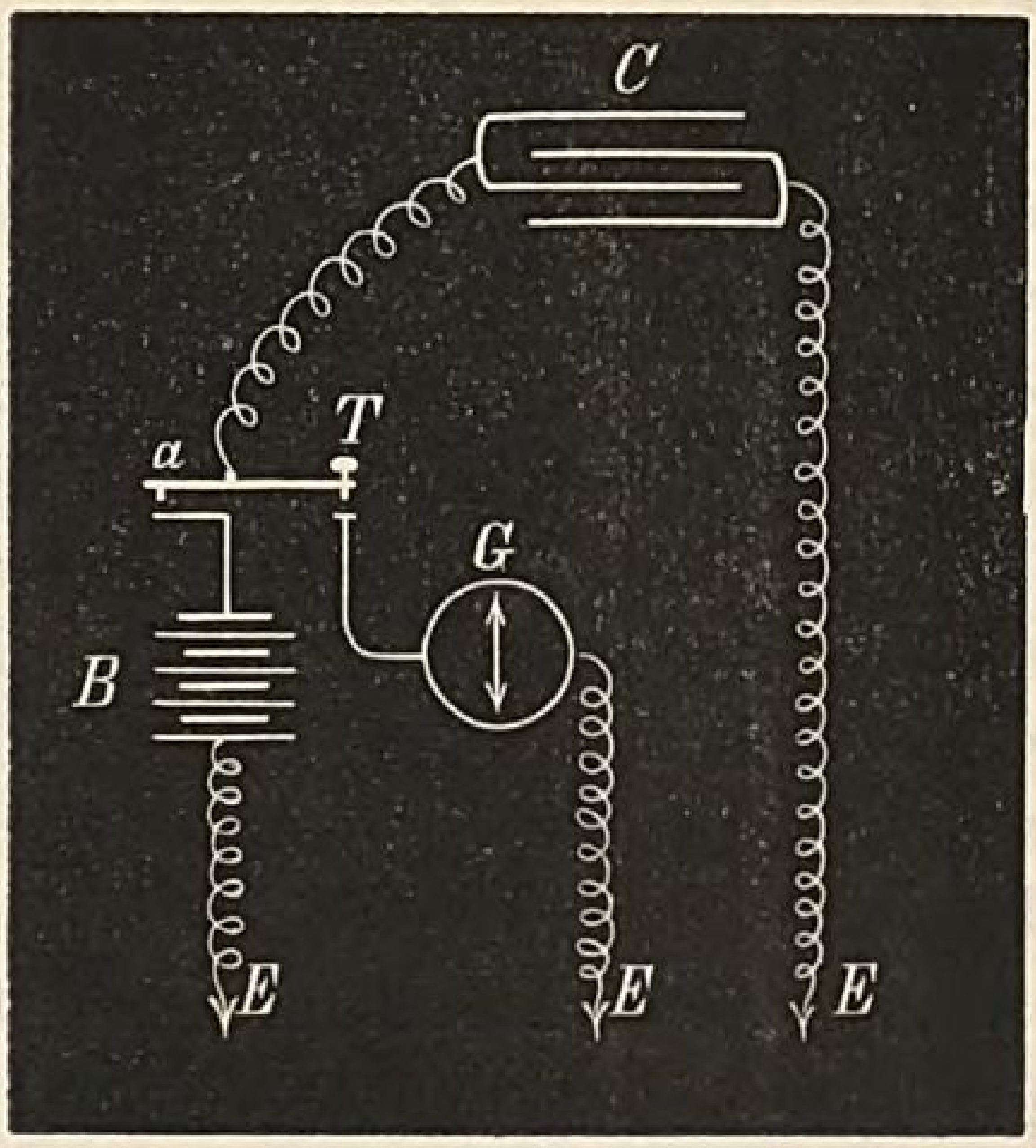


Fig. 205.

So hat man z. B. den auf seine Capacität zu untersuchenden Condensator und den Vergleichscondensator durch dieselbe elektromotorische Kraft (Fig. 205) (etwa durch eine galvanische Batterie) geladen und bei der Entladung eines jeden Condensators durch ein Galvanometer die Ablenkung des letzteren bestimmt. Die beiden Entladungsströme verhalten sich nämlich wegen der Gleichheit der sie erzeugenden elektromotorischen Kräfte wie die Capacitäten der Condensatoren, andererseits verhalten sich auch die Entladungsströme wie die entsprechenden Sinus der halben Ausschlagswinkel der Galvanometernadel. Bezeichnen wir daher die Capacitäten der beiden Condensatoren C_1 und C_2, die bei ihrer Entladung erzielten Ausschläge der Galvanometernadel mit α_1 und α_2, so ist

$$C_1 : C_2 = \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha_1}{2} : \mathrm{Sin}\,\frac{\alpha_2}{2},$$

wodurch das Problem gelöst. Um in einer praktisch bequemen Weise das Laden und Entladen der Condensatoren vornehmen zu können, bedient man sich mit Vortheil eines Entladungsschlüssels, wie er von dem englischen Forscher Sabine construiert wurde.

Eine andere Methode zur Vergleichung der Capacitäten zweier Condensatoren wäre etwa die folgende: Man verbindet die beiden Pole einer Batterie durch einen großen Widerstand; einen Punkt *a* desselben leitet man zur Erde ab. Denkt man sich zwei Stellen des Widerstandes *b* und *c*, welche von *a* gleichweit entfernt sind, mit den beiden zu vergleichenden Condensatoren verbunden, so werden, da *b* und *c* gleiche, aber entgegengesetzte Potentiale besitzen, die Ladungen der Condensatoren gleich und entgegengesetzt sein, wenn ihre Capacitäten einander gleichkommen. Isoliert man dann die Condensatoren und verbindet sie untereinander, so werden sich die entgegengesetzten Ladungen neutralisieren und ein in den Verbindungsdraht eingeschaltetes Galvanometer oder Elektrometer wird nicht afficiert werden.

Wären die Capacitäten der beiden Condensatoren verschieden, so könnte man zwei Widerstände $a\alpha$ und $a\beta$ ausfindig machen, von der Art, dass, wenn man die Condensatoren mit α und β verbindet, sie genau gleiche, aber entgegengesetzte Ladung erhalten. Aus leicht begreiflichen Gründen werden dann die Capacitäten der beiden Condensatoren umgekehrt proportional den Widerständen $a\alpha$ und $a\beta$ sein.

Wir werden im Schlusskapitel dieses Bandes noch andere Methoden kennen lernen, welche eine Vergleichung von Capacitäten von Condensatoren ermöglichen. An dieser Stelle sei nur noch einer Methode gedacht, welche von William Thomson in Anwendung gebracht wurde und von der Maxwell[1] mit Recht sagt, dass sie der Methode der Wheatstone'schen Brücke im Galvanismus entspricht.

(1) Maxwell. Die Elektricität in elementarer Behandlung (deutsch von Dr. L. Graetz) pg. 97.

469. Beschreibung der Methode. Wir stellen uns in der folgenden Figur (Fig. 206) die Condensatoren als Leydnerflaschen vor. Die beiden Condensatoren P und Q stellt man auf eine leitende, aber isolierte Platte β, so dass ihre äußeren Belegungen miteinander in Verbindung stehen. Die äußeren Belegungen der beiden anderen Condensatoren R und S verbindet man untereinander und mit dem Erdboden. Ferner sind noch die inneren Belegungen von P und R und von Q und S untereinander verbunden. Zunächst ladet man die inneren Belegungen von P und R bis zum Potential A, die inneren Belegungen von Q und S bis zum Potential C, wobei man Sorge trägt, dass die leitende Platte β mit der Erde in leitender Verbindung steht. Nach geschehener Ladung hebt man

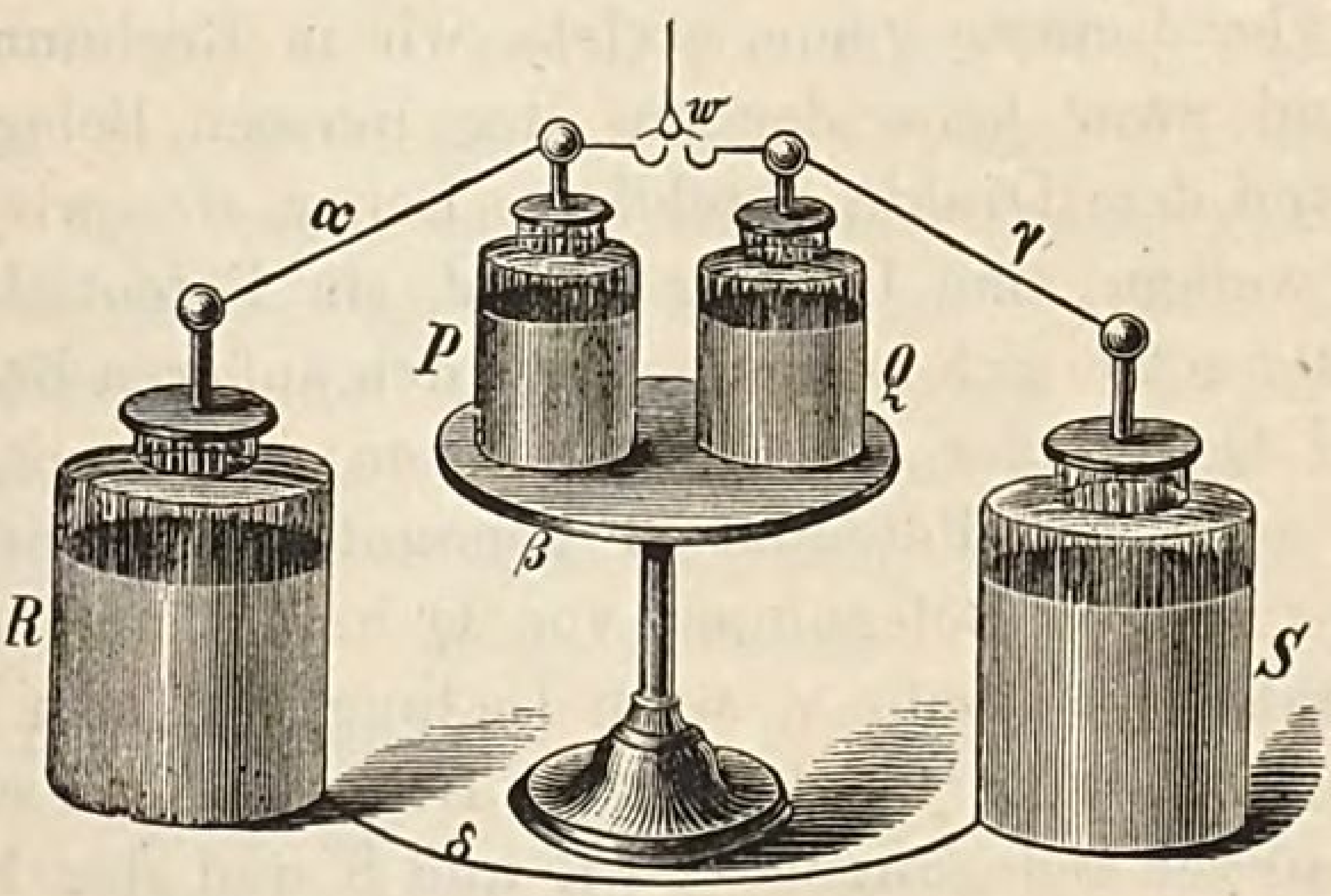


Fig. 206.

die letztgenannte Verbindung auf und bringt eine leitende Verbindung zwischen der Platte β und der Elektrode eines Quadrantenelektrometers an, dessen andere Elektrode zur Erde abgeleitet ist. Es ist leicht einzusehen, dass die Elektrometernadel keinerlei Deviation erfahren wird, da beide Elektroden auf gleichem Potentiale, nämlich dem der Erde, sich befinden.

Setzt man nun die vier inneren Belegungen der Condensatoren in Verbindung, was z. B. durch das Fallenlassen eines isolierten Drahtes *w* erreicht werden kann, der eine leitende Brücke zwischen den von den Condensatoren P und Q ausgehenden horizontalen Drähten herstellt, so wird, weil die Potentiale von α und γ als verschieden vorausgesetzt wurden,

eine Entladung erfolgen, und es erhält die leitende Platte β ein von Null verschiedenes Potential, was durch eine Ablenkung der Elektrometernadel angezeigt wird. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass das Potential von β Null bleibt, wenn zwischen den Capacitäten der vier Condensatoren folgende Beziehung besteht:

$$P : Q = (R + \alpha) : (S + \gamma),$$

wenn man die Capacitäten der in der Figur angedeuteten Condensatoren und Verbindungsdrähte mit den gleichnamigen Buchstaben bezeichnet.

470. Um diese Beziehungen nachzuweisen, stellen wir uns die Condensatoren als Plattencondensatoren vor und entwerfen folgendes Schema der Verbindungen: es sind im allgemeinen vier Leitersysteme, welche wir in Rechnung ziehen müssen, und zwar habe der aus der inneren Belegung von P und R und dem Drahte α gebildete Leiter, den wir kurzweg α nennen wollen, eine Ladung *a* und ein Potential A; der zweite Leiter setze sich zusammen aus den äußeren Belegungen von P und Q und der Metallplatte β, er werde mit β, seine Ladung *b* und sein Potential B genannt; der dritte Leiter umfasst die inneren Belegungen von Q und S und den Verbindungsdraht γ, er heiße γ, seine Ladung und sein Potential seien respective *c* und C; der vierte Leiter bestehe schließlich aus den äußeren Belegungen von R und S und der Erde, mit welcher diese Belegungen verbunden sind; das Potential dieses Leiters ist Null, die Elektricitätsmenge desselben ist gleich dem der anderen Leiter, aber vom entgegengesetzten Zeichen.

Wie wir bereits in der ersten Abtheilung (pag. 357) gehört haben, hängt die Ladung jedes einzelnen dieser Leitersysteme nicht nur von seinem eigenen Potentiale, sondern auch von dem Potentiale der benachbarten Leiter ab; es war allgemein die Formel aufgestellt:

$$M_p = \gamma_{p1} V_1 + \gamma_{p2} V_2 + \dots \gamma_{pn} V_2$$

in welcher γ_{pp} die Capacität des Leiters, dessen Ladung M_p ist, bezeichnet wurde; die Coefficienten $\gamma_{p1}, \gamma_{p2}, \gamma_{p3}, \dots \gamma_{pn}$ heißen die Inductions-Coefficienten der anderen Leiter bezüglich des betrachteten und es ist ihre Summe stets

kleiner oder höchstens gleich der Capacität γ_{pp}. Die Größe, um welche der Capacitäts-Coefficient jedes Leiters die Summe seiner drei Inductions-Coefficienten übertrifft, wird nicht groß sein, wenn die Capacität der Knöpfe der Leydnerflaschen und ihrer Verbindungsdrähte im Vergleich zu den Capacitäten der Condensatoren klein sind. Bezeichnet man die Überschüsse der Capacitäts-Coefficienten über die Summe der drei Inductions-Coefficienten für die vier Leitersysteme mit α, β, γ, δ, so gelten nach dem Obigen jedenfalls Gleichungen von folgender Form für die Ladungen dieser Systeme:

$$
\begin{aligned}
a &= (P + R + \alpha + \eta) A - PB - RD - \eta C \\
b &= (P + Q + \beta + \xi) B - PA - QC - \xi D \\
c &= (Q + S + \gamma + \eta) C - QB - SD - \eta A \\
d &= (R + S + \delta + \xi) D - RA - SC - \xi B,
\end{aligned}
$$

wobei man bei Aufstellung dieser Gleichungen die wichtige Beziehung im Auge hatte, dass der Inductions-Coefficient eines Leiters M bezüglich eines zweiten N gleich dem Inductions-Coefficienten des Leiters N bezüglich des ersten M ist. ξ und η sind bezüglich P, Q, R, S sehr klein.

Im ersten Theile des oben angeführten Versuches ist

$$B = o,\ D = o$$

und man hat demgemäß

$$
\begin{aligned}
a &= (P + R + \alpha + \eta) A - \eta C \\
b &= -PA - QC \\
c &= (Q + S + \gamma + \eta) C - \eta A.
\end{aligned}
$$

Im zweiten Theile des Versuches wird das Potential der inneren Belegungen der vier Leydnerflaschen gleichgemacht und soll mit V bezeichnet werden; statt B tritt jetzt ein Potential B' auf. Bezeichnen wir ferner die Ladungen der drei Leitersysteme α, β, γ mit a', b', c', so gelten nun folgende Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
a' &= (P + R + \alpha) V - PB' \\
b' &= (P + Q + \beta + \xi) B' - (P + Q) V \\
c' &= (Q + S + \gamma) V - QB'.
\end{aligned}
$$

Berücksichtigt man, dass die Gesammtladung von α und γ dieselbe geblieben ist, ferner, dass die Ladung von β keine

Änderung in dem zweiten Theile des Versuches erfuhr, so sind noch folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$a' + c' = a + c$$
$$b' = b.$$

Nach Substitution der obigen Werte in diese Gleichungen und nach Elimination von V aus den so erhaltenen Gleichungen erhält man nach unschwerer Rechnung

$$B' = \frac{[Q(R+\alpha) - P(S+\gamma)](A-C)}{[(P+Q)(R+S)+(P+Q)(\alpha+\beta+\gamma+\xi)+(R+S+\alpha+\gamma)(\beta+\xi)]}.$$

Zeigt die Elektrometernadel keinerlei Ausschlag an, so ist

$$B' = o$$

und daher

$$P : Q = (R + \alpha) : (S + \gamma)$$

oder, wenn man α und γ gegen R und S vernachlässigen kann:

$$P : Q = R : S,$$

welche Proportion die gesuchte Bedingungsgleichung zwischen den Capacitäten der vier Condensatoren darstellt.

471. Capacität zweier im Contacte befindlicher Kugeln. Wenn man die Capacität eines isolierten Leiters bestimmen will, wobei man von jedem äußeren Einflusse absieht, so begegnet man denselben Fehlerursachen, welche wir gelegentlich der Anwendung der Kugeln angegeben haben, und es ist schwer, ihnen auszuweichen. Angot hat versucht, die Rechnungen von Plana, welche sich auf die Capacität zweier in Berührung befindlichen Kugeln beziehen, zu verificieren. Um so viel als möglich den Einfluss der äußeren Körper zu eliminieren, bestimmte er successiv die scheinbare Capacität der größeren Kugel, dann die scheinbare Capacität des Systemes der beiden sich berührenden Kugeln. Das Verhältnis der beiden scheinbaren Capacitäten muss dem Verhältnisse der wirklichen Capacitäten umso näher liegen, je kleiner die kleine Kugel ist, denn der Einfluss der äußeren Körper auf das ganze System unterscheidet sich dann nicht merklich von dem Ein-

flusse auf die große Kugel allein. Indem er die theoretischen Capacitäten nach den Tafeln von Plana rechnete, erhielt er die folgenden Resultate:

Halbmesser der Kugeln		Capacität	
a	b	beobachtet	gerechnet
125^{mm}	106^{mm}	170^{mm}	160·6
125	53	137	133·6
106	53	115	116·5
53	39·2	65·2	64·6

Die Übereinstimmung der Beobachtung mit der Rechnung ist so genügend, wie man nur zufolge der dieser Art von Bestimmungen anhaftenden Fehlerursachen erwarten kann.

472. Capacität eines geraden Cylinders mit ebenen Grundflächen. Angot hat auch die Capacität eines geraden Kreiscylinders, der von ebenen Grundflächen begrenzt war, bestimmt und er hat den Einfluss der äußeren Körper durch einen sinnreichen Kunstgriff eliminiert. Zu diesem Behufe bestimmte er die scheinbare Capacität eines Cylinders, indem er ihn mittelst eines Seidenfadens in die Mitte des Versuchssaales aufhängte, und zwar soweit als möglich von jedem äußeren Körper; dann befestigte er in demselben Punkte eine dem Volumen nach fast gleiche Kugel, von der er ebenfalls die scheinbare Capacität bestimmte.

Unter diesen Bedingungen wurden die Capacitäten der beiden Leiter fast in der gleichen Weise durch den Einfluss der äußeren Körper geändert und das Verhältnis ihrer scheinbaren Capacitäten war nahezu gleich dem Verhältnisse der wirklichen Capacitäten; man kann daher daraus die absolute Capacität des Cylinders ableiten, weil man jene der Kugel kennt.

Man kennt nicht den theoretischen Ausdruck für die Capacität eines begrenzten Cylinders; Angot hat eine empirische Formel gesucht, deren Gestalt durch einige theoretische Betrachtungen angezeigt wurde. Wir haben gesehen,

dass, wenn eine Elektricitätsschichte gleichmäßig auf einem Cylinder von der Länge L, die sehr groß vorausgesetzt ist, und vom Radius R ausgebreitet ist, das Potential dieser Schichte in einem Punkte der Axe bis auf eine Constante angegeben wird durch die Formel:

$$V = \frac{2M}{L} \log \frac{1}{R},$$

so dass der reciproke Wert der elektrischen Capacität bis auf eine Constante dargestellt wird durch:

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{L} \log \frac{1}{R}.$$

Ersetzt man in diesen Ausdrücken den Bruch $\frac{1}{R}$ durch $\frac{L}{R}$, so werden wir der allgemeinen Bedingung, dass das Verhältnis der Capacitäten zweier ähnlicher Leiter gleich dem Verhältnisse ihrer homologen Dimensionen ist, Genüge leisten, so dass man haben wird:

$$V = \frac{2M}{L} \log \frac{L}{R},$$

welche Gleichung man überdies finden kann, wenn man direct das Potential ausrechnet. Die elektrische Capacität wird daher sein:

$$C = \frac{L}{2 \log \frac{L}{R}}.$$

Andererseits ist die Capacität einer kreisförmigen Scheibe vom Radius R, betrachtet als Grenze eines unendlich abgeplatteten Rotationsellipsoides gleich, $\frac{2R}{\pi}$. Man kann daher versuchen, die Capacität eines Cylinders mit ebenen Grundflächen durch nachfolgende Formel darzustellen:

$$C = \frac{2R}{\pi} + \frac{L}{2 \log \left(A + \frac{L}{R}\right)},$$

in welcher A eine auf experimentellem Wege zu bestimmende

Constante sein wird. Ersetzt man diese Constante durch 4, so erhält man Werte, welche in genügender Übereinstimmung mit den Versuchsresultaten sich befinden, wenigstens für die in Anwendung gebrachten Cylinder; man ersieht dies aus der folgenden Tafel:

Dimensionen des Cylinders			Capacität	
L	R	$\frac{L}{R}$	beobachtet	gerechnet
50 mm	50 mm	1	46·6	47·3
100	"	2	59·2	59·7
200	"	4	79·4	79·9
400	"	8	113·8	112·3
700	"	14	151·6	152·9
800	"	16	167·2	165·3
10	29·5	0·33	21·3	22·3
31	"	1·05	27·1	28·3
59	"	2	36·3	35·2
104	"	3·52	43·0	44·6
118	"	4	46·3	47·1
209	"	7·08	64·3	62·2
236	"	8	68·5	66·2
100	100	1	94·4	94·6

473. Capacität eines Luftlamellen-Condensators. Nach der Theorie muss die Capacität eines Plattencondensators, wobei die Platten durch eine Luftschichte getrennt sind, der Entfernung der beiden Belegungen umgekehrt proportional sein, wenn diese Entfernung im Verhältnisse zum Durchmesser der Scheiben genügend klein ist; diese Capacität ist gleich:

$$C = \frac{S}{4\pi e} = \frac{\pi R^2}{4\pi e} = \frac{R^2}{4e},$$

wobei R der Radius der Collectorplatte ist, so dass das Product aus der Capacität des Collectors in die Entfernung der Scheiben gleich $\frac{R^2}{4}$ sein würde.

Diese Beziehung wurde in den Versuchen von Angot nicht genau bestätigt, und dies zeigt an, dass die Bedingungen, welche der Calcül voraussetzt, in nicht genügender Weise

realisiert wurden. Die Condensatoren waren aus Metallplatten gebildet, die mittelst dreier Glasunterlagen getrennt waren, deren Dicke man mittelst des Sphärometers bestimmte und deren Dimensionen genügend klein waren, so dass man sich durch ihre Anwesenheit nicht beirren zu lassen brauchte. Angot hat zwei Plattenpaare angewendet, deren Halbmesser bezüglich 91·5 und 49 Millimeter waren. Die Capacitäten und die Dicken sind in der folgenden Tabelle in Millimetern ausgedrückt.

R = 91·5			R = 49		
e	C	e (C − 68)	e	C	e (C − 40)
0·814	2900	2305	1·803	452	743
1·104	2170	2321	2·781	309	747
1·803	1350	2312	3·543	254	758
2·781	928	2392	7·086	149	771
3·549	738	2374	10·63	112	765
7·086	403	2373	12·54	100	752
10·63	290	2360			
12·54	262	2433			
24·21	187	2871			

Es sind die Versuchsergebnisse für diese beiden Plattensysteme nahezu durch die Formeln:

$$e\,(C - 68) = 2375$$
$$e\,(C - 40) = 756$$

ausgedrückt.

Die Zahlen der ersten Versuchsreihe, welche sehr kleinen oder sehr großen Entfernungen der Platten entsprechen, stimmen auch nicht gut mit der Formel; dann aber war das Verhältnis der Capacitäten der Scheibe und des Elektrometers zu groß oder zu klein, als dass die Messungen mit Genauigkeit ausgeführt werden konnten.

Man kann sagen, dass innerhalb der Versuchsgrenzen, d. h. so lange die Entfernung der Platten nicht größer als der vierte Theil ihres Halbmessers ist, die Capacität des Collectors umgekehrt proportional der Dicke der isolierenden Schichte wächst.

Wenn man annimmt, dass diese Formel auch noch für sehr entfernte Platten anwendbar ist, so sieht man, dass die Zahlen 68 und 40 die Capacitäten der Collectoren allein darstellen werden. Wenn andererseits die Platten sehr nahe sind, so ist das Correctionsglied zu vernachlässigen und die Capacität des Collectors ist fast umgekehrt proportional der Entfernung der Platten, wie es die Theorie angibt.

474. Anwendung von Condensatoren mit variablen Capacitäten. Das beste Mittel, um elektrische Capacitäten zu vergleichen, würde darin bestehen, einen Leiter mit variabler Capacität zu benützen, die man in continuierlicher Weise ändern würde, bis sie gleich jener des zu studierenden Körpers geworden ist; dies ist der Vorgang von Cavendish. Man könnte zu diesem Behufe entweder einen Cylinder anwenden, der aus Scheiben gebildet wird, die man aufeinander aufsetzen würde, so dass man die Höhe des Cylinders nach Belieben vergrößert, oder noch besser kann man einen Plattencondensator anwenden, wobei man die Entfernung der Platten variiert. Empirische Formeln, analog jenen von Angot, würden erlauben, in jedem Falle die Capacität des Vergleichskörpers kennen zu lernen. Um zu erfahren, ob die Capacitäten zweier Körper gleich sind, würde es genügen festzustellen, ob sie einem elektrisierten Körper eine und dieselbe Elektricitätsmenge entnehmen, wie z. B. einer Leydnerflasche; man könnte auch wohl so vorgehen, dass man sie mittelst der beiden Pole einer und derselben Säule mit entgegengesetzten Elektricitäten auf dasselbe Potential ladet und dann sie verbindet; sind ihre Capacitäten einander gleich, dann werden sie vollkommen in den neutralen Zustand zurückkehren. Man könnte sich so in vollständiger Weise frei von der Elektricitätszerstreuung machen, welche man bei den gewöhnlichen Methoden nicht vermeidet, weil man immer gezwungen ist, die auf zwei verschiedenen Leitern durch eine und dieselbe Ladung hervorgerufenen Potentiale zu vergleichen.

Gibson und Barklay[1] haben z. B. zu diesem Zwecke einen Schiebercondensator angewendet, der aus zwei Platten

[1] Phil. Mag. 4e serie, t. XLI., pg. 543.

bestand, die man um eine veränderliche Größe aufeinander eingreifen lässt. Wir kommen auf die Einrichtung und den Gebrauch eines solchen Condensators später zurück.

475. Anwendung der Entladungsapparate. Man kann auch die elektrischen Capacitäten mittelst der Entladungsapparate vergleichen, z. B. der Lane'schen Flasche und dem Probeelektroskop. Die Capacität einer Batterie z. B. ist der Anzahl der Funken der Lane'schen Flasche proportional, welche nöthig ist, um diese Batterie auf ein gewisses Potential zu bringen, oder um einen Funken zwischen zwei Kugeln bei einer gegebenen Entfernung hervorzurufen.

Das Probeelektroskop gestattet mit geringeren Potentialen zu arbeiten und man kann die Versuche in folgender Weise anordnen. Ein Leiter A wird auf ein gewisses Potential gebracht z. B. dadurch, dass man ihn in leitende Verbindung mit einer elektrisierten Batterie von sehr großer Capacität bringt; man verbindet dann diesen Körper mit einem Maßelektroskope und bestimmt die Zahl der Entladungen; man elektrisiert vom neuen den Leiter A bis zu demselben Potentiale, dann bringt man ihn in leitende Verbindung mit einem anderen Leiter B, hebt diese Verbindung auf und verbindet den ersteren Leiter mit dem Elektroskope, und erhält eine Anzahl n' Entladungen. Die beiden Körper A und B theilen, wenn sie miteinander verbunden sind, die ursprüngliche Elektricitätsmenge im Verhältnisse zu ihren elektrischen Capacitäten C und C'; die beiden gemessenen Elektricitätsmengen stehen daher im Verhältnisse von $1 : \frac{C + C'}{C}$, woraus man erhält:

$$\frac{n}{n'} = \frac{C + C'}{C},$$

und aus dieser Gleichung leitet man das Verhältnis $\frac{C}{C'}$ der elektrischen Capacitäten ab.

Luftcondensatoren.

476. Bestimmung der condensierenden Kraft der Condensatoren. Um die condensierende Kraft eines Condensators

kennen zu lernen, kann man, wie wir früher gesehen haben, das Verhältnis der Elektricitätsmengen des Collectors, der in leitende Verbindung mit einer Elektricitätsquelle, die auf constantem Potentiale sich befindet, gebracht ist, oder das Verhältnis der elektrischen Capacitäten oder auch das Verhältnis der Potentiale dieses Collectors für eine und dieselbe Elektricitätsmenge bestimmen; daraus ergeben sich drei verschiedene Methoden.

Wir werden bezüglich der beiden letzteren Methoden, welche in der That genau zu denselben Versuchen leiten, nichts hinzufügen. Wenn man die erstere Methode anwenden will, ladet man z. B. den Collector allein mit der Elektricitätsquelle, dann isoliert man ihn und bestimmt mittelst des Probescheibchens die Dichte in einem Punkte P. Man ladet dann diesen Collector in Gegenwart der Condensatorplatte mittelst derselben Quelle, dann hebt man die Verbindung des Collectors mit der Elektricitätsquelle auf, entfernt den Condensator und bestimmt die Dichte in demselben Punkte P. Da man voraussetzt, dass der Collector im Momente, in welchem man ihn mit der Probeplatte berührt, jeder Influenz entzogen ist, so ist das erhaltene Verhältnis der Dichten dem Verhältnisse der gesammten Ladungen des Collectors in den beiden Fällen, und demzufolge der condensierenden Kraft gleich.

Dieser Versuch würde einige Schwierigkeiten bieten. Zuerst müsste man sich vergewissern, dass das Potential der Elektricitätsquelle in den beiden Versuchen dasselbe bleibt; da in zweiter Linie die condensierende Kraft im allgemeinen eine sehr bedeutende Größe ist, wird es entweder vorkommen, dass die Dichte im ersteren Falle zu gering sein wird und nicht mit genügender Genauigkeit bestimmt werden kann, oder dass, da die Dichte im zweiten Falle sehr groß ist, die Elektricitätszerstreuung sehr rapid ist, was zu einer zu geringen Zahl für die condensierende Kraft leiten wird.

Gleichwohl werden diese exacten Methoden fast niemals angewendet. Wir haben schon früher den Versuch erwähnt, durch welchen Volta die condensierende Kraft seines Condensationselektroskopes bestimmt hat; im allgemeinen wurden die Physiker, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigten,

durch ungenaue theoretische Betrachtungen geleitet und ihre Versuche, gestützt auf unvollkommene Methoden, geben nur näherungsweise Angaben, welche zur Controle der Theorie nicht dienen können. Nichtsdestoweniger werden wir diese Versuche sorgfältig prüfen und wir werden einige unter ihnen finden, welche der Beachtung ganz würdig sind.

477. Theorie von Biot. Der Ausgangspunkt der experimentellen Untersuchungen ist am häufigsten eine ungenaue Berechnung der condensierenden Kraft, wie sie von Biot auf Grund der Hypothese der dissimulierten oder latenten Elektricitäten (1) aufgestellt wurde.

Wir haben das Gesetz kennen gelernt, nach welchem die Elektricitätsmengen auf den Belegungen eines Condensators, wie z. B. des Scheibenapparates von Aepinus, im Falle alternativer Entladungen abnehmen. Wenn der Collector eine Elektricitätsmenge gleich a aufnimmt, ladet sich die Condensatorplatte mit einer geringeren Elektricitätsmenge $b = ma$, die das entgegengesetzte Zeichen hat; die den Platten durch alternierende Berührungen entnommenen Ladungen, sowie die Rückstände auf diesen Platten, variieren wie die Glieder einer geometrischen Progression, deren Exponent m^2 ist.

Man kann leicht den Wert von m bestimmen. Zu diesem Behufe ladet man einmal den Condensator, hebt die Verbindungen auf, trennt die Platten, um sie ihrer gegenseitigen Influenz zu entziehen, und bestimmt mittelst des Probescheibchens das Verhältnis der Dichten in zwei auf den Platten B und A symmetrisch liegenden Punkten; dieses Verhältnis ist dem der Ladungen gleich und demzufolge dem Coefficienten m.

Da die Dichten, welche man vergleichen will, dann vom entgegengesetzten Zeichen sind, was erfordert, dass man jedesmal die bewegliche Kugel der Wage mit dem Probescheibchen selbst elektrisiert, so ist es besser, anders vorzugehen. Nachdem man die Dichte in einem Punkte P der Platte A bestimmt hat, setzt man den Condensator wieder zusammen, isoliert die Condensatorplatte B, dann berührt man die Platte A, hebt die Verbindungen auf und entfernt vom neuen die

(1) Traité de physique expérimentale, t. II., pg. 364.

Belegungen. Die Ladung, welche auf der Platte A zurückgeblieben ist, ist dann am^2, so dass man, wenn man die Dichte in demselben Punkte P bestimmt, für das Verhältnis der beiden Dichten den Wert m^2 erhalten wird.

Da der Coefficient m im allgemeinen sehr nahe der Einheit liegt, wird es noch vortheilhaft sein, die ursprüngliche Dichte im Punkte P mit jener zu vergleichen, welche nach einer bestimmten Anzahl von Berührungen noch vorhanden sein wird. Wenn man die Scheibe A p-mal in leitende Verbindung mit der Erde gebracht hat, wird die Ladung dieser Scheibe auf am^{2p} reduciert und man wird als Verhältnis der Dichten den Wert m^{2p} erhalten, welcher diesmal von der Einheit sehr verschieden sein wird; dies gestattet m mit großer Annäherung zu rechnen.

478. Nach der Theorie der dissimulierten Elektricitäten neutralisiert oder dissimuliert die mit einer Elektricitätsmenge a geladene Collectorplatte auf der Condensatorplatte B eine Menge $b = ma$ entgegengesetzter Elektricität. Diese wirkt ihrerseits auf den Collector zurück und dissimuliert eine Elektricitätsmenge gleich mb oder m^2a, so dass die freie Elektricität des Collectors gleich $a - m^2a = a\,(1 - m^2)$ ist. Wenn man annimmt, dass diese freie Elektricität genau gleich jener ist, welche der Collector erhalten würde, wenn er mit derselben Quelle verbunden und der Influenz der Condensatorplatte entzogen wäre, so sieht man, dass die condensierende Kraft sein wird

$$\mathfrak{F} = \frac{a}{a\,(1 - m^2)} = \frac{1}{1 - m^2}.$$

Auch dann, wenn man bei diesen Vorstellungen bleibt, ist es leicht zu zeigen, dass die Betrachtungsweise ungenau ist, weil die Vertheilung der Elektricität auf den beiden Platten nicht dieselbe ist. Wenn der Collector mit der Elektricitätsquelle in Verbindung steht, ist die elektrische Schichte der Condensatorplatte B in ihrer Gesammtheit auf der Innenseite dieser Platte concentriert und dissimuliert auf der Collectorplatte eine Elektricitätsmenge, die größer als mb ist, d. h. größer als m^2a; die freie Elektricität a' des Collectors ist daher kleiner als $a\,(1 - m^2)$. Da diese freie Elektricität der Elektricitätsquelle

das Gleichgewicht hält, stellt sie die Elektricitätsmenge dar, welche der allein vorausgesetzte Collector aufnehmen würde, so dass die condensierende Kraft:

$$\mathfrak{F} = \frac{a}{a'} > \frac{a}{a(1-m^2)}$$

ist.

Es kann also der Ausdruck $\frac{1}{1-m^2}$ ohne Zweifel eine angenäherte Vorstellung von der condensierenden Kraft geben, er ist aber dieser nicht gleich, wie man oft behauptet. Die Differenz kann sehr groß sein, wenn die Belegungen sehr nahe sind, aber sie ist klein, wenn die Scheiben sehr weit von einander abstehen; denn in diesem Falle ändert der Wechsel der Vertheilung auf der Platte B in keiner merklichen Weise die dissimulierte Elektricitätsmenge auf den Collector A.

479. Versuche von Riess. Riess hat bezüglich dieses Gegenstandes zahlreiche Versuche gemacht(1). Sein Condensationsapparat besteht aus zwei kreisförmigen Metallscheiben A und B, die sehr dünn sind und an ihren Rändern abgerundet sind (Fig. 207); diese Scheiben sind mit zwei cylindrischen Stäben A′ und B′ versehen, welche von Glasfüßen getragen werden. Die Scheibe A kann um ein Charnier K gedreht werden, die Scheibe B kann man der ersten nähern oder von derselben entfernen und zwar mittelst einer Schiebevorrichtung, deren Verrückung durch einen Nonius V angegeben wird. Dieser Schieber trifft gegen ein Hemmnis H, welches gestattet, schnell die Platten in den verschiedenen Versuchen in dieselbe Entfernung zu bringen. Die Scheibe A trägt noch eine leitende Kugel *a*, die am Ende eines Metalldrahtes *f* befestigt ist, und die Scheibe B ist in vollständige Verbindung mit dem Erdboden mittelst eines Metalldrahtes gesetzt, der mit den Gasleitungsröhren verbunden und in B′ durch eine Klemmschraube befestigt ist.

Die Dimensionen des Apparates von Riess waren die folgenden:

(1) Reibungselektricität, Bd. I., pg. 307. — Annales de Chimie et de Physique, 3. serie, t. XLII., pg. 376.

Platten	Durchmesser. . .	81·6‴ = 184^{mm}
	Dicke.	$^{17}/_{24}$‴ = 1·6
Cylinder A′ und B′.	Länge	14$^{3}/_{8}$‴ = 33
	Durchmesser. . .	11$^{7}/_{24}$‴ = 25·5
Draht *f*	Länge . . .	101‴ = 228
	Durchmesser. . .	$^{5}/_{6}$‴ = 1·1
Kugel *a*	Durchmesser. . .	7‴ = 16

480. Vergleichung der Dichten. Riess hat zuerst die Veränderung der Dichte auf dem Collector unter dem Einflusse der Condensatorplatte bestimmt. Diese Methode kommt nahezu

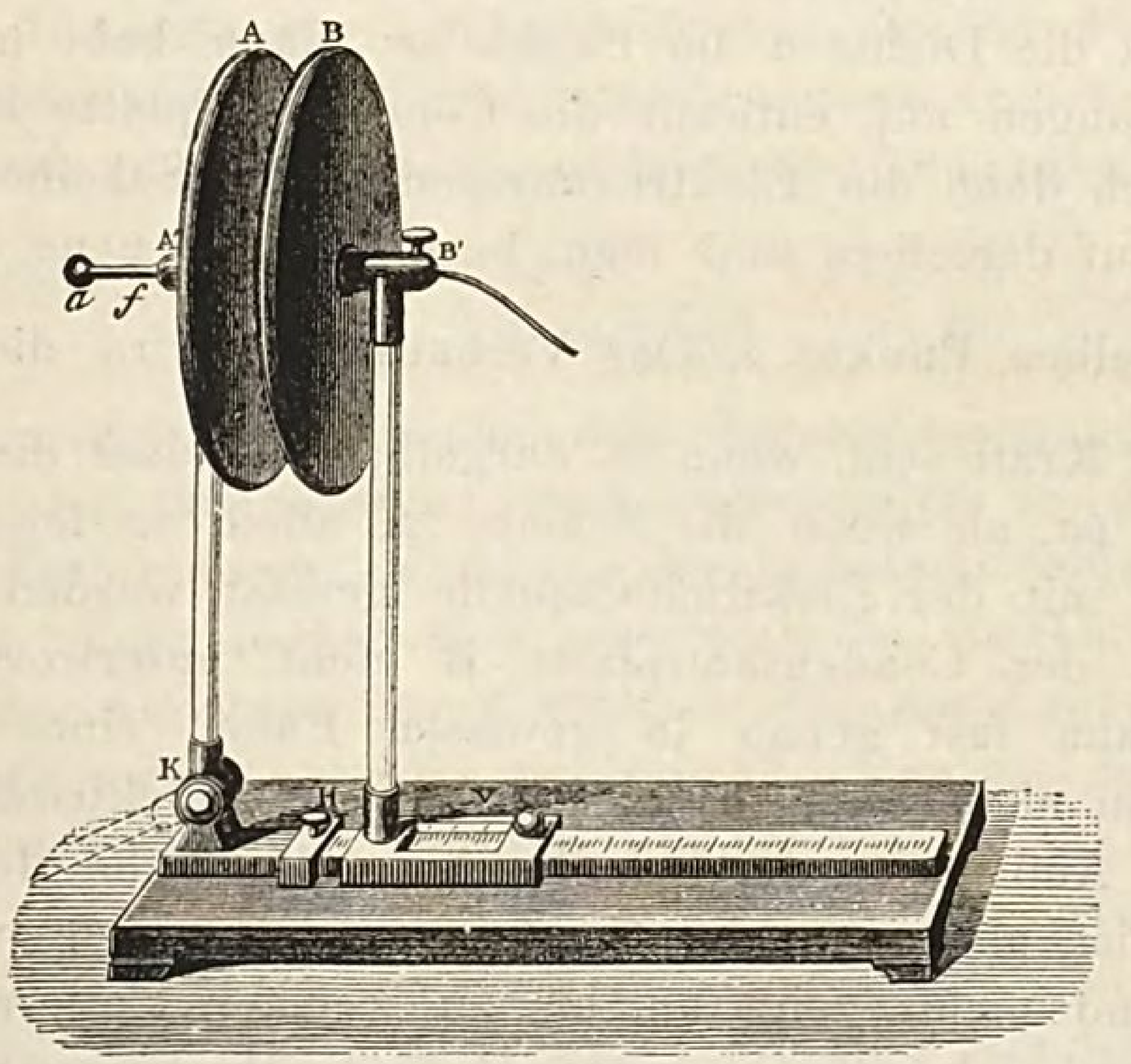


Fig. 207.

auf die Bestimmung der Potentiale zurück, aber unter Bedingungen, welche nicht absolut strenge sind. Man ladet die Platte A mit einer Leydnerflasche, wobei die Platte B entfernt ist und man berührt die Kugel *a* mit einer Probekugel β von 2‴ oder 4·5^{mm} Durchmesser. Man nähert dann die Scheibe B bis zur gewünschten Entfernung und berührt denselben Punkt auf *a* mit einer zweiten, der ersten identischen Probekugel. Diese beiden Kugeln werden in die Drehwage in gewöhnlicher Weise gebracht und geben die Torsionen T und T′, deren Verhältnis gleich jenem der elektrischen Dichten in demselben Punkte in den beiden Versuchen ist.

Riess hat zuerst gezeigt, dass dieses Verhältnis von der ursprünglichen Ladung unabhängig ist, was der Fall sein muss, da die Vertheilung der Elektricität in allen Fällen nach demselben Gesetze erfolgt.

Riess nimmt dann dieses Verhältnis als jenes an, welches die condensierende Kraft darstellt, was nicht richtig ist. Denn nehmen wir an, dass die Versuche in der umgekehrten Ordnung gemacht worden wären: die Platte A, welche mit einer Elektricitätsquelle in Verbindung ist, ladet sich unter dem Einflusse der Condensatorplatte und man bestimmt die Dichte μ im Punkte a; dann hebt man diese Verbindungen auf, entfernt die Condensatorplatte B, es vertheilt sich dann die Elektricitätsmenge der Scheibe A regelmäßig auf derselben und man bestimmt die neue Dichte μ' in demselben Punkte a. Das Verhältnis $\frac{\mu'}{\mu}$ wird die condensierende Kraft sein, wenn es dargethan ist, dass die Dichte μ dieselbe ist, als wenn die Scheibe A allein in leitende Verbindung mit der Elektricitätsquelle gesetzt worden und der Influenz der Condensatorplatte B nicht unterworfen wäre. Dies kann fast genau in gewissen Fällen eintreten, doch allgemein nicht; denn es ist klar, dass die elektrische Dichte auf der Außenseite der Scheibe A in der Nähe des Randes größer ist, als wenn die Condensatorplatte nicht vorhanden wäre, und nichts zeigt an, bis zu welcher Entfernung vom Rande man sich entfernen muss, damit die Hypothese zugelassen werden kann. Man sieht auch, dass die Dichte μ im allgemeinen zu groß sein wird und dass demzufolge der Versuch zu kleine Zahlen für die condensierende Kraft liefern wird.

Wenn der Draht f, welcher die Kugel a mit der Collectorplatte verbindet, genügend lang und dünn angenommen würde, so wäre die Methode untadelhaft; das Potential auf dieser Kugel würde fast nur von der Elektricitätsmenge abhängen, welche sie besitzt, und es würde der elektrischen Dichte proportional sein. Das Verhältnis der Dichten würde daher genau die condensierende Kraft liefern.

481. Die erste Reihe der Tafel (pag. 821) gibt die Resultate an, welche von Riess erhalten wurden. Wenn die condensierende

Kraft, die dem Verhältnisse $\frac{T}{T'}$ gleich vorausgesetzt ist, umgekehrt der Entfernung c der Scheiben proportional wäre oder der Dicke der isolierenden Schichte, so wäre das Product $\frac{T}{T'} \cdot \frac{1}{c} = p$ constant. Es wurden die Werte des Verhältnisses $\frac{T'}{T}$ und des Productes p in die Tabelle eingetragen, wobei diese letzteren Zahlen der einfacheren Schreibweise halber mit 1000 multipliciert wurden.

482. In einer zweiten Versuchsweise wurde der Draht f durch einen anderen kürzeren Draht ersetzt und die Kugel a durch eine andere kleinere Kugel. Die neuen Dimensionen waren:

Draht f	Länge	$3{\cdot}5''' = 8^{mm}$
a	Durchmesser . . .	$4{\cdot}5''' = 10^{mm}$

Man ersieht aus der Tafel, dass die condensierenden Kräfte diesmal ein wenig größer sind, insbesonders in den Fällen kleiner Entfernungen. Man kann daraus keinen Schluss ziehen, weil die beiden Reihen nicht untereinander vergleichbar sind wegen der Änderung der Gestalt, welche der Apparat erfuhr, und zwar vorzugsweise in der Nähe des Punktes, in welchem die Dichten bestimmt wurden.

483. In den Versuchen der dritten Reihe wurde das Verhältnis der Dichten auf dem Rande der Collectorplatte genommen. Man sieht, dass die Werte der condensierenden Kraft, aus dem Verhältnisse der Dichten abgeleitet, bedeutend geringer sind, speciell für kleine Entfernungen, was vollständig mit dem übereinstimmt, was vorausgesehen werden konnte. Riess schließt aus diesem Umstande, dass, wenn die Collectorplatte A in leitende Verbindung mit einer Elektricitätsquelle an ihrem Rande gebracht wird, was oft beim Condensationselektroskop vorkommt, der Wert der condensierenden Kraft und demzufolge die Elektricitätsmenge, welche der Apparat aufnehmen würde, merklich geringer sein würde, als wenn die Verbindung in der Mitte der Platte stattfinden würde. Dies ist die eine Folgerung, welche nichts zu rechtfertigen scheint.

484. Die vierte Versuchsreihe wurde zu dem Zwecke gemacht, um den Einfluss der Größe der Belegungen zu bestimmen. Der neue Apparat hatte folgende Dimensionen:

Scheiben	Ausdehnung .	52'''	= 117 mm
	Dicke . . .	$^{17}/_{24}$'''	= 1·6 mm
Cylinder A' und B'. .	Länge. . . .	$11^{3}/_{4}$'''	= 26 mm
	Durchmesser .	$6^{5}/_{24}$'''	= 14·6 mm

Man bestimmte die Dichten am Ende des Cylinders A'.

Die condensierende Kraft findet sich merklich kleiner als in der zweiten Reihe und es ist in der That wahrscheinlich, dass die condensierende Kraft für eine gegebene Entfernung umso kleiner wird, je kleiner die Dimensionen der Platten werden; man kann aber nichts Bestimmtes aus diesen Versuchen schließen, die beobachtete Verminderung scheint zu groß zu sein, als dass man sie einzig und allein dem Kleinerwerden der Platten zuschreiben könnte und es ist wahrscheinlich, dass sie zum größten Theile durch den Umstand erklärt werden muss, dass das Verhältnis der Dichten in einem Punkte bestimmt wurde, welcher der Condensatorplatte viel näher liegt.

485. In den Versuchen der fünften Reihe arbeitete man mit dem kleinen Apparate und der Draht, welcher die Condensatorplatte mit dem Erdboden in leitende Verbindung setzt, wurde parallel zur Oberfläche der Platte angeordnet und nicht wie in der vorhergehenden Reihe normal; man hat auf diese Weise etwas größere condensierende Kräfte erhalten. Dieses Resultat würde leicht vorauszusehen sein, wenn der Verbindungsdraht merkliche Dimensionen hätte, weil die Einführung dieses Drahtes die Influenz der Condensatorplatte B auf die Collectorplatte vermehren würde und denselben Effect hervorrufen würde, wie ein Anwachsen der Oberfläche der Platte B. Nichtsdestoweniger scheint es schwierig zu sein anzunehmen, dass die Hinzufügung eines einfachen Drahtes, der zur Condensatorplatte parallel und hinter derselben liegt, um ein Fünftel die condensierende Kraft vermehren könnte, wie es für jene Versuche stattfindet, welche in kleiner Entfernung angestellt werden.

Der einzige Schluss, den man aus diesen Versuchen von Riess ziehen kann, ist der, dass die Methode incorrect ist,

weil sie Resultate liefert, welche von der Lage der mittelst der Probekugel berührten Punkte abhängen. Die Werte von p zeigen auch, dass für kleine Entfernungen die so gerechnete condensierende Kraft fast umgekehrt proportional der Entfernung der Platten ist, aber es ist unmöglich, den Genauigkeitsgrad dieses Gesetzes zu schätzen.

Entfernung der Platten	1. Reihe		2. Reihe		3. Reihe	
	$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\mathfrak{F}}$	$1000\,p$	$\frac{1}{\mathfrak{F}}$	$1000\,p$	$\frac{1}{\mathfrak{F}}$	$1000\,p$
∞	1	0	1	0	1	0
50 Lin.	0·897	17·9	0·888	17·7	0·941	18·8
20	0·683	34·1	0·688	34·4	0·828	41·4
15	0·595	39·7	0·630	42	0·731	48·8
10	0·492	49·2	0·488	48·8	0·617	61·7
5	0·335	67	0·306	61·2	0·460	92·0
4	0·286	71·5	0·274	68·5	0·412	103
3	0·235	78	0·219	73	0·341	114
2	0·173	86	0·155	78	0·260	130

Entfernung der Platten	4. Reihe			5. Reihe		
	2. Reihe	$\frac{1}{\mathfrak{F}}$	$1000\,p$	$\frac{1}{\mathfrak{F}}$	$1000\,p$	$\left(\frac{1}{\mathfrak{F}}\right)_4 - \left(\frac{1}{\mathfrak{F}}\right)_5$
15 Lin.	0·630	0·768	51·2	„	„	„
10	0·488	0·688	68·8	0·597	59·7	0·091
8	„	0·590	73·7	„	„	„
6	„	0·496	82·6	„	„	„
5	0·306	0·443	88·6	0·408	81·0	0·035
4	0·274	0·393	98·2	0·340	85	0·053
3	0·219	0·330	110	0·269	89·6	0·061
2	0·155	0·232	116	0·190	95·0	0·042

486. Messung des Verhältnisses der Elektricitätsmengen der Belegungen. Riess hat dann gesucht, die Ladung der Collectorplatte mittelst des Coefficienten m auszudrücken, und er hat diesen Coefficienten nach der folgenden Methode bestimmt. Die Scheibe A wurde geladen, isoliert und jeder Influenz entzogen; man berührte einen Punkt M mit der

Probeplatte und erhielt in der Drehwage eine gewisse Torsion T. Dieselbe ist der Dichte des berührten Punktes und der gesammten Elektricitätsmenge a der Platte proportional; man kann schreiben

$$T = Ka,$$

wo K ein unbekannter Coefficient ist.

Man bringt dann bis in die gewünschte Entfernung die Scheibe B, welche mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht, der Scheibe A nahe; diese Platte wird eine Quantität entgegengesetzter Elektricität gleich $-b$ annehmen und man hat

$$b = ma.$$

Man isoliert nun die Condensatorplatte B und verbindet sie mit dem Collector durch einen sehr kurzen leitenden Draht, um die Elektricität vernachlässigen zu können, welche dieser Draht aufnimmt; die gesammte Elektricitätsmenge des Systems der beiden Scheiben ist dann $a-b$. Man berührt mit dem Probescheibchen irgendeinen Punkt N der einen Scheibe und erhält in der Drehwage eine Torsion T'. Diese Torsion ist der gesammten Elektricitätsmenge proportional und man kann schreiben:

$$T' = K' (a - b) = K'a (1 - m),$$

wobei der Conffïcient K' einen anderen Wert als früher besitzt.

Daraus leitet man ab:

$$\frac{T}{T'} = \frac{K}{K'} \frac{1}{1 - m}$$

und daraus folgt:

$$m = 1 - \frac{K}{K'} \frac{T'}{T}.$$

Um das Verhältnis $\frac{K}{K'}$ zu bestimmen, beginnt man dieselben Versuche vom neuen, wobei man Sorge trägt, dass die Condensatorplatte B isoliert bleibt, wenn man sie der Collectorplatte nähert; die Elektricitätsmenge, welche sie dann durch Influenz erhalten wird, wird Null sein. Bezeichnet man mit a_1 die ursprüngliche Ladung der Platte A, T_1 und T_1' die Torsionen,

welche den Dichten der beiden Punkte M und N entsprechen, so hat man wieder:

$$T_1 = Ka_1,$$
$$T_1' = K'a_1.$$

Daraus erhält man:

$$\frac{K}{K'} = \frac{T_1}{T_1'},$$

und schließlich:

$$m = 1 - \frac{T_1}{T_1'} \cdot \frac{T'}{T}.$$

487. Diese Methode, den Coefficienten m zu bestimmen, ist genau, wenn auch ein wenig compliciert. Riess leitet daraus nach der gewöhnlichen Formel $\frac{1}{1-m^2}$ die condensierende Kraft ab. Die so erhaltenen Zahlen sind im allgemeinen ein wenig kleiner als jene, welche sich aus dem Verhältnisse der Dichten ergeben. Da die beiden Methoden zu kleine Resultate liefern, so kann man daraus schließen, dass die Bestimmung des Verhältnisses der Dichten zu Zahlen leitet, welche der Wahrheit näher liegen, als es durch die Messung des Coefficienten m und die Berechnung der dissimulierten Elektricitäten erreicht wird.

Die erste Tafel der sechsten Versuchsreihe wurde bei derselben Versuchsanordnung erhalten, welche in der ersten Versuchsreihe zur Anwendung kam; in der dritten Columne wurde der Unterschied der von beiden Methoden gelieferten Ergebnisse aufgestellt.

Die zweite Tafel entspricht der Versuchsanordnung, die schon in der zweiten Versuchsreihe angewendet wurde und die dritte Columne enthält ebenfalls die Differenz der Ergebnisse.

Man kann bemerken, dass eine gewisse Unregelmäßigkeit im Gange dieser Unterschiede stattfindet und dies zeigt an, dass die Versuche keine große Genauigkeit besitzen.

6. Reihe.

Entfernung der Platten	Anordnung der 1. Reihe			Anordnung der 2. Reihe		
	m	$1-m^2$	$(1-m^2)-\frac{1}{\mathfrak{F}}$	m	$1-m^2$	$(1-m^2)-\frac{1}{\mathfrak{F}}$
50 Lin.	0·251	0·963	0·066	0·263	0·931	0·043
20	0·454	0·793	0·110	0·500	0·750	0·062
15	0·534	0·715	0·120	0·612	0·626	—0·004
10	0·638	0·593	0·101	0·689	0·325	0·037
5	0·765	0·415	0·080	0·823	0·323	0·017
4	„	„	„	0·854	0·271	—0·003
3	0·840	0·295	0·060	0·887	0·213	—0·006
2	„	„	„	0·911	0·171	0·016

488. Vergleichung der Schlagweiten. Riess hat noch eine letzte Methode in Anwendung gebracht, die sich auf die Messung der Schlagweiten gründet. Er bediente sich zu diesem Behufe eines Funkenmikrometers, dessen eine Kugel A′ mittelst eines leitenden Drahtes mit der Collectorplatte A eines Scheibencondensators in leitende Verbindung gebracht wurde und dessen andere Kugel B′, welche mit der Erde durch die Gasleitungsröhren verbunden ist, der ersten mittelst einer Mikrometerschraube genähert oder von ihr entfernt werden kann.

Wenn die Collectorplatte A mit dem Knopfe einer Leydnerflasche berührt wird, nimmt sie einen Theil der Ladung dieser Flasche an, welcher Bruchtheil in den Versuchen, von denen wir sprechen werden, zu 14 Tausendtheile bestimmt wurde. Wenn dies geschehen ist, nähert man mittelst der Mikrometerschraube ein wenig die Kugel B′, bis zwischen den beiden Kugeln ein Funke überspringt und notiert die Entfernung Δ_1 zwischen den beiden Kugeln.

Man ladet vom neuen die Collectorplatte A mittelst der Leydnerflasche, dann nähert man derselben die Condensatorplatte B, die mit dem Erdboden in leitende Verbindung gebracht ist. Die Kugel A′ ist dann viel weniger stark geladen und die Explosion erfolgt nur dann, wenn man die Kugel B′ in eine geringere Entfernung δ_1 bringt.

Um sich von dem Elektricitätsverluste frei zu machen, welchen die Leydnerflasche durch diese successiven Berührungen erfährt,

beginnt man das erste Experiment vom neuen und erhält eine neue Schlagweite Δ_2. Man könnte ebenso den zweiten Versuch wiederholen, welcher eine Schlagweite δ_2 liefern würde u. s. w.

Das Verhältnis $\frac{\delta}{\Delta}$ der Schlagweiten, welche man beobachten würde, wenn keine Elektricitätszerstreuung stattfinden würde, ist dann:

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{\delta_1}{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} = \frac{\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{\Delta_2} = \ldots$$

489. So wurden die Versuche der siebenten Reihe angestellt, wobei die Kugel A' mit dem Cylinder der Collectorplatte durch einen Kupferdraht von 8'' 5''' Länge und $\frac{1'''}{2}$ Dicke verbunden war. In der achten Versuchsreihe hatte der Verbindungsdraht eine Länge von 18'' 3'''.

Man sieht aus der zweiten Columne der siebenten Reihe, dass das Verhältnis $\frac{\delta}{\Delta}$ nur dann als nahezu proportional der Entfernung der Scheiben betrachtet werden kann, wenn diese letzteren sehr nahe stehen.

Entfernung der Platten	7. Reihe		8. Reihe	9. Reihe
	$\frac{\delta}{\Delta}$	$1000\frac{1}{e}\frac{\delta}{\Delta}$	$\frac{\delta}{\Delta}$	$\frac{\delta}{\Delta}$
50 Lin.	0·914	18·3	„	0·900
30	0·794	26·5	„	0·747
20	0·687	34·4	0·697	0·658
10	0·451	45·1	0·486	0·429
5	0·272	54·4	0·279	„
2	0.105	52·5	„	„

In der neunten Versuchsreihe endlich wurde zuerst die Collectorplatte allein geladen und die Schlagweite δ bestimmt; dann wurde dieselbe Collectorplatte in Gegenwart der Condensatorplatte geladen und man maß, nachdem die Collector-

platte entfernt worden war, die neue Schlagweite. Wenn man als bewiesen annehmen kann, dass die Schlagweite zwischen einem elektrisierten Leiter und einem anderen mit dem Erdboden leitend verbundenen der elektrischen Ladung oder dem Potentiale dieses Leiters proportional ist, so wird die letztere Methode genau die Messung der condensierenden Kraft liefern. Man könnte gar keine Einwendung gegen diese letzte Versuchsreihe machen, wenn Riess nicht das Verhältnis der Schlagweiten, sondern das Verhältnis der Dichten bestimmt hätte.

Fassen wir dies zusammen, so kann man diese verschiedenen Methoden von Riess, die Messung des Verhältnisses der Dichten, die Bestimmung des Coefficienten *m* und jene des Verhältnisses der Schlagweiten nicht zur Bestimmung der condensierenden Kraft geeignet betrachten, weil die in den drei Fällen erhaltenen Resultate untereinander große Unterschiede darbieten, wie man aus den Tafeln ersieht, in welchen wir allerdings nur die Mittel der Versuche zur Kenntnis gebracht haben.

So gibt z. B. für die Entfernung von 2 Linien die siebente Reihe 0·105, während die vierte eine Zahl liefert, die mehr als doppelt so groß ist, nämlich 0·232. Übrigens ist keine dieser Methoden auf ein genügend strenges Princip basiert.

490. Versuche von Gaugain. Die große von Gaugain [1] über die Beziehungen, welche die Theorie der statischen Vertheilung der Elektricität mit der Theorie der Fortpflanzung der Ströme verknüpfen, unternommene Arbeit umfasst Versuche, die vom Gesichtspunkte der Condensatoren sehr bemerkenswert sind. Wir werden später sehen, dass die Gesetze, welche für die Fortpflanzung der Elektricität gelten, wenigstens im permanenten Zustande, dieselben sind, welche für die Fortpflanzung der Wärme in leitenden Körpern aufgestellt werden können. Die Beziehungen, welche früher zwischen den elektrostatischen Kräften und dem Wärmeflusse aufgestellt worden sind, bestehen daher auch zwischen denselben Kräften und den elektrischen Strömen. Die Untersuchungen von Gaugain

[1] Annales de Chimie et de Physique, 3. serie, t. XLIV., p. 174.

können daher, wenn sie von einem Standpunkte aus betrachtet werden, der von dem von ihm eingenommenen verschieden ist, dazu dienen die theoretischen Betrachtungen der statischen Elektricität zu bestätigen.

491. Gaugain suchte zunächst sich eine Quelle von constanter Spannung zu verschaffen, d. h. eine solche, welche constantes Potential besitzt. Zu diesem Behufe nahm er einen Scheibencondensator C, den er mit einem Goldblattelektroskop in leitende Verbindung bringt. Dieses Elektroskop befindet sich in einem Glasgehäuse mit ebenen Wänden; die eine verticale Seite trägt die Theilung. Blickt man durch eine Öffnung, welche in einem in einer bestimmten Distanz befindlichen Schirme gebohrt ist, so sieht man, auf welchen Theilstrich die Goldblättchen projiciert werden; man ladet nun diesen Condensator in den verschiedenen Experimenten derart, dass die Divergenz der Blättchen immer dieselbe ist. Daraus ersieht man, dass Gaugain nur mit sehr geringen Potentialen arbeitete, weil sein Messapparat äußerst empfindlich ist; die Fehlerquellen, welche der Elektricitätszerstreuung entspringen, sind auf diese Weise fast ganz beseitigt. Dieser große Condensator kann für ein sehr geringes Potential eine relativ beträchtliche Ladung haben, so dass die anderen Körper, mit welchen man ihn in Berührung bringt, nur einen unbedeutenden Bruchtheil jener Elektricität aufnehmen, die er besitzt und das Potential nur in unmerklicher Weise zum Fallen bringen.

492. Der Messapparat ist das Maßelektroskop oder das Entladungselektroskop (439) und der Gang der Versuche ist sehr einfach, weil man jedesmal aus der Anzahl der Entladungen des Elektroskops, wobei man noch — wenn es nöthig ist — die Reste in Rechnung zieht, die gesammte Elektricitätsmenge, welche ein Leiter besitzt, bestimmen kann. Man muss nur dafür Sorge tragen, dass man den Widerstand des Baumwollfadens, den man zwischen dem Elektroskope und dem Leiter anbringt, passend wählt, damit die Entladungen weder zu langsam noch zu schnell erfolgen, so dass z. B. zwischen den ersten Entladungen ein Zeitraum von einigen Secunden verfließt.

Wir bemerken noch, dass zu Ende des Versuches, wenn das Goldblatt nicht mehr jenes Potential erreichen kann, welches ihm eine Entladung gestattet, eine gewisse Elektricitätsmenge auf dem Leiter, dem Baumwollfaden und dem Elektroskope bleibt. Im allgemeinen ist es nicht nothwendig, sich um die Elektricität zu kümmern, welche auf dem Leiter selbst bleibt. Denn wenn man V das Anfangspotential dieses Leiters und V_1 jenes nennt, welche er behält, wenn die Entladungen des Elektroskopes aufhören, so hat dieser Leiter in Wirklichkeit nur eine solche Elektricitätsmenge verloren, welche nothwendig ist, um das Potential von V_1 auf V zu heben oder — was auf dasselbe hinausläuft — um das Potential von 0 auf $V - V_1$ zu bringen; die Resultate sind daher dieselben, wie wenn man die ganze Messung für eine Elektricitätsquelle ausgeführt hätte, die ein einwenig höheres Potential besitzt. Es ist nur nothwendig, den Rest des Elektroskopes in der gewöhnlichen Weise zu bestimmen.

Gaugain hat mit Umsicht geschlossene Condensatoren studiert, von cylindrischer oder sphärischer Gestalt, für welche die Theorie viel einfacher ist.

493. Cylindrische Condensatoren. Die cylindrischen Condensatoren bestanden aus einer Röhre von Weißblech, in deren Innern concentrisch zur ersten Röhre sich eine andere Röhre von Weißblech oder ein Eisenstab befand. Die äußere Röhre hatte im allgemeinen einen Meter Länge und die innere Röhre, welche eine wenig geringere Länge hatte, war im Innern der ersten Röhre durch Schellackstützen befestigt.

Gaugain hat zuerst einige einleitende Versuche ausgeführt, um Eigenschaften nachzuweisen, die allen geschlossenen Condensatoren zukommen. Er bediente sich z. B. eines Condensators, dessen Dimensionen die folgenden waren:

Länge der Cylinder	$L = 1$ Meter
Durchmesser des äußeren Cylinders . .	$2R_2 = 80$ mm
Durchmesser des inneren Cylinders . .	$2R_1 = 40$ mm

Man lud den Apparat in der gewöhnlichen Weise, hob alle Verbindungen sowohl mit der Elektricitätsquelle als auch mit dem Erdboden auf, um die beiden Belegungen zu isolieren;

dann verband man diese beiden Belegungen mittelst eines Metallstabes, der mit einer isolierenden Handhabe versehen war. Untersucht man nach dieser Operation die beiden Belegungen mit einem Elektroskope, so findet man nirgends eine Spur von Elektricität. Dieser Versuch, der schon von Franklin mittelst einer Leydnerflasche ausgeführt wurde, bestätigt das Theorem von Faraday.

494. Man kann direct mittelst des Entladungselektroskopes die Gleichheit der influencierenden und der influencierten Elektricitätsmenge nachweisen, wenn der influencierende Körper vollkommen von einem Leiter eingeschlossen ist, der mit der Erde in leitender Verbindung steht.

Man elektrisiert den Apparat, wobei man den inneren Cylinder als Collector wählt, hebt die Verbindung der Elektricitätsquelle mit der inneren Belegung auf und verbindet diese Belegung mit dem Entladungselektroskop und erhält so die influencierende Elektricitätsmenge. Dann ladet man den Condensator in derselben Weise und verbindet, nachdem man die Verbindungen entfernt hat, die innere Belegung mit dem Erdboden und die äußere Belegung mit dem Entladungselektroskope. Bei diesem Verfahren erhielt Gaugain in einem Versuche 56 Entladungen mit der inneren Belegung und nur 46 mit der äußeren Belegung. Diese beiden Zahlen sind nicht gleich, weil die Rückstände auf den beiden Belegungen verschieden sind. Bestimmt man diese in der gewöhnlichen Weise, so findet man 13 Entladungen für den Rückstand des Collectors und 23 für den Condensator. Der vollständige Wert der influencierenden Elektricitätsmenge war daher $56 + 13 = 69$ und jener der influencierten Elektricitätsmenge $46 + 23 = 69$; diese beiden Summen sind gleich.

495. Gaugain hat auch die beiden folgenden Sätze ausgesprochen:

1. Wenn der äußere Cylinder der Collector ist, so ist die influencierte Elektricitätsmenge des inneren Cylinder genau gleich jener, welche dieser letztere Cylinder annehmen würde, wenn er als Collector verwendet würde, wenn nur die Elektricitätsquelle in den beiden Fällen dieselbe bleibt.

2. Wenn der äußere Cylinder der Collector ist, so kann seine Ladung als aus zwei Theilen bestehend betrachtet werden: der eine ist gleich der influencierten Elektricitätsmenge des inneren Cylinders; der andere repräsentiert die Elektricitätsmenge, welche der äußere Cylinder annimmt, wenn er keiner Influenzwirkung unterworfen ist, oder genauer, wenn er allein der Influenz unterworfen ist, welche von dem umgebenden Medium herrührt, in welchem man arbeitet.

So elektrisierte man den Apparat in der gewöhnlichen Weise und bestimmte die Elektricitätsmenge des inneren Cylinders, welcher der Collector ist und erhielt 79 Entladungen des Elektroskopes. Man elektrisierte vom neuen den Apparat, wobei man die äußere Belegung zum Collector machte, maß dann die Elektricität der inneren Belegung und fand wieder 79 Entladungen. Es ist hier nicht am Platze, sich von den Elektricitätsmengen, welche bei der Messung entweichen, beeinflussen zu lassen, weil die Rückstände in den beiden Fällen dieselben sind; das erste Theorem ist daher erwiesen.

Nun wurde der äußere Cylinder in leitende Verbindung mit der Elektricitätsquelle gebracht, die innere Belegung blieb isoliert und man verband diesen Cylinder dann mit dem Elektroskope und erhielt 25 Entladungen. Man wiederholte denselben Versuch, indem man diesmal die innere Belegung mit dem Erdboden verband, während die äußere Belegung mit der Elektricitätsquelle in Verbindung gesetzt war und man erhielt 106 Entladungen. Schließlich wurde der Condensator vom neuen elektrisiert und man maß die Elektricitätsmenge der inneren Belegung, welche die Rolle des Condensators hatte, und man fand nun 79 Entladungen. Die beiden Belegungen wurden jedesmal mittelst des Elektroskopes vom Potential V auf das Potential V_1 gebracht und deshalb war es nicht nothwendig, die Rückstände dieser Belegungen in Rechnung zu ziehen, man musste aber jenen des Elektroskopes bestimmen, der zwei Entladungen gleich war. Man erhielt auf diese Weise:

Ladung der äußeren Belegung allein . .	25 + 2 = 27,
Ladung der äußeren Belegung, wobei dieselbe als Collector functioniert . .	106 + 2 = 108,
Influencierte Ladung der inneren Belegung	79 + 2 = 81.

Der Überschuss der zweiten Elektricitätsmenge über die erste ist in aller Strenge gleich der dritten Elektricitätsmenge.

496. Diese beiden Theoreme sind sehr einfache Consequenzen der Theorie.

Nehmen wir an, dass ein Leiter A, der mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht, vollständig von einem Leiter B eingeschlossen werde, der auf ein positives Potential V gebracht ist. Es entsteht auf dem Leiter A eine gewisse Menge negativer Elektricität — M; eine gleiche Menge positiver Elektricität + M ist auf der inneren Oberfläche des Leiters B vertheilt und eine Elektricitätsmenge + M′ ist auf seiner äußeren Oberfläche ausgebreitet. Die beiden Schichten — M und + Mgeben nach früheren Sätzen in jedem äußeren Punkte ein Potential Null und ein constantes Potential — V auf dem Leiter A. Andererseits erzeugt die äußere Elektricitätsschichte + M′ in allen Punkten, die sie umfasst, ein constantes Potential + V. Man sieht, dass unter diesen Bedingungen Gleichgewicht besteht, weil das Potential constant und gleich V auf dem äußeren Leiter B ist, und weil es gleich — V + V oder Null auf dem inneren Leiter A ist.

Die beiden inneren Schichten — M und + M sind dieselben (bis auf das Zeichen), welche vorhanden sein würden, wenn der Leiter A in leitende Verbindung mit einer auf dem Potentiale V befindlichen Elektricitätsmenge und der Leiter B mit der Erde verbunden worden wäre; dies ist das erste Theorem von Gaugain.

Schließlich ist der Überschuss + M′ der Elektricitätsmenge des äußeren Leiters B über jene des inneren Leiters A gleich der Elektricitätsmenge, welche dieser Leiter B annehmen würde, wenn A isoliert bleiben würde oder gar nicht vorhanden wäre; dies ist das zweite Theorem.

497. Gaugain hat sodann die Ladungen cylindrischer Condensatoren von verschiedenen Dimensionen verglichen. Die Formel:

$$M = \frac{VL}{2 \log \frac{R_2}{R_1}},$$

welche die Elektricitätsmenge gibt, die auf der inneren Belegung eines cylindrischen Condensators mit concentrischen Oberflächen ausgebreitet ist, zeigt, dass, wenn das Verhältnis der Radien der beiden Oberflächen constant ist, die Ladung des Collectors bei demselben Potentiale sich nicht ändert.

Mit zwei Apparaten von derselben Länge, deren Radien beim ersten Apparate 40^{mm} und 20^{mm}, beim zweiten 80^{mm} und 40^{mm} waren, erhielt Gaugain im ersten Falle 80 Entladungen, im zweiten 79·5, d. h. fast dieselbe Zahl. Es ist hier wieder nicht am Platze, Correctionen für die Rückstände zu machen, weil die beiden Apparate vom Potentiale V zum Potentiale V_1 übergiengen, und weil der Rückstand des Elektroskopes in den beiden Versuchen derselbe war.

498. Im Nachstehenden geben wir noch einige Versuchsergebnisse an, die sich auf Apparate von derselben Länge beziehen.

Durchmesser		$\frac{R_2}{R_1}$	Gemessene Ladung des Collectors	Rückstand des Elektroskops	Gesammte Ladung	Product
Collector $2R_1$	Condensator $2R_2$					
40^{mm}	80^{mm}	2	75	2	77	77
10	40	4	37	2	39	78
10	80	8	24·5	2	26·3	78·9

Die Verhältnisse der Halbmesser sind gleich 2, 2^2, 2^3. Die letzte Columne, welche das Product der gesammten Elektricitätsmengen respective in die Zahlen 1, 2, 3 gibt, zeigt, dass die Elektricitätsmenge des Collectors umgekehrt proportional dem Logarithmus des Verhältnisses der Halbmesser ist, was der Theorie entspricht.

499. Gaugain hat cylindrische excentrische Condensatoren mittelst zweier Röhren aus Weißblech von 1^m Länge gebildet; die Durchmesser dieser Röhren waren gegen 10^{mm} und 80^{mm}

und sie wurden ineinander derart gestellt, dass ihre Axen immer parallel waren.

Wir geben im Folgenden die in einer Reihe von Versuchen erhaltenen Resultate:

Entfernung der Axen	Beobachtete Ladung		Gerechnete Ladung	Differenz
0mm	29	1000	1000	„
17·5	33	1137	1127	$+\frac{1}{113}$
20	33·5	1155	1169	$-\frac{1}{83}$
23	36	1241	1250	$-\frac{1}{125}$
25	38	1310	1330	$-\frac{1}{66}$
27	43	1482	1479	$+\frac{1}{494}$
30	50	1724	1729	$-\frac{1}{345}$

Gaugain kannte zur Zeit der Anstellung der Versuche das Gesetz der Erscheinung nicht und er verglich erst später die Versuchsergebnisse mit jenen der Theorie, die durch eine ihm von Blavier angegebene Formel dargestellt war.

Die zweite Columne der beobachteten Ladungen umfasst Zahlen, welche jenen der ersten Columne proportional sind und die in der Weise gerechnet wurden, dass man die Ladung des Condensators mit concentrischen Oberflächen als 1000 annahm. Die Übereinstimmung der Rechnung und der Beobachtung ist so vollständig als man nur erwarten konnte.

500. Sphärische Condensatoren. Die von Gaugain in Anwendung gebrachten sphärischen Condensatoren bestanden aus einer Kugel, die von Schellackfüßen getragen wurde und die sich im Innern zweier halbkugelförmigen Calotten befand. Die obere Calotte hatte eine Öffnung von 30^{mm} Durchmesser, durch welche man Drähte durchgehen ließ, die dazu dienten, die innere Kugel entweder mit der Elektricitätsquelle oder mit dem Entladungselektroskope in leitende Verbindung zu bringen.

Wenn die innere Kugel als Collector angewendet wurde, war ihre Ladung bestimmt durch:

$$M = V \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = \frac{V}{4} \frac{D_1 D_2}{e},$$

wenn man mit D_1 und D_2 die Durchmesser der beiden Oberflächen und mit e ihre Entfernung bezeichnet.

Gaugain hat zu zwei und zwei sechs concentrische sphärische Condensatoren verglichen, deren Belegungen die unten angegebenen in Millimetern ausgedrückten Dimensionen hatten:

Nro. des Condensators	Durchmesser	
	innerer	äusserer
1	61·5	89
2	„	118·5
3	„	161
4	90·5	118·5
5	„	161
6	120	161

Wir geben nun die Zusammenstellung der Versuche:

Nro. der Condensatoren	Gemessene Ladungen	Verhältnis der Ladungen		Unterschied
		beobachtet	gerechnet	
5 6	16 35	0·457	0·438	$+\frac{1}{22}$
3 6	7·5 35	0·214	0·211	$+\frac{1}{75}$
4 6	27 32·6	0·828	0·812	$+\frac{1}{50}$
1 6	13 30	0·433	0·424	$+\frac{1}{45}$
2 5	10 16·4	0·609	0·618	$-\frac{1}{75}$

Die auftretenden Unterschiede sind ganz von der Ordnung der Beobachtungsfehler.

501. Ebene Condensatoren. Im Falle ebener Condensatoren hat Gaugain entweder die Elektricitätsmenge der Collectorplatte allein oder das Verhältnis der Ladungen der Collectorplatte und der Condensatorplatte bestimmt. Die Platten hatten 85^{mm} Durchmesser und waren mittelst Schellackfüßen isoliert; sie befanden sich im Innern eines cylindrischen Hohlraumes, der von nicht isolierten Metallwänden begrenzt war; der Durchmesser dieses Cylinders betrug 160^{mm}, die Höhe desselben 180^{mm}. Dieser Cylinder hatte den Zweck, eine künstliche, fast geschlossene Umhüllung zu bilden, durch welche die influencierende Wirkung der auswärtigen Körper behoben wurde.

Entfernung der Platten e	Reciproker Wert der Ladung des Collectors $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{ae}$
10^{mm}	10	1
20	15	0·75
30	17·77	0·59
40	18·82	0·47
50	20	0·40

Entfernung der Platten e	Verhältnis der Ladungen der beiden Platten $\frac{a}{b}=\frac{1}{m}$	$\frac{1}{me}$
7·5	1·352	0·18
10	1·452	0·145
13·5	1·754	0·13
20	1·933	0·096
25·7	2·439	0·095
30	3	0·10

Man sieht, dass weder die Elektricitätsmenge des Collectors noch das Verhältnis der Ladungen der Entfernung der Platten umgekehrt proportional ist, außer wenn diese Entfernung sehr klein ist.

502. In einer anderen Abhandlung[1] ist Gaugain auf die condensierende Kraft der Plattencondensatoren zurückgekommen; er suchte zu beweisen, dass der Ausdruck $\frac{1}{1-m^2}$ genau ist, oder — was auf dasselbe hinauskommt — dass die Collectorplatte, wenn sie der Influenzwirkung der Condensatorplatte entzogen und in leitende Verbindung mit der Elektricitätsquelle gesetzt wird, eine Elektricitätsmenge gleich $a(1-m^2)$ aufnimmt, wobei a die Ladung der Collectorplatte ist, wenn sie einen Bestandtheil des Condensationsapparates bildet.

Wir haben früher erwähnt, warum dieses Ergebnis umsomehr von der Wahrheit entfernt sein muss, je näher die Platten einander stehen; es wäre daher vorzugsweise für die kleinen Entfernungen von Interesse gewesen, die Genauigkeit desselben zu controlieren. Gaugain sagt, er habe mit Platten von allen Dimensionen Versuche gemacht, wobei die Entfernungen von 5^{mm} bis 25^{mm} variierten; aber er hat leider nur über den folgenden Versuch Bericht erstattet, in welchem der Durchmesser der Scheiben 130^{mm}, deren Entfernung 5 bis 6^{mm} war.

Wenn das Elektroskop des Apparates, der als Elektricitätsquelle dient, 50^0 angab, so brachte man ihn in Verbindung mit der Collectorplatte A, die isoliert und jeder Influenzwirkung entzogen war; es wurden dann nur mehr 35^0 abgelesen. Die Elektricitätsmenge, welche von dieser Collectorplatte aufgenommen wurde, ist daher im Stande, die Ablenkung des Elektroskopes von 35^0 auf 50^0 zu bringen. Man elektrisiert die Collectorplatte A, die nun der influencierenden Wirkung der Condensatorplatte B unterworfen ist, bis das Elektroskop 35^0 anzeigt; die Elektricitätsmenge der Collectorplatte ist a, jene der Condensatorplatte $-b$ und man hat $b = ma$. Man isoliert jetzt die Condensatorplatte B und berührt A; es bleibt diesmal auf der Collectorplatte nur die Elektricitätsmenge

$$mb = m^2a.$$

Man isoliert die Collectorplatte, verbindet die Condensatorplatte mit dem Erdboden, ladet die Quelle und das Elektro-

[1] Annales de Chimie et de Physique, 4. serie, t. IV., pg. 230.

skop, bis letzteres 50° angibt; nun weist man nach, dass, wenn man die Collectorplatte A in leitende Verbindung mit der Elektricitätsquelle bringt, die Ablenkung des Elektroskopes wieder auf 35° fällt. Da die schließliche Ladung der Collectorplatte wieder a ist und da die letztere schon die Elektricitätsmenge am^2 hatte, so hat sie eine Menge gleich $a\ (1 - m^2)$ aufgenommen und das Experiment zeigt an, dass die jeder Influenzwirkung entzogene Collectorplatte genau dieselbe Elektricitätsmenge aufgenommen hat.

Dieser Versuch ist sinnreich, er genügt aber keineswegs, um die Genauigkeit der Formel in allen Fällen zu beweisen.

503. Variabler Zustand der Condensatoren. Gaugain hat noch[1] die Art und Weise studiert, wie der elektrische Zustand eines Condensationsapparates variiert, wenn man die Condensatorplatte mittelst eines mittelmäßigen Leiters in leitende Verbindung mit dem Erdboden bringt, während die Collectorplatte in Verbindung mit der Elektricitätsquelle bleibt. Zu diesem Behufe genügt es, das Entladungselektroskop zwischen der Condensatorplatte und dem Erdboden aufzustellen.

Nehmen wir zur Fixierung der Vorstellungen an, dass die Elektricitätsquelle positive Elektricität liefert. Zu Beginn, d. h. in jenem Momente, in welchem man die leitende Verbindung der Collectorscheibe A mit der Elektricitätsquelle herstellt, befindet sich diese Platte auf dem Potentiale V; die Condensatorplatte B erhält ein geringeres Potential und zufolge des continuierlichen Elektricitätsflusses durch die Baumwollenschnur und das Maßelektroskop wird das Potential der Condensatorplatte immer geringer und geringer bis zu einem Grenzwerte, der nicht mehr hinreicht, neue Entladungen hervorzurufen, der also nahezu Null ist.

In jedem Augenblicke ist das Potential der Condensatorplatte der Elektricitätsmenge proportional, welche noch abzufließen bleibt, damit Gleichgewicht herrsche. Denn nehmen wir an, man füge der Condensatorplatte B eine Menge negativer Elektricität gleich $- 2\beta$ und der Collectorplatte A eine positive Elektricitätsmenge $+ \alpha$ zu, welche so beschaffen sind,

[1] Annales de Chimie et de Phys.que, 4. serie, t. IV., p. 240.

dass das Potential dieser beiden Schichten gleich Null auf A und gleich $-v$ auf B sei; dies ist genau der elektrische Zustand, welcher sich herstellen würde, wenn die isoliert erhaltene Condensatorplatte B eine Elektricitätsmenge -2β erhalten hätte, die andere aber mit dem Erdboden in leitender Verbindung wäre. Es ist klar, dass in diesem Falle das Potential v proportional β ist. Superponiert man diesen Gleichgewichtszustand dem ersten, so wird man Gleichgewicht haben, das dem Falle entspricht, in welchem durch das Elektroskop eine positive Elektricitätsmenge gleich $+\beta$ abgeflossen sein wird, weil daraus gleichzeitig ein Überschuss $-\beta$ an negativer Elektricität sich ergeben wird; man sieht daher, dass die Verminderung $-v$ des Potentiales der Condensatorplatte und die Zunahme der Elektricitätsmenge α der Collectorplatte der abgeflossenen Elektricitätsmenge β proportional sind. Da das Potential am Ende Null wird, folgt, dass dieses Potential in jedem Augenblicke der Elektricitätsmenge proportional ist, welche abfließen muss.

Nehmen wir andererseits an, dass die Geschwindigkeit der Elektricitätsströmung durch die baumwollene Schnur zwischen der Condensatorplatte und dem Goldblatte dem Unterschiede der Potentiale proportional ist, d. h. dem absoluten Potentiale des Collectors, so wird man, wenn man mit n die Elektricitätsmenge bezeichnet, welche in einer Zeit t übrig bleibt und k einen constanten Coefficienten bedeutet, haben:

$$-\frac{dn}{dt}=kn.$$

Nennt man n_0 die gesammte Strömung, so wird man daher haben:

$$n=n_0 e^{-kt}.$$

Ist die Anfangsladung der Collectorplatte m_0, so ist die Zunahme der Elektricitätsmenge $m-m_0$ der abgeflossenen Elektricitätsmenge n_0-n proportional, und man erhält:

$$m-m_0=h(n_0-n)=hn_0(1-e^{-kt}),$$

in welcher Formel h einen neuen Coefficienten darstellt.

Es folgt daraus, dass, wenn man in gleichen Zeitintervallen θ die aufeinanderfolgenden Werte von n (n_0, n_1, $n_2 \ldots$) notiert, diese Werte eine abnehmende geometrische Progression bilden werden, deren Exponent $e^{-k\theta}$ ist. Die aufeinanderfolgenden Differenzen der Werte von n ($n_0 - n_1$, $n_1 - n_2 \ldots$) bilden in gleicher Weise eine geometrische Progression, deren Exponent derselbe ist; schließlich bilden die entsprechenden Größen $m_1 - m_0$, $m_2 - m_1 \ldots$ auch eine geometrische Progression.

504. Um diese Eigenschaft zu bestätigen, genügt es, die Geschwindigkeit der Hervorrufung der Entladungen im Elektroskope zu bestimmen. Der Versuch wurde mit zwei großen rechteckigen Platten von 36 Centimeter Breite und 46 Centimeter Länge angestellt, die durch eine Luftschichte von 12 *mm* getrennt waren; man notiert von 3 zu 3 Minuten die gesammte Anzahl der Entladungen.

Zeit	Gesammtentladung $n - n_0$	Entladungen während dreier Minuten	Rechnung	Unterschied
3'	24	24	24	0
6	45	21	25	0
9	62·5	17·5	62·3	— 0·2
12	76·8	14·3	76·5	— 0·3
15	88	11·2	88·2	+ 0·2
18	97·2	9·2	97·8	+ 0·6
21	105	7·8	105·7	+ 0·7
24	111·8	6·8	112·2	+ 0·4
27	117·8	6·0	117·5	— 0·3
30	122·4	4·6	121·8	— 0·6
33	126·2	3·8	125·3	— 0·9
36	129·6	3·4	128·2	— 1·4

Die in der vierten Verticalreihe eingeschriebenen Zahlen geben die Anzahl der Entladungen an, welche man hätte erhalten müssen, damit die Zuwächse der negativen Ladungen der Condensatorplatte strenge in geometrischer Progression stünden; diese Zahlen wurden in der Weise gerechnet, dass man als Exponenten der Progression 0·825 nahm.

Wenn man, nachdem einmal das Gleichgewicht erreicht ist und die Goldblättchen in Ruhe sind, die Collectorplatte ent-

fernt, die Condensatorplatte jedoch in Verbindung mit dem Elektroskope lässt, so wird nach demselben Gesetze ein gleicher Abfluss von negativer Elektricität sich entwickeln.

Dieser Versuch bestätigt deshalb die alleinige Annahme, welche man in der vorstehenden Betrachtung gemacht hat, dass nämlich die Elektricitätsströmung, welche durch die Baumwollenschnur stattfindet, in jedem Augenblicke dem Unterschiede der Potentiale, welche an den beiden Enden der Schnur herrschen, proportional ist.

Gaugain hat nach derselben Methode auch den Fall eines Condensators studiert, der aus drei parallelen Platten gebildet ist, und auch jenen zweier Plattencondensatoren, in welchem die Condensatorplatte des ersten mit der Collectorplatte des zweiten mittelst einer Schnur und einem Elektroskope verbunden war.

Wir werden bei diesen Versuchen nicht länger verweilen, weil die auf diese zusammengesetzten Condensatoren bezüglichen Resultate Consequenzen des Vorhergehenden sind und leicht aus der Theorie erschlossen werden können.

Rolle des isolierenden Mediums in den Condensatoren. — Specifisches Inductionsvermögen. — Methoden zur Bestimmung desselben.

505. Sehr bald nach der Entdeckung der Leydnerflasche durch Kleist im Jahre 1745 brachten die Physiker in Erfahrung, dass nicht alle Glassorten gleich gute Dienste in der Leydnerflasche leisten und dass für Flaschen von denselben Dimensionen und derselben Dicke des isolierenden Mediums die Elektricitätsmenge, welche dem Apparate durch eine und dieselbe Elektricitätsquelle ertheilt wurde, von der Beschaffenheit des Glases abhängig ist. Es ist in dieser Beziehung der Erfahrungen von Musschenbroek, Wilke, Cuthbertson schon früher Erwähnung geschehen. Man schrieb allgemein lange Zeit hindurch diese Unterschiede einer besonderen Leitungsfähigkeit der Glasschichte zu; es wurde die Anwendung fester, isolierender Medien, die zwischen

die Belegungen einer Leydnerflasche gesetzt wurden, so aufgefasst, als ob diese Medien einzig und allein den Zweck haben sollten, die freiwillige Entladung des Condensationsapparates zu verhindern. Faraday hat aber nachgewiesen, dass die Rolle des zwischen die Belegungen des Condensators gestellten isolierenden Mediums eine viel compliciertere ist. Es ist bereits in der ersten Abtheilung dieses Werkes der Versuch beschrieben worden, in welchem Faraday nachwies, dass die elektrische Influenz zwischen zwei Platten bedeutender ist, wenn man die Luftschichte durch ein isolierendes, festes Medium ersetzt; gelegentlich der Auseinandersetzung dieses Versuches wurde das Princip der Methode erwähnt, nach welcher man das specifische Inductionsvermögen oder die Dielektricitätsconstante einer isolierenden Substanz, d. h. das Verhältnis der Elektricitätsmenge, welche durch Influenz durch dieses Medium entwickelt wird, zu jener, welche durch eine Luftschichte von der gleichen Dicke entwickelt wird, bestimmen kann.

Wir kommen auf die Versuche von Faraday etwas später zurück, und müssen früher einiger älterer Versuche Erwähnung thun, welche bereits von Cavendish über diesen Gegenstand angestellt wurden. Diese Untersuchungen waren bis zum Jahre 1879 unpubliciert; in diesem Jahre wurden die elektrischen Forschungen von Cavendish gesammelt und der Öffentlichkeit übergeben. Faraday hatte also keine Kenntnis von diesen wichtigen Arbeiten.

506. Bestimmung der Dielektricitätsconstante nach der Methode von Cavendish. Die elektrische Ladung, welche ein Plattencondensator aufnehmen muss, um ein bestimmtes Potential V zu erreichen, ist bekanntlich dargestellt durch:

$$M = V \frac{S}{4\pi e},$$

wenn S die Größe jeder Belegung, e die Dicke der isolierenden Schichte ist. Bei Anwendungen von Plattencondensatoren mit kreisförmigen Belegungen vom Halbmesser r hat man daher:

$$M = V.\frac{r^2\pi}{4\pi e} = \frac{r^2}{4e} V.$$

Aus dieser Formel erkennt man, dass die Capacität eines solchen Condensators $\frac{r^2}{4e}$ ist; eine Kugel, welche den Radius $R = \frac{r^2}{4e}$ hat, besitzt daher dieselbe Capacität wie der Condensator.

Cavendish rechnete nach dieser Formel das Verhältnis der Ladungen jedes Condensators zu jener der in seinen früheren Versuchen, die wir oben beschrieben haben, in Anwendung gebrachten Kugel, wenn Luft an Stelle des Glases gesetzt wäre. Er verglich sodann die Elektricitätsmengen auf experimentellem Wege. Es ist klar, dass das Verhältnis der beobachteten und gerechneten Ladung das Verhältnis der Capacitäten des Glas- und Luftcondensators, also das specifische Inductionsvermögen des Glases, gab.

Um die oben aufgestellte Formel zu bestätigen, wurde die Kugel mit einem Luftcondensator, der aus zwei parallel aufgestellten Messingplatten bestand, verglichen. Es ergab sich, dass die Ladung des Plattencondensators $^1/_{10}$ größer war, als es nach der Formel sein sollte, ein Umstand, der zweifelsohne von der Wirkung der den Condensator umgebenden Körper, z. B. der Wände des Experimentierraumes, herrührt. Die Theorie setzt nämlich voraus, dass der umgebende Raum unendlich groß sei; das Versuchszimmer Cavendish betrug aber nur ungefähr 16 Quadratfuß. Auf diesen Umstand hat Cavendish bei Anlegung seiner Tabelle keine Rücksicht genommen.

Gordon(1) schließt aus der Abhandlung von Cavendish, dass die beobachtete Elektricitätsmenge dividiert durch die gerechnete Elektricitätsmenge der specifischen Inductionscapacität des Glases gleichkommt, wenn jene der Luft 1·1 angenommen wird; es müssten darnach die von Cavendish für die Dielektricitätsconstante angegebenen Zahlen mit $^{10}/_{11}$ multipliciert werden, um die wahren Werte dieser Constante zu erhalten. Wir entnehmen der von Gordon angegebenen Tabelle nur einige der corrigierten Werte; es gelten nach

(1) l. c. vol. I., pag. 76.

diesen Versuchen für die specifischen Inductionscapacitäten der verschiedenen Substanzen die beigesetzten Werte:

Flintglas	7·21	
Crownglas	7·76	
Mittelwert aus zehn Versuchen mit Glascondensatoren	7·47	
Schellack	4·09	
Mischung von Colophonium und Bienenwachs	3·066	(Mittelwert)
Rectificiertes Bienenwachs (1) . . .	3·36	„
Reines Bienenwachs	3·67.	

Was die Herstellung der einzelnen Plattencondensatoren, die Cavendish anwendete, betrifft, so muss auf das Original der Leser verwiesen werden. — Die Bekleidungen aller Platten waren kreisförmig. Bei der Berechnung der Elektricitätsmenge der Glasplatten wurde der Durchmesser der Belegung entsprechend der Ausbreitung der Elektricität corrigiert; es wurde hiebei angenommen, dass die Elektricität 0.07 engl. Zoll sich verbreite, wenn die Dicke der Glasplatte 0.21 ist, hingegen 0·09, wenn die Dicke der Platte 0·08 ist, so dass nach einem einfachen Interpolationsverfahren die einer bestimmten Dicke der Glasplatte entsprechende Verbreitung der Elektricität gerechnet werden konnte.

Cavendish machte auch Versuche mit cylindrischen Condensatoren. Zu diesem Zwecke verwendete er hohle, an beiden Seiten offene Glascylinder, die innen und außen mit Stanniolringen belegt waren; die Belegungen standen einander genau gegenüber. Bei engeren Röhren, wie Thermometerröhren, wendete er als innere Belegung Quecksilber an, welches in die Röhren gegossen wurde. Mit großer Genauigkeit wurde die Entfernung der beiden Belegungen, d. h. die Dicke der isolierenden Substanz, bestimmt.

(1) Cavendish gebraucht für dieses Bienenwachs den Namen „dephlegmated." Bienenwachs schmilzt nämlich bei einer Temperatur von 145° F. Wird es über den Siedepunkt des Wassers erhitzt, so schäumt es sehr und verliert einen großen Theil Wassers; erhält man es bei dieser Temperatur, bis es zu schäumen aufhört, so wird es dann, auf einen viel höheren Temperaturgrad erwärmt, weder schäumen noch sieden. Dies ist das bezeichnete Wachs.

Cavendish hat in seinen Versuchen auch den Einfluss der Temperatur auf das specifische Inductionsvermögen des Glases studiert und ist zu dem Ergebnisse gelangt, dass bei 295⁰ F. das Glas beinahe vollständig leitend wurde, noch besser bei 305⁰ F. Er kam auf diese Weise zu dem Schlusse, dass die Capacität beträchtlich zunahm, wenn das Glas leitend wurde, dass aber bis zu diesem Punkte keine merkliche Differenz sich zeigte.

Eine andere interessante Frage hat Cavendish sich in seinen Untersuchungen gestellt, nämlich die, ob die Variation der Ladung einen Einfluss auf die specifische Inductionscapacität der untersuchten Substanzen nehme. Einen solchen zu entdecken gelang ihm nicht.

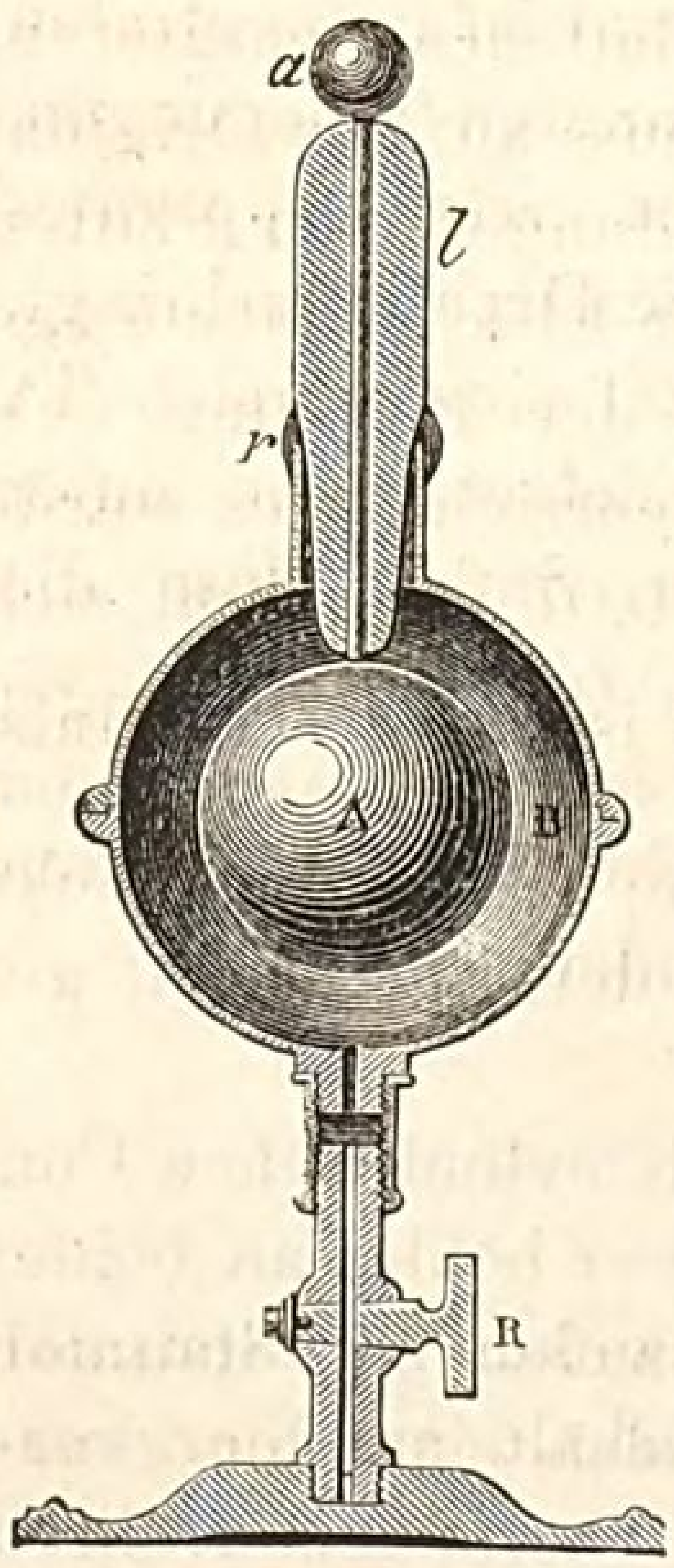


Fig. 208.

507. Versuche von Faraday, die Messung der Dielektricitätsconstante betreffend. Faraday brachte zur Messung des specifischen Inductionsvermögens einen Apparat in Anwendung, dem er den Namen Differentialinductometer[1] ertheilte; derselbe besteht aus zwei sphärischen Condensatoren von denselben Dimensionen, deren Belegungen in dem einen durch eine Luftschichte, in dem anderen durch irgendein Medium getrennt sind. Die äußere Belegung B dieser Condensatoren (Fig. 208) ist, ganz sowie bei den Magdeburgischen Halbkugeln, aus zwei Calotten gebildet, von denen die eine mit einem Hahne versehen ist, der dazu dient in dem Apparate einen luftleeren Raum zu erzeugen und ein beliebiges Gas eintreten zu lassen. Die obere Calotte ist mit einer Tubulatur versehen, durch welche man einen Metallstab einführt, der an seinem oberen Ende in einen Metallknopf *a* übergeht und die innere Kugel A trägt. Dieser Stab ist in

(1) Experimental Researches, t. I., pag. 371 u. d. f. — Die bezügliche Abhandlung „on induction" überreichte Faraday der Royal Society am 30. November 1837.

einen Schellackcylinder eingelassen, welchen man in die Tubulatur mittelst eines Harzwulstes r kittet. Die innere Kugel hatte einen Durchmesser von 2·33 Zoll und der innere Durchmesser der umhüllenden Kugelschale B betrug 3·57 Zoll.

Die Versuchsmethode ist die folgende. Betrachten wir zwei identische Apparate, von denen der eine Luft, der andere ein isolierendes Medium enthält. Man ladet den ersten mit Elektricität und berührt den Knopf a mit einer Probeplatte, welche man in eine Coulomb'sche Drehwage bringt, deren bewegliche Kugel geladen ist; man erhält eine Torsion T bei einem gewissen Ausschlagswinkel. Der zweite Apparat ist im neutralen Zustande; nun verbindet man die beiden inneren Belegungen, berührt sodann vom neuen den Punkt a des ersten Apparates mit der Probescheibe, die man hierauf in die Drehwage bringt, und erhält bei demselben Ausschlagswinkel eine Torsion T'. Die beiden Apparate theilen nicht in gleicher Weise unter sich die ursprüngliche Ladung und man findet, dass die Torsion T' im allgemeinen kleiner als $\frac{T}{2}$ ist. Das Verhältnis der Elektricitätsmengen M und M', welche in den beiden Fällen auf dem ersten Apparate sich befinden, ist:

$$\frac{M}{M'} = \frac{T}{T'};$$

die Elektricitätsmenge, welche von dem zweiten Condensator aufgenommen wurde, ist M — M'; man erhält aus der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{M - M'}{M'} = \frac{T - T'}{T'}.$$

Man findet auf diese Weise das Verhältnis der Elektricitätsmengen, welche die beiden Condensatoren aufnehmen, wenn sie untereinander in Verbindung stehen, d. h. wenn sie dasselbe Potential haben; dies ist aber das Verhältnis ihrer elektrischen Capacitäten oder das Verhältnis der specifischen Inductionsvermögen der beiden isolierenden Medien.

Um die Fehler, welche aus der Zerstreuung der Elektricität entspringen, zu vermeiden, wiederholt man eine Reihe

von analogen Versuchen, wobei man mit der Ladung des zweiten Apparates beginnt; man erhält so für das specifische Inductionsvermögen zwei Werte, von denen der eine zu groß, der andere zu klein ist und man nimmt das Mittel der Versuchsergebnisse.

508. Es ist ferner nicht nothwendig, den Zwischenraum zwischen den beiden Oberflächen des zweiten Apparates vollständig mit dem zu untersuchenden Körper zu erfüllen. Faraday beschränkte sich meistens darauf, einen Block von der Gestalt einer halbkugelförmigen Schale, welcher nur die Hälfte des zwischen den beiden Belegungen befindlichen Raumes ausfüllte, einzuführen. Nehmen wir an, dass unter diesen Bedingungen das Verhältnis der Capacitäten der beiden Condensatoren auf experimentellem Wege zu $1+\alpha$ bestimmt worden sei. Dies bedeutet, dass die Influenz, welche durch die beiden halbkugelförmigen Luftschichten im ersten Apparate wirkt, welche Influenz wir durch $2i$ bezeichnen wollen, zur Influenz, welche im zweiten Apparate durch eine Luftschichte und eine Schichte des zu studierenden Mediums stattfindet, und die man durch $i+i'$ darstellen kann, im Verhältnisse von $1:(1+\alpha)$ steht; hieraus erhält man:

$$\frac{i+i'}{2i}=\frac{1+\alpha}{1}.$$

Man rechnet hieraus für das Verhältnis der Elektricitätsmengen, welche durch Influenz durch beide Schichten entwickelt wurden, d. h. für das specifische Inductionsvermögen der Substanz die Formel:

$$\frac{i'}{i}=1+2\alpha.$$

509. Faraday hat eine sehr große Anzahl von Versuchen gemacht, die sich auf diesen Gegenstand beziehen und ist zu folgenden Schlüssen gekommen:

1. Alle einfachen oder zusammengesetzten Gase (Faraday verglich 25 Paare von Gasen) haben dasselbe Inductionsvermögen, und letzteres ist unabhängig vom Drucke. Im Speciellen besteht keine schätzenswerte Differenz zwischen trockener und feuchter Luft.

2. Die isolierenden Flüssigkeiten lieferten wohl keine deutlichen Resultate, sie schienen aber mit einem höheren Inductionsvermögen begabt zu sein, als Gase.

3. Krystallisierte Körper offenbarten keine merklichen Unterschiede in den verschiedenen Richtungen.

4. Die specifischen Inductionsvermögen der verschiedenen isolierenden Substanzen sind, jenes der Luft als Einheit angenommen:

Luft	1	Schellack. . .	2
Wallrath . . .	1·45	Schwefel . . .	2·24
Glas	1·76	Terpentinöl	größer als 1.

Harris([1]) hat diese Versuche von Faraday wieder aufgenommen und die Kugeln durch parallele Platten ersetzt, was weniger Schwierigkeiten bereitet; er erhielt fast genau dieselben Resultate:

Luft . . .	1	Glas	1·90
Harz . .	1·77	Schellack .	1·95
Pech . . .	1·80	Schwefel . . .	1·93.
Bienenwachs .	1·86		

Zu diesen Zahlen fügt Jenkin([2]) die folgenden, ohne ihren Ursprung anzugeben, mit Ausnahme der ersten, welche den Versuchen von Gibson und Barklay entlehnt ist:

Paraffin	1·98
Kautschuk (India rubber) . . .	2·8 bis 3·1
Guttapercha	3·59 bis 4·2
Glimmer	5.

Gibson und Barklay haben mittelst ihrer später zu erörternden Methode nachgewiesen, dass das Inductionsvermögen des Paraffins zwischen den Temperaturen -12^0 und $+24{\cdot}3^0$ in keiner nennenswerten Weise variiert.

510. Die Entdeckung des specifischen Inductionsvermögens von Faraday hat die Physiker in lebhaftes Staunen versetzt; einige von ihnen waren auf den Standpunkt angelangt, dass sie alle älteren Theorien in Zweifel zogen. „Bevor wir," sagt Delarive([3]), „die Theorie auseinandersetzen, zu welcher diese

([1]) Harris, Phil. trans. 132, 1842.
([2]) Electricity and magnetism, London (1873), pg. 97.
([3]) Traité d'electricité, t. I., pg. 129.

Thatsachen Faraday geleitet haben, wollen wir die Thatsachen, welche von diesem Physiker entdeckt wurden, selbst studieren; wir werden dann in besserer Lage sein, zu urtheilen, in wieferne die auf die Arbeiten von Coulomb und Poisson basierten Theorien modificiert werden müssen, wenn die letzteren überhaupt nicht vollständig umgestoßen werden." Faraday setzt überdies seine Auffassungsweise der Erscheinungen in folgenden Worten auseinander:

„Im jetzigen Augenblicke glaube ich, dass die gewöhnliche Induction (Influenz) in allen Fällen eine Wirkung der einander berührenden Partikelchen ist, welche in einer Art Polarisation besteht und nicht eine Wirkung der Theilchen oder der Maßen in merkliche Entfernungen darstellt; ist dies richtig, so muss die Aufstellung einer solchen Wahrheit von der allergrößten Wichtigkeit für die weiteren Fortschritte auf dem Gebiete der Untersuchungen über die Natur der elektrischen Kräfte sein." (¹)

Die Vorstellung, dass die elektrischen Kräfte und noch allgemeiner alle in der Natur vorkommenden Wirkungen nur durch die Vermittlung eines zwischenliegenden Mediums zwischen zwei Körpern sich äußern können, scheint seit einigen Jahren eine große Beliebtheit erlangt zu haben; es ist aber — ohne eine solche Hypothese, welche das innerste Wesen der physikalischen Erscheinungen berührt, bejahen oder verneinen zu können — wichtig zu bemerken, dass wenigstens für die elektrischen Erscheinungen dieser Schluss keine nothwendige Folgerung aus den Entdeckungen von Faraday ist. Alle von diesem Physiker beobachteten Thatsachen kann man leicht durch die Wirkung in die Ferne erklären, wobei man die Elektrisierung der isolierenden Medien berücksichtigt.

511. Die Bestimmung der specifischen Inductionsvermögen mittelst der Vergleichung der Dichten besitzt keinen sehr großen Genauigkeitsgrad; die Zahlen, welche wir den Versuchen von Faraday entlehnten, sind nur die Mittel aus Versuchen, welche wenig genug untereinander übereinstimmen. Die Vergleichung der elektrischen Capacitäten oder der Potentiale mittelst der Elektrometer würde constantere Resultate

(¹) Experimental Researches, t. I., pg. 362.

liefern und diese Methode wurde seitdem von mehreren Physikern angewendet.

512. Seitdem Faraday das specifische Inductionsvermögen einiger Substanzen bestimmt hatte, beschäftigten sich in dem nächstfolgenden Zeitraume mehrere Physiker mit demselben Probleme und brachten verschiedene Messmethoden zur Anwendung. Wir wollen im Nachstehenden vorläufig einige dieser Untersuchungen in aller Kürze darstellen.

Belli(1) hatte bereits im Jahre 1838 ein sehr sinnreiches Verfahren angegeben, um den Einfluss des dielektrischen Zwischenmediums auf die Ladung eines Condensators nachzuweisen: Die Platten desselben werden nämlich in einer gewissen Entfernung einander gegenübergestellt, die eine mit dem Conductor einer Elektrisiermaschine, die andere mit der Erde leitend verbunden. Man verbindet ferner die Condensatorplatten mit den Kugeln eines Funkenmikrometers, die einander gegenüberstehen, dreht die Scheibe der Elektrisiermaschine gleichmäßig und zählt die Funken, die in einer bestimmten Zeit zwischen den Kugeln übergehen; bringt man zwischen die beiden Condensatorplatten eine Glasscheibe, so sind die in derselben Zeit übertretenden Funken weniger zahlreich aber intensiver; es ist somit die Capacität des Condensators durch Einschaltung der Glasplatte zwischen die Belegungen vergrößert.

Späterhin(2) gab derselbe Forscher eine Methode an, um die Capacitäten von Condensatoren, die verschiedene Dielektrika enthalten, zu vergleichen: Die Condensatoren bestanden aus einer großen zur Erde abgeleiteten und einer kleinen isolierten Metallplatte und verschiedenen dielektrischen Zwischenplatten; man lud einen derartigen Condensator, bis ein mit demselben in Verbindung gesetztes Elektrometer ein bestimmtes Potential anzeigte; dann wurde die Zahl der Contacte der geladenen Metallplatte mit einem isolierten Conductor, der nach jeder Berührung zur Erde abgeleitet wurde, bestimmt, bis die Ladung des Condensators nur mehr die Hälfte der ursprünglichen war. Durch Vergleichung dieser Zahlen konnte

(1) Belli, Fisica sperimentale 3, 1838.

(2) Belli, Corso element. di fisica sperimentale, 3. pg. 239, 1858.

er einen Schluss auf die Capacitäten der Condensatoren und somit auf das specifische Inductionsvermögen der angewendeten Zwischensubstanzen ziehen. Die Zahlen, die er erhielt, befinden sich aber keineswegs in Übereinstimmung mit jenen, die nach später angewendeten Methoden erhalten wurden. Er erhielt z. B. folgende Werte für die Dielektricitätsconstanten verschiedener Substanzen. (Luft als Einheit angenommen):

Schwefel . . .	3·21	Siegellack . . .	4·31
Schellack . . .	3·33	Glas	7·83.

Verdünnte Luft änderte die Capacität des Condensators nicht; der Einfluss verschieden starker Ladungen auf das specifische Inductionsvermögen konnte ebenfalls nicht constatiert werden.

Weitere Versuche über die specifische Induction mittelst Galvanometerbeobachtungen hat Werner Siemens(1) angestellt. — Rosetti(2) hat die beiden Condensatorbelegungen mit den Entladungskugeln einer Holtz'schen Influenzmaschine, die einander gegenübergestellt waren, verbunden und die Anzahl der Umdrehungen der Scheibe der Maschine bestimmt, welche sich nothwendig erwiesen, damit 100 Entladungen stattfanden. Es ist leicht einzusehen, dass die Capacität eines Condensators dieser Zahl proportional ist. Er fand für die specifischen Inductionsvermögen einiger Substanzen nachstehende Zahlen:

Luft	1	Schwefel . .	1·81
Ebonit . .	2·08	Wallrath . . .	2·18.
Glas . . .	3·45		

Auch das specifische Inductionsvermögen der Luft unter verschiedenen Drücken hat Rosetti studiert und gefunden, dass die Capacität von Luftcondensatoren mit der Verdünnung der Luft bis auf einen Druck von 200^{mm} sich nicht ändere, von da an aber schnell zunehme.

Wir kommen im weiteren Verlaufe dieses Abschnittes auf die Bestimmungen des specifischen Inductionsvermögens ausführlich zurück.

(1) Pogg. Ann. Bd. 102, 1857.

(2) Rosetti, nuovo Cimento 10, 1873.

Es kommt überdies in allen diesen Untersuchungen ein Element vor, welches Faraday nicht berücksichtigte und welches eine wichtige Rolle spielt, dies ist die Dauer der Influenz. Gaugain hat in der That gezeigt, dass die elektrische Influenz durch feste Isolatoren von der Zeit abhängt, dass sie sich allmählich vergrößert, wenn das Experiment länger andauert, so dass das specifische Inductionsvermögen eine Function der Zeit ist, und dass es nothwendig ist, diese neue Betrachtung in das Studium der Erscheinungen aufzunehmen.

513. Versuche von Gaugain. Gaugain(¹) hat mittelst seines Entladungselektroskopes die verschiedenen Umstände studiert, welche sich in den Condensatoren mit fester, isolierender Schichte darbieten: 1. die Dauer der Ladung; 2. das Ladungsmaximum und das Ladungsminimum; 3. die plötzliche Entladung und den Ladungsrückstand; 4. die langsame Entladung.

Dauer der Ladung. Gaugain hatte schon festgestellt, dass die Elektricitätsmenge, welche sich auf einem eingetauchten Telegraphenkabel ansammelt, sobald der innere Draht in leitende Verbindung mit einer bestimmten Elektricitätsquelle gebracht ist, beträchtlich variieren kann, je länger oder kürzer das Kabel in Verbindung mit der Elektricitätsquelle bleibt. Diese Beobachtung war der Ausgangspunkt seiner Untersuchungen über die Condensatoren.

Ein Luftlamellencondensator ladet sich augenblicklich, während in dem Falle, als das isolierende Medium ein fester Körper ist, die Ladung, welche der Condensator von einer gegebenen Elektricitätsquelle erhält, im allgemeinen von der Zeit abhängt, während welcher er in leitender Verbindung mit der Elektricitätsquelle steht.

Doch ist es — soll die Dauer der Ladung des Luftcondensators unschätzbar sein, wie wir gesagt haben — nothwendig, die Ursachen der Schwächung zu vermeiden, welche aus der Elektricitätsquelle selbst oder den Verbindungsorganen entspringen könnten; es müssen die Verbindungsstäbe sehr leitend sein, der Condensator, welchen man studiert, muss ferner eine sehr kleine Capacität im Verhältnis zu jener des Apparates

(¹) Annales de Chimie et de Physique, 4ᵉ serie, t. II., pag. 264.

haben, welcher als Elektricitätsquelle dient, wie es in den Versuchen von Gaugain der Fall ist, oder es muss die von der Quelle gelieferte Elektricitätsmenge so groß sein, dass die Zeit, welche nothwendig ist, um die ganze Ladung des Condensators zu bewerkstelligen, vernachlässigt werden kann.

514. Gaugain hat in diesen Untersuchungen nur Plattencondensatoren mit beweglichen Belegungen in Anwendung gebracht. Diese Gestalt der Condensatoren ist erstens von einer sehr bequemen Construction und andererseits gestattet sie, die Belegung, welche man untersuchen will, von dem isolierenden Medium zu trennen. Eine solche Operation ist beinahe immer unumgänglich nothwendig, denn wenn in einem Falle viel Zeit zur Sättigung eines Condensators nothwendig ist, so ist andererseits in gleicher Weise viel Zeit nothwendig, um ihn zu entladen und der Verlust durch die Luft wird relativ beträchtlich, wenn der durch das Messelektroskop stattfindende Elektricitätsfluss sehr langsam ist. Um eine allzu schnelle Strömung in den ersten Augenblicken zu vermeiden, beginnt man die Operation des Messens damit, dass man die Belegung, welche man studiert, an ihrem Platze lässt, sodann sie nach und nach von der isolierenden Schichte entfernt, je langsamer das Freiwerden der Elektricität stattfindet, so dass die Geschwindigkeit der Entladungen fast gleichförmig ist und kein Theil der Elektricität der Messung entgeht. Man trug überdies dafür Sorge zu bewahrheiten, dass die Belegung keine Spur von Elektricität auf der isolierenden Platte zurückgelassen hatte und dass diese nach der Operation vollständig im neutralen Zustande sich befand. Auch mit schwachen Potentialen, wie sie Gaugain in Anwendung brachte, durfte man nicht befürchten, dass die Elektricität vom Leiter zur isolierenden Platte übergieng, wenn nur zwischen den beiden Oberflächen keine Spur von Feuchtigkeit sich befand.

515. Um einen Begriff von der Langsamkeit zu geben, mit welcher in gewissen Fällen sich die Zunahme der Ladung vollzieht, geben wir im Nachfolgenden eine Reihe von Versuchen an, die mit einer elektrischen Tafel gemacht wurden, welche aus zwei Platten von 75 Millimeter im Durchmesser bestand, die durch eine Schwefelscheibe von 6 Millimeter Dicke

getrennt waren. Die Elektricitätsmenge der Collectorplatte wurde durch die Anzahl der Entladungen bestimmt, welche diese Scheibe am Elektroskope hervorrief.

Dauer der Ladung	Elektricitätsmenge des Collectors	Dauer der Ladung	Elektricitätsmenge des Collectors
Bruchtheil einer Secunde	22	8 Minuten	35
30 Secunden	28	16 „	37
2 Minuten	30	32 „	39
4 „	33	64 „	42

Die momentane Ladung ist nicht die Hälfte derjenigen, welche man am Ende einer Stunde erhält und dann ist das Maximum noch nicht erreicht.

Ebenso muss mehr als eine Viertelstunde verfließen, um einen Condensator mit einer Schellackschichte bis zur Sättigung zu laden und auch mehr als eine Viertelstunde, um ihn vollständig zu entladen. Die Ladung, welche man am Ende dieser Zeit erhält, ist mindestens die dreifache jener, welche eine augenblickliche Berührung liefert.

Diese Erscheinung ist mit einer langsamen Änderung in dem elektrischen Zustande des isolierenden Kuchens verbunden. Die Elektricität verlässt nicht die Belegungen, weil die Potentiale nicht genügend hoch sind, aber der isolierende Kuchen ladet sich auf jeder der beiden Seiten mit Elektricität, welche jener der benachbarten Belegung entgegengesetzt ist. Die Dinge verhalten sich daher so, als ob die isolierende Scheibe ein leitender Körper wäre und dieser Leiter von den Belegungen durch sehr dünne, aus einer vollständig isolierenden Substanz gebildete Lamellen getrennt wäre.

Um den elektrischen Zustand einer isolierenden Scheibe festzustellen, nachdem man die Belegung entfernt hat, bringt man auf ihre beiden Seiten bewegliche Belegungen, die mit isolierenden Handgriffen versehen sind; man berührt gleichzeitig diese Belegungen, dann trennt man sie und bestimmt mittelst eines Goldblattelektroskopes die Natur der Elektricität,

welche jeder von ihnen mitgetheilt wurde. Diese durch Influenz entwickelte Elektricität ist vom entgegengesetzten Zeichen, wie jene, welche die angrenzende Seite des isolierenden Kuchens besitzt.

516. Über das Ladungsmaximum. Um die Grenze der Ladung zu studieren, hat Gaugain isolierende Platten mit genau ebenen Flächen und metallische Belegungen, die in gleicher Weise eben waren, in Anwendung gebracht. In der weitgrößten Anzahl der Fälle wurden aber diese metallischen Belegungen nicht direct an den Kuchen angelegt, sondern waren von demselben durch kleine Luftschichten getrennt; man gab diesen Luftlamellen eine constante Dicke, indem man auf der Innenseite jeder Belegung drei mehr oder weniger dicke Schellackkügelchen befestigte. Das isolierende Medium war so aus zwei Luftschichten gebildet, die durch eine feste Lamelle getrennt waren.

Wenn die zwischen den beiden Luftschichten gestellte Schichte aus einem leitenden Körper gebildet ist, so wird die Grenze der Ladung in einer unmessbar kurzen Zeit erreicht und sie ist dieselbe, als ob dieser Leiter nicht vorhanden wäre, besonders dann, wenn die Dicke dieses Leiters klein im Verhältnisse zum gemeinsamen Durchmesser der Scheiben bleibt und die Summe der Dicken der Luftschichten, die sich zu beiden Seiten dieses Leiters befinden, in allen Versuchen constant bleibt. Wenn der zwischengestellte Körper eine schlecht leitende Platte ist, so wird die Grenzladung nur am Ende einer mehr oder weniger langen Zeit erreicht, sie ist im allgemeinen aber unabhängig von der Natur und der Dicke des isolierenden Körpers, mit welchem man arbeitet.

517. Diese Eigenthümlichkeit wurde mittelst Kuchen von verschiedenen Substanzen, deren Dicke von 5^{mm} bis 39^{mm} variierte, festgestellt; die Platte hatte hierbei 74^{mm} im Durchmesser. Im Nachfolgenden stellen wir die Ergebnisse einiger Versuche zusammen:

Zwischengestellte Lamelle		Dauer der Ladung	Ladung des Collectors
Material	Dicke		
Zink	5^{mm}	augenblicklich	21
	39	"	21
Stearinsäure	6	Einige Augenblicke	13
		5 Minuten	20
		10 "	21
Stearinsäure	17	Einige Augenblicke	9
		5 Minuten	14
		10 "	14
		20 "	16
		2 h. 15'	19
		2 h. 40'	20
Guttapercha	6	Einige Augenblicke	15
		5 Minuten	17
		10 "	21
		20 "	22
Schellack	6	Einige Augenblicke	14
		5 Minuten	20
		20 "	22
Schwefel	6	Einige Augenblicke	15
		: :	:
		7 h. 30'	21

Ein unerwartetes Resultat schien, wenn nicht ganz, doch zum größten Theile, aus der oberflächlichen Leitung aller Oberflächen der festen Körper, welche der Luft ausgesetzt waren, zu stammen; die isolierenden Scheiben verhalten sich in Wirklichkeit so, als ob sie von einer unendlich dünnen Schichte einer mittelmäßig leitenden Substanz eingehüllt wären. Diese Erklärung macht auch begreiflich, warum die Zeit, welche nothwendig ist, damit die Grenzladung erreicht werde, mit der Dicke der isolierenden Schichte, d. h. mit der Ausdehnung der Oberflächen, größer wird.

Wiederholte Gaugain denselben Versuch mit einem nicht continuierlichen Kuchen, der aus aufgeschütteten Schwefelblumen gebildet ist, so erhielt er eine beträchtlich kleinere Ladung, was einzig und allein von der mangelnden Continuität der Oberflächen herrühren kann.

In der That erhielt man, wenn man die Schwefelblumen mit einer genügenden Menge Olivenöl befeuchtete, genau dieselbe Wirkung, wie bei Anwendung einer Platte geschmolzenen Schwefels.

518. Was diese Eigenschaft betrifft, dass die Zwischenstellung einer leitenden Platte keinen Einfluss auf die Ladung des Collectors hat, wenn nur die Summe der Dicken der beiden Luftschichten constant bleibt, so ist sie eine sehr einfache Consequenz aus der Theorie, wie leicht gezeigt werden kann.

Betrachten wir eine Collectorplatte A, die sich auf dem Potentiale V befindet und durch eine Luftschichte von der Dicke e von einer Scheibe C, die sich ursprünglich in neutralem Zustande befindet und die Dicke E hat, getrennt ist, wobei diese letztere selbst wieder durch eine Luftschichte von der Dicke e' von der Condensatorplatte B, welche mit dem Erdboden in leitender Verbindung steht, getrennt ist. Der zwischenliegende Leiter C ladet sich durch Influenz und nimmt ein Potential V' an. Setzt man voraus, diese Platten seien bezüglich der Dicken e, E und e' unbegrenzt groß, so sind die vier elektrischen Schichten + M auf der inneren Seite der Collectorplatte, — M' und + M' auf den beiden Seiten des Leiters C und — M'' auf der Condensatorplatte B dem absoluten Werte nach gleich groß. Die Dichten μ (auf der Innenseite des Collectors) und μ' (auf der Seite des Leiters C, welche der Condensatorplatte gegenübersteht) sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\mu = \frac{V - V'}{4\pi e}, \quad \mu' = \frac{V' - o}{4\pi e'};$$

da diese Dichten gleich sind, so ergibt sich daraus:

$$\mu = \frac{V}{4\pi (e + e')}.$$

Die Elektricitätsmenge des Collectors ist daher dieselbe, als ob der zwischenliegende Leiter nicht vorhanden wäre und die beiden Belegungen einander so nahe stünden, dass die Dicke der Luftlamelle nicht geändert wird.

519. Wenn die Belegungen mit der isolierenden Platte in Berührung stehen, was dem Falle der Franklin'schen Tafel

entspricht, so ist die Grenzladung viel stärker als jene, welche man erhält, wenn man dünne Luftlamellen dazwischen stellt, und diese Ladung wird nur am Ende einer viel längeren Zeit erreicht; es wird dann schwierig, die von den verschiedenen Medien gelieferten Ladungen untereinander zu vergleichen. Die Versuche scheinen indessen anzuzeigen, dass die Grenzladung mit der Natur des isolierenden Mediums sich ändert. Man hat so für zwei Tafeln von denselben Dimensionen, welche als isolierende Platten einerseits Guttapercha, andererseits Stearinsäure hatten, folgende Zahlen erhalten:

Dauer der Ladung	Ladung		Verhältnis
	Stearinsäure	Guttapercha	
20 Minuten	103	111	1·08
40 „	121	132	1·09
1 h 20′	126	144	1·14

Es scheint schwer zu sein, in dieser Art von Versuchen mit langer Dauer jene Fehler zu vermeiden, welche der oberflächlichen Leitungsfähigkeit entspringen.

520. Über das Ladungsminimum. Es ist vom größeren Interesse, die Ladungen zu vergleichen, welche die verschiedenen Condensatoren in der möglichst kürzesten Zeit aufnehmen. Um die Dauer der Ladung auf ein sehr kurzes Zeitintervall zu reducieren, hat Gaugain von einem sehr einfachen Apparate Gebrauch gemacht. Dieser Apparat besteht im wesentlichen aus einer kleinen, fixen Messingrinne C (Fig. 209) und einer Stahlspitze P, welcher man eine schnelle Bewegung ertheilen kann. Die Messingrinne ist von rechteckiger Form und am Ende einer Säule aus Hartgummi befestigt und in leitender Verbindung mit der Elektricitätsquelle durch einen Draht S. Die Stahlspitze ist mittelst eines zweiten Ebonitstabes isoliert und mit dem Collector durch einen anderen Draht A leitend verbunden. Man füllt vollständig die Messingrinne mit Wasser, so dass die Flüssigkeit sich ober die

Wände erhebt, und arrangiert den Apparat derart, dass die Stahlspitze in ihrer schnellen hin- und hergehenden Bewegung den durch die Flüssigkeitsoberfläche gebildeten Kamm des Meniscus quer durchschneidet. Diese Bedingung ist leicht zu erfüllen, weil die Rinne mittelst einer Mikrometerschraube bis zu einer passenden Höhe gebracht werden kann. Um die Stahlspitze in Bewegung zu versetzen, befestigt man den sie tragenden Ebonitstab am freien Ende eines Bündels elastischer Streifen R, das an seinem oberen Ende befestigt ist; man hält diese elastischen Streifen mittelst eines Eisenstabes T straff gespannt; letzterer geht durch einen hölzernen Ständer, wo er durch einen Riegel V, der sich in einer Rinne bewegt, zurückgehalten wird. Macht man den Versuch, so hebt man den Riegel, die Stahlfeder schnellt plötzlich auf und die Dauer der Berührung der Stahlspitze mit der Flüssigkeit überschreitet nicht den hundertsten Theil einer Secunde.

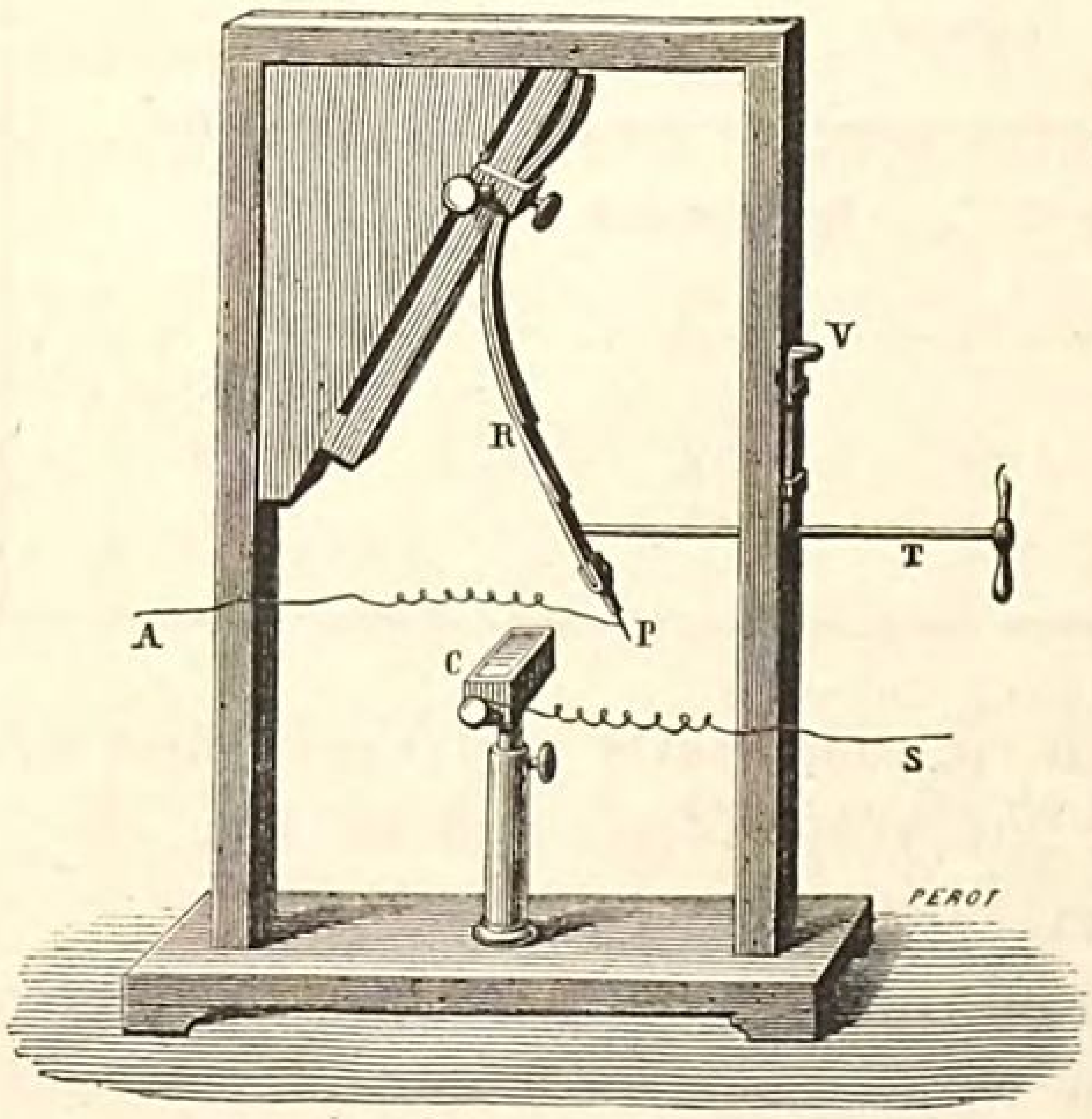


Fig. 209.

Wenn man als Einheit der Ladung des Collectors jene nimmt, welche derselbe erhält, wenn die isolierende Schichte eine Luftschichte ist, in welchem Falle die Dauer der Berührung keinen merklichen Einfluss hat, so erhielt Gaugain, indem er die Luftlamelle einer Franklin'schen Tafel durch eine Schichte von der im Handel vorkommenden Stearinsäure ersetzte:

Dauer der Berührung	Ladung des Collectors
Kleiner Bruchtheil einer Secunde	1·30
2 Secunden	1·85
1 Minute	2·71
Mehrere Stunden	7

Die Zahlen der letzten Spalte stellen das dar, was Faraday das specifische Inductionsvermögen des isolierenden Körpers genannt hat. Diese Größe scheint für eine unendlich kurze Zeit gegen die Einheit zu convergieren, mit zunehmender Zeit wird sie aber in beträchtlicher Weise größer. In den Versuchen von Faraday und jener Physiker, welche in einer ähnlichen Weise vorgiengen, war die Dauer der Berührung wahrscheinlich wenigstens eine Secunde und die erhaltenen Zahlen sind 1·8 benachbart, was mit den vorhergehenden Ergebnissen in Übereinstimmung sich befindet.

521. Nachdem Gaugain auf diese Weise den Einfluss der Zeit in klares Licht gesetzt hatte, bestimmte er die specifischen Inductionsvermögen der verschiedenen isolierenden Substanzen, zuerst für einen möglichst kurzen Contact, dann für einen Contact von zwei Secunden.

Ein Bruchtheil der Secunde		2 Secunden	
Luft	1	Luft	1
Stearinsäure	1·30	Schwefel	1·71
Spermacet	1·47	Kautschuk	1·78
Wachs	1·50	Spermacet	1·85
Vulkanisierter Kautschuk	1·50	Stearinsäure	1·92
Schellack	1·53	Guttapercha	2·07
Schwefel	1·57	Schellack	2·07
Guttapercha	1·60	Wachs	2·21

Man nimmt in diesen Tabellen mehrere Versetzungen wahr, so z. B. für die Stearinsäure und den Schwefel, welche sich abwechselnd am Kopfe der Reihe und beinahe am Ende derselben befinden; es steht zu vermuthen, dass sich noch neue Störungen zeigen würden, wenn man die Dauer des Experimentes verlängern würde. Gaugain hat diese Ergebnisse dem Mangel an Homogenität der isolierenden Medien zugeschrieben; denn stellen wir uns eine absolut isolierende Masse vor, in welcher sich kleine Massen einer anderen vollkommen leitenden Substanz zerstreut vorfinden und andererseits eine homogene Masse, die mit einer schwachen Leitungsfähigkeit begabt ist. Das erste Medium nimmt unmittelbar seinen defini-

tiven elektrischen Zustand an und wird das zweite in den ersten Augenblicken übertreffen; das homogene Medium aber, in welchem die Verrückung der Fluida sich nur allmählich vollzieht, wird die Oberhand erlangen, wenn die Ladungen genügend lange dauern werden.

Gaugain ist dazu gelangt, auf directe Weise diesen Einfluss der Heterogenität mittelst zweier Schwefelkuchen nachzuweisen; der eine von diesen enthielt eine kleine Menge Wasser, der andere eine ein wenig größere Menge Olivenöl.

Dauer der Ladung	Kuchen enthaltend	Entladungen
Ein Bruchtheil einer Secunde	Wasser Öl	48 32
5 Minuten	Wasser Öl	62 80

522. Es scheint auch daraus zu folgen, dass — wenn ein Medium vollkommen isolierend ist — dieses sich ebenso verhalten würde, wie Luft und augenblicklich seine Grenzladung erreichen würde.

Als Gaugain mit einem Kuchen von gewöhnlichen Schwefelblumen experimentierte, setzte er fest, dass die auf dem Collector angesammelte Elektricitätsmenge immer dieselbe blieb, wie lange auch die Ladung dauerte; dass ferner diese Elektricitätsmenge beträchtlich größer war als jene, welche ein Luftcondensator lieferte und um vieles kleiner war, als jene, welche er dann erhielt, als er den Kuchen aus Schwefelblumen durch einen homogenen Leiter ersetzte. Danach mussten daher die Schwefelblumen sehr leitende Theilchen enthalten und auch andere, die absolut isolierend sind.

Als er schließlich einen Kuchen von amorphem Schwefel benützte, war die Ladung constant gleich jener eines Luftcondensators, wie lange auch die Ladung dauerte; daraus folgt, dass der amorphe Schwefel vollkommen jeder Leitungsfähigkeit beraubt ist. Leider wurde dieses Resultat nicht in einer Weise aufgestellt, die bezüglich der außerordentlichen

Zartheit des amorphen Schwefels, welcher bei gleichem Volumen ungefähr fünfmal weniger wiegt, als der pulverisierte octaedrische Schwefel, sehr strenge ist.

Wie dem auch immer sei, das, was Faraday specifisches Inductionsvermögen genannt hat, ist eine sehr complicierte Eigenschaft, welche wenigstens zum Theile der Leitungsfähigkeit der in Anwendung gebrachten Medien und auch zum Theile entweder dem Vorhandensein von leitenden Elementen, die in der Masse zerstreut sind, oder — was auf dasselbe hinauskommt — einer Polarisation, welche in augenblicklicher Weise eintreten würde, entspringt.

523. Über die plötzliche Entladung und die Rückstandsladung. Wenn man einen Condensator in der Weise entladet, dass man die Belegungen durch einen Leiter verbindet und sie dann isoliert, so geschieht es beinahe immer, dass, wenn man den Versuch am Ende einiger Augenblicke wiederholt, man einen neuen Funken erhält. Die Existenz dieser Rückstandselektricität oder der Rückstandsladung kann mehreren verschiedenen Ursachen entspringen.

Wenn der Condensator eine Luftlamelle hat und wenn man einen Leiter mit der einen Belegung in leitende Verbindung setzt und denselben der anderen Belegung allmählig nähert, bis ein Funke entsteht, so bemerkt man, dass man einen neuen Funken erhalten kann, wenn man den Leiter noch näher bringt. Dieser Versuch lässt sich leicht in folgender Weise begreifen: Der Durchgang der Elektricität durch den Funkenweg, wie schnell auch der Funke immer sein mag, ist nicht augenblicklich; der Widerstand, den die Luft dem Durchgange der Elektricität entgegensetzt, wird in beträchtlicher Weise im Momente der Entstehung des Funkens geringer, aber ganz entfernt wird dieser Widerstand nicht und es kommt bald dahin, dass die Elektricität, welche noch nicht abgeflossen ist, keine genügend große Dichte mehr hat, um den Raum zwischen den Belegungen zu überspringen. Vermindert man diesen Zwischenraum, so wird man eine neue partielle Entladung des Rückstandes hervorrufen und so weiter; die Belegungen werden nur dann in den neutralen

Zustand gebracht sein, wenn die Berührung zwischen ihnen hergestellt sein wird.

Diese Betrachtungsweise gestattet auch vorauszusehen, dass die Beschaffenheit des Bogens, welcher eine Verbindung zwischen den beiden Belegungen herstellt, eine wichtige Rolle spielt. Gaugain hat in der That nachgewiesen, dass der erste Funken eine beinahe vollständige Entladung hervorruft, wenn der Schließungsbogen ein sehr guter Leiter ist, und dass der Rückstand größer wird, wenn man diesen Bogen durch einen minder gut leitenden Körper ersetzt. Die Elektricitätsmenge, welche in den ersten Funken übergeht, ist auch umgekehrt proportional dem Widerstande des Zwischenbogens.

Ein zweiter, etwas complicierterer Fall ist der, in welchem eine Lamelle aus einem festen isolierenden Medium zwischen die beiden Belegungen gestellt wurde, ohne eine von ihnen zu berühren. Wenn der Apparat elektrisiert ist, so kann man ihn nicht vollständig entladen, wenn man zwischen den beiden Belegungen eine leitende Verbindung von kurzer Dauer herstellt; stellt man die Berührung nach einer gewissen Zeit wieder her, so erhält man einen neuen Funken. Die isolierende Schichte wurde allmählig durch Influenz elektrisch, ihre beiden Seiten sind mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen und jede von ihnen erhält auf der am nächsten liegenden Belegung eine Elektricitätsschichte vom entgegengesetzten Zeichen; diese beiden Belegungen können so, obgleich sie auf demselben Potentiale im Augenblicke der Berührung sich befinden, entgegengesetzte Elektricitätsmengen erhalten. Die partielle Entladung hat aber das Potential in den verschiedenen Punkten der isolierenden Schichte modificiert; die elektrischen Fluida, welche getrennt waren, vereinigen sich allmählig wieder und die Belegungen, welche verschiedene Potentiale annehmen, können eine neue unvollständige Entladung liefern; man muss diesen Vorgang eine große Anzahl male wiederholen oder einen langen Contact erhalten, um den Apparat in den neutralen Zustand zu bringen.

Dasselbe Phänomen findet statt, wenn die Belegungen in Berührung mit einer festen isolierenden Lamelle sind und wenn man mit schwachen Potentialen arbeitet, wie es in den

Versuchen von Gaugain der Fall ist. Sind aber die Potentiale beträchtlich, so können die elektrischen Schichten der Belegungen diese Leiter verlassen und sich an die entsprechenden Seiten der isolierenden Zwischenschichte anlegen, wie wir bereits gesehen haben, und sogar bis zu einer gewissen Tiefe eindringen. Diese neue Ursache wird wieder in den Entladungserscheinungen eine Rolle spielen. Wenn die Belegungen in leitende Verbindung gebracht werden, so werden die Elektricitätsschichten, welche auf der isolierenden Platte verbreitet sind, zum Theile sich von derselben entfernen und auf die Leiter zurückgehen, welche sie berühren. Wenn man dann vom neuen die Belegungen isoliert, stellt sich langsam ein anderer Gleichgewichtszustand her und man kann eine zweite partielle Entladung erhalten und so fort. Die Erscheinung ist dann sehr compliciert und es scheint schwierig zu sein, alle Details genau zu begreifen.

524. Gaugain hat die plötzliche Entladung und die rückständige Elektricität mittelst kleiner Franklin'schen Tafeln mit beweglichen Belegungen studiert: in gewissen Fällen waren die Belegungen auf den isolierenden Körper angelegt; in anderen Fällen waren sie von demselben durch kleine Luftschichten getrennt. Die allgemeinen Ergebnisse waren bei der einen und bei der anderen Anordnung dieselben.

In einer ersten Reihe von Versuchen trachtete Gaugain zu erforschen, nach welchem Gesetze die Rückstandsladung variiert, wenn man die Dauer der Entladung variiert und die Elektricitätsquelle constant erhält. Bald bewegte er den Metalldraht, der zum Hervorrufen der Entladung bestimmt war, mit der Hand, bald bediente er sich des Federapparates; im zweiten Falle überschritt die Dauer des Contactes nicht $^1/_{100}$ einer Secunde, während sie im ersten Falle $^2/_{10}$ oder $^3/_{10}$ Secunden erreichen konnte; die beiden Vorgänge waren aber äquivalent.

Der Collector wurde mit der Elektricitätsquelle eine gewisse Zeit hindurch in leitende Verbindung gesetzt, dann bestimmte man seine gesammte Ladung mittelst des Maßelektroskopes. Wenn der isolierende Körper in den neutralen Zustand zurückgekehrt ist, so ladet man vom neuen den Collector während derselben Zeit, dann entladet man ihn unmittelbar dadurch,

dass man eine einen Augenblick während leitende Verbindung zwischen den Belegungen herstellt; hierauf entfernt man den Collector und misst die Elektricitätsmenge, welche er noch behält, und diese gibt die Rückstandsladung an. Wenn man diese doppelte Reihe von Versuchen mit demselben Condensator wiederholt und hierbei nach und nach der Ladungsdauer verschiedene Werte ertheilt, so gelangt man zu dem sehr einfachen Ergebnisse, dass die Differenz zwischen der Gesammtladung und der Rückstandsladung constant bleibt. Dieser Unterschied, welcher die Elektricitätsmenge darstellt, die bei einer augenblicklichen Entladung verschwindet, ist genau gleich der gesammten augenblicklichen Ladung.

Dieses Gesetz wurde mit sehr verschiedenen isolierenden Körpern bestätigt; man verwendete Schellackscheiben, Scheiben von Stearinsäure und Guttapercha, einen Schwefelkuchen, der mit Olivenöl befeuchtet war.

Im Nachfolgenden stellen wir die Resultate zusammen, welche mit diesem letztgenannten Körper erhalten wurden.

Dauer der Ladung	Ladung		Differenz oder augenblickliche Entladung
	gesammte	rückständige	
Bruchtheil einer Secunde	26	0	26
2 Minuten	44	18	26
4 „	49	23	26
8 „	55	28	27
16 „	59	33	26

525. Diese Beziehung, die einfach ist, ist eine unmittelbare Folgerung aus der Existenz von mittelmäßig leitenden Elementen, die sich in dem zwischengestellten Medium befinden. Die Elektricitätsmenge, welche durch eine Berührung von sehr kurzer Dauer entweicht, hängt nur von den Elementen des zwischenliegenden Mediums ab, welche leitend sind oder welche sich augenblicklich polarisieren, und sie ist offenbar gleich der augenblicklichen Ladung; der Rest, welcher langsam ent-

steht, wird durch die Elektrisierung der wenig leitenden Elemente zurückgehalten.

Denn es ist nothwendig, damit das Gesetz sich bewahrheite, den Condensator zu entladen, gleich nachdem er von der Elektricitätsquelle entfernt wurde; wenn die Ladung von der Entladung durch immer längere Zeitintervalle getrennt ist, so wird die Elektrisierung des Kuchens infolge der Leitungsfähigkeit immer größer und größer und die Entladung immer schwächer.

So wurde ein Apparat, der einen Schellackkuchen von 6^{mm} Dicke hatte, augenblicklich geladen, dann mit dem Elektroskope leitend verbunden, und lieferte 45 Entladungen; nach einer weiteren, einen Augenblick dauernden Ladung und einer unmittelbaren plötzlichen Entladung, war der Rückstand Null. Man lud vom neuen den Condensator einen Moment hindurch und man brachte am Ende von 15 Minuten den Collector mit dem Elektroskope in Verbindung: man erhielt wieder 45 Entladungen, d. h. der Verlust war geringfügig. Man lud wieder in derselben Weise und veranlasste nach 15 Minuten eine plötzliche Entladung; man verband den Collector mit dem Elektroskope und erhielt diesmal einen Rückstand von 27 Entladungen. Die Elektricitätsmenge, die bei der plötzlichen Entladung verbraucht wurde, wurde daher von 45 auf $45 - 27 = 18$ vermindert, je nachdem man die Entladung unmittelbar oder am Ende von 15 Minuten vollzog.

526. Wir fassen nun das Vorhergehende zusammen: ein Condensator mit einer festen isolierenden Substanz kann eine beträchtliche Elektricitätsmenge aufnehmen, wenn man ihn lange Zeit in leitender Verbindung mit der Elektricitätsquelle erhält, aber diese ganze Elektricität kann für eine plötzliche Entladung nicht nutzbar gemacht werden. Wenn die Elektricitätsquelle beträchtliche Elektricitätsmengen liefert oder von genügenden Dimensionen ist, so gibt ein momentaner Contact dem Collector das Maximum der Ladung, welche nutzbar ist; wenn der Absatz der Elektricitätsquelle zu gering ist, so wird das nützliche Wirkungsmaximum erreicht, wenn das Potential des Collectors gleich dem Grenzpotentiale der Elektricitätsquelle geworden ist. Man sieht noch aus den (521) mitgetheilten Resultaten, dass bei der plötzlichen Entladung alle festen isolierenden Substanzen

fast gleichwertig sind und dass sie ein und ½mal soviel Elektricität liefern, als ein Luftlamellencondensator von der gleichen Dicke, wobei man allerdings voraussetzt, dass der Versuch in diesem letzten Falle möglich sei und dass die Luftschichte genügend dick sei, um die Hervorrufung eines directen Funkens zwischen den beiden Belegungen zu verhindern. Die Rolle der festen Isolatoren ist daher hauptsächlich jene, diesen directen Funken einen Widerstand zu leisten. Gleichwohl ist die Wahl der Isolatoren nicht vollkommen gleichgiltig, weil sie Veranlassung zu sehr ungleichen Rückständen geben werden und weil die Maximalladung des Condensators eine längere oder kürzere Zeit erfordern wird.

Man muss noch bemerken, dass diese Resultate nur mit sehr schwachen Potentialen und Plattencondensatoren erhalten wurden; es ist nicht gestattet, dieselben Schlüsse auf den Fall von geschlossenen Condensatoren, wie Leydnerflaschen, und auf viel größere Potentiale auszudehnen, aber allem Anscheine nach müssen die Erscheinungen dann denselben Gang darbieten.

Nach Erörterung dieser wichtigen Versuche von Gaugain wenden wir uns noch zur Beschreibung jener Experimente, durch welche das unterschiedliche Verhalten der isolierenden Zwischenschichte in klares Licht gesetzt wurde. Es beziehen sich die im Folgenden zur Sprache kommenden Versuche auf die Messung des specifischen Inductionsvermögens fester, flüssiger und gasförmiger Dielektrika. Die zur Anwendung gelangten Methoden sollen als für die elektrische Messkunde belangreich mit ziemlicher Ausführlichkeit besprochen werden.

527. Versuche von Gibson und Barclay über die specifische Inductionscapacität des Paraffins. Die englischen Physiker Gibson und Barclay [1] stellten im Jahre 1871 messende Versuche über die Dielektricitätsconstante des Paraffins an, die nicht nur wegen der Resultate, zu denen sie führten, sondern auch wegen der angewandten Methode sehr bemerkenswert sind.

Die Instrumente, welche die beiden Forscher bei ihren Messungen verwendeten, waren ein Quadrantenelektro-

(1) Gibson und Barclay, Phil. Trans. 1871, pag. 573.

meter, ein sogenanntes Platymeter und ein Schleifcondensator (sliding condenser).

Das Platymeter von Thomson (Fig. 210) besteht im wesentlichen aus zwei cylindrischen Condensatoren von gleicher Capacität, deren innere Belegungen in leitende Verbindung gesetzt sind. Die zwei inneren Belegungen bilden in der Regel einen einzigen Cylinder, die zwei äußeren Belegungen sind kürzere Cylinder, wie wir es aus der vorstehenden Figur ersehen.

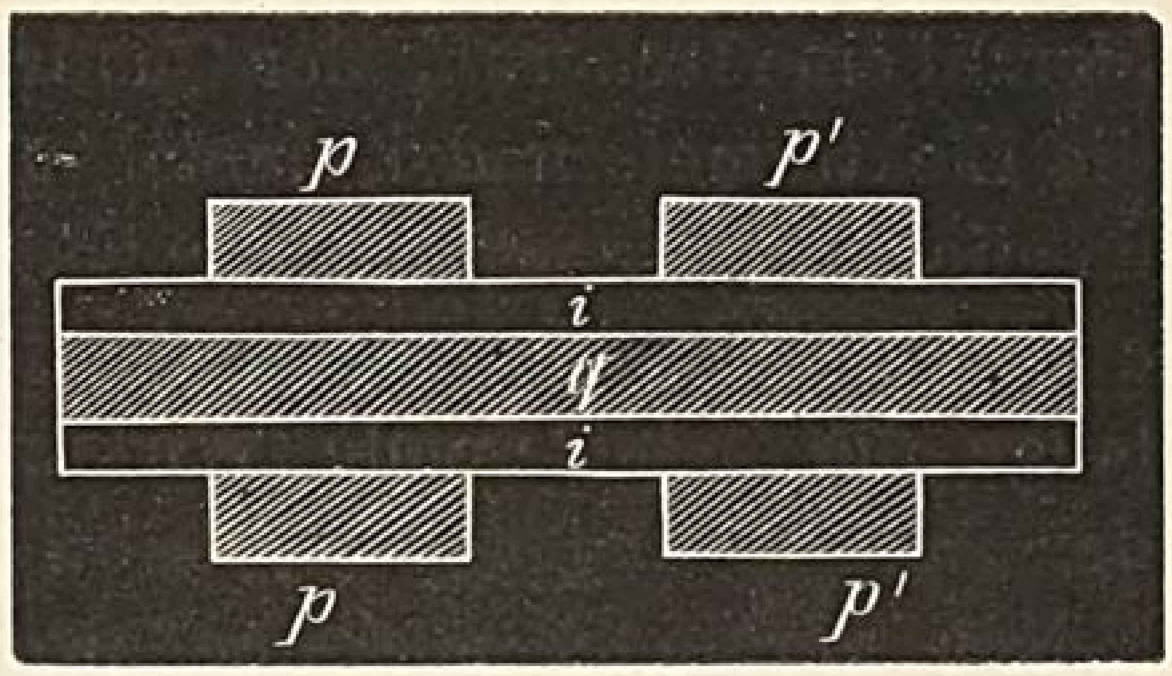


Fig. 210.

Die Versuchsanordung ist durch Fig. 211 dargestellt. Das eine Quadrantenpaar (II, II) des Elektrometers wird mit der Erde leitend verbunden, das andere Paar (I, I) ist in Verbindung mit dem inneren Cylinder des Platymeters. Zum Schutze gegen

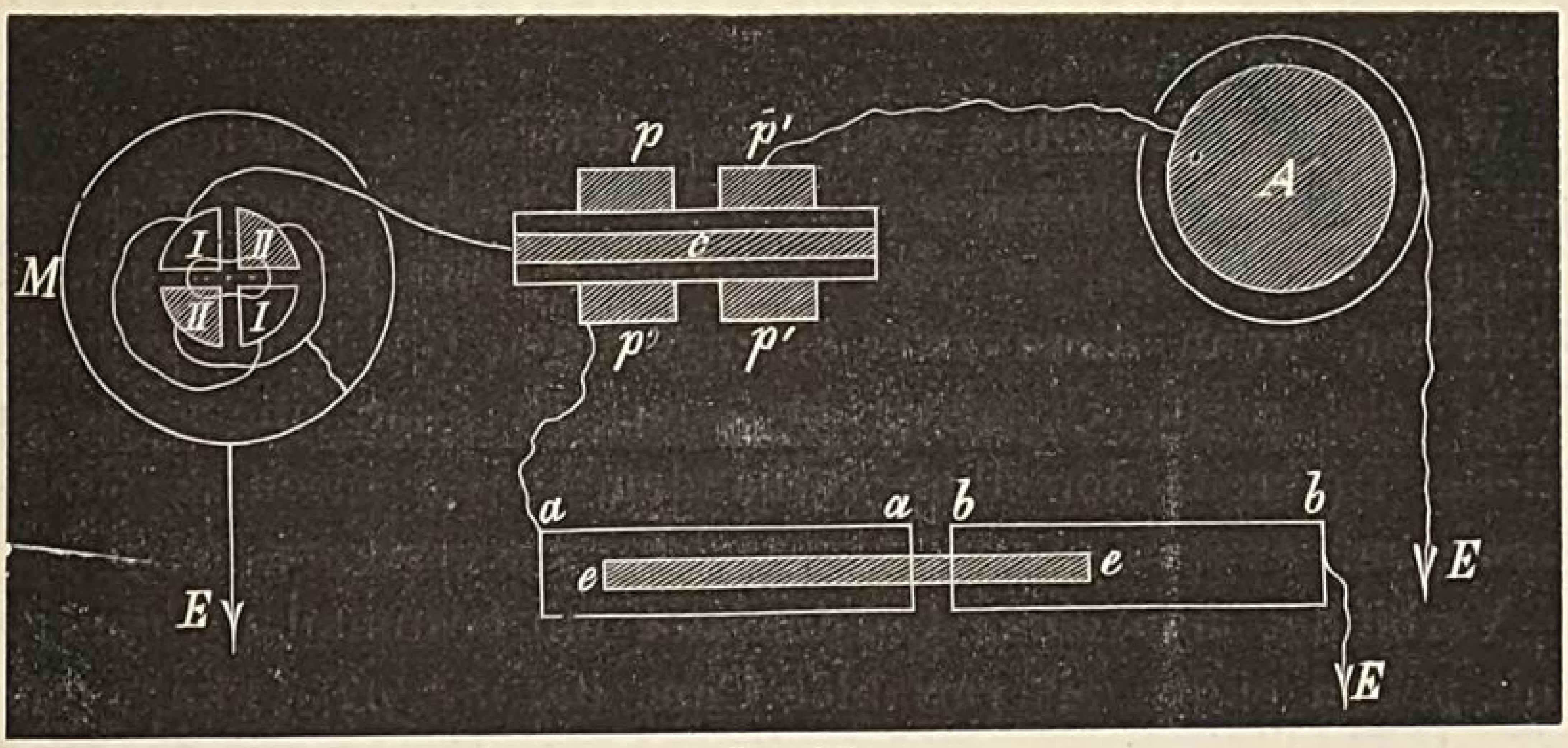


Fig. 211.

anderweitige äußere Einflüsse wurde das Elektrometer mit einem in der Figur angedeuteten Metallgehäuse umgeben, welches auch zur Erde abgeleitet ist.

Ist der eine äußere Cylinder des Platymeters etwa mit positiver Elektricität geladen, so wird er auf dem inneren Cylinder eine negative Elektricitätsmenge inducieren, die abgestoßene positive Elektricität wird zum Quadrantenpaar (I, I) übergehen und es wird die Elektrometernadel einen Ausschlag

geben. Bleibt nun das Quadrantenpaar (I, I) noch immer mit dem inneren Cylinder des Platymeters in Verbindung, wird aber dasselbe gleichzeitig zur Erde abgeleitet, so wird die abgestoßene positive Elektricität entweichen und es wird, wenn hierauf eine Isolierung der Quadranten (I, I) vorgenommen wird, die Elektrometernadel, einmal zur Ruhe gelangt, auf Null zeigen, da die gebundene negative Elektricität des inneren Cylinders *c* keine Wirkung auf das Elektrometer hervorrufen kann, so lange die inducierende Wirkung des äußeren Cylinders auf den inneren ungeändert bleibt.

Nun verbindet man die zwei gleichen äußeren Cylinder *p* und *p'* des Platymeters miteinander. Die inducierende Wirkung von *p* auf den Cylinder *c* wird auf die Hälfte reduciert; gleichzeitig gewinnt *p'* die halbe Ladung von *p* und wird eine Wirkung hervorrufen, welche genau gleich jener von *p* ist. Die Summe der Wirkungen von *p* und *p'* auf *c* ist also dieselbe, wie früher die Wirkung des Cylinders *p* allein war; es entsteht noch immer keine Ablenkung der Elektrometernadel, solange die Condensatoren des Platymeters keine Ungleichheit aufweisen.

Wenn wir denselben Versuch wiederholen, nachdem wir zu den Condensatoren *p* und *p'* zwei andere Condensatoren hinzugefügt hatten, so wird noch immer keine Nadelablenkung eintreten, wenn diese zwei hinzugefügten Condensatoren dieselbe elektrische Capacität besitzen; ist aber eine auch nur kleine Differenz derselben vorhanden, so wird sich die Nadel bewegen.

Verbindet man einen Condensator mit bestimmter Capacität mit *p* und einen mit variabler Capacität mit *p'*, so kann man den letzteren derart variieren, dass keine Ablenkung der Elektrometernadel sich zeigt; wir haben dann die neuen Condensatoren bis zur Gleichheit reguliert. Man erkennt, dass diese Methode vorzügliche Dienste leisten wird, wenn es sich darum handelt, Normalcondensatoren zu copieren, denn sie hängt nicht von der Präcision eines anderen Instrumentes ab.

Ein Condensator von bestimmter und leicht zu rechnender Capacität wurde in der Weise angefertigt, dass man eine Metallkugel von bekanntem Halbmesser innerhalb einer an-

deren fixierte. Die Radien der inneren Kugel und der Hohlkugel waren respective r' und r, in dem Zwischenraume, der einer Kugelschale von der Dicke $r - r'$ darstellt, befand sich Luft; dann war daher die Capacität dieses Condensators gegeben durch die Formel

$$C = \frac{rr'}{r - r'}.$$

Man fügte diesen Condensator in der durch die Figur angedeuteten Weise zu dem Condensator p'; die äußere Belegung des Kugelcondensators war zur Erde abgeleitet.

Der Schleifcondensator wurde mit p verbunden; er besteht im wesentlichen aus einer fixen isolierten Röhre *aa* und einer anderen *ee*, welche sich innerhalb der ersten verschieben kann. Es ist leicht begreiflich, dass, wenn *ee* und *aa* die zwei Leiter eines Condensators bilden, die Capacität desselben größer oder kleiner wird, je nachdem *ee* mehr oder weniger sich innerhalb *aa* befindet. Die Röhre *bb* dient bloß als Stütze für die verschiebbare Röhre *ee* und trägt die Scala, an welcher man die Lage von *ee* ablesen kann. Diese Röhre ist in leitender Verbindung mit der Erde. Der in die Röhre *bb* hineinragende Theil von *ee* ist auf vier Metallfüßen innerhalb der erstgenannten Röhre beweglich.

Es entsteht nun die Frage, wie es denn möglich ist, die Änderung der Capacität des Schleifcondensators zu bestimmen, wenn er um einen Scalentheil, der etwa die Länge λ hätte, bewegt wird. Es kann diese Capacitätsvariation gerechnet werden, wenn die Halbmesser der zwei, den Schleifcondensator bildenden Cylinder bekannt sind. Ist nämlich R der Halbmesser des inneren Cylinders, R' der Halbmesser des äußeren Cylinders, ω die Capacitätsänderung, welche der Verrückung der inneren Röhre um einen Scalentheil entspricht, so hat man nach den Entwicklungen des §. 212.

$$\omega = \frac{\lambda}{2 \log \frac{R'}{R}}.$$

Die gesammte Capacität des Schleifcondensators konnte nicht genau gerechnet werden. Es konnte bestimmt werden, wie

viele Scalentheilstriche der Capacität des sphärischen Condensators entsprachen, d. h. wie weit der Schleifcondensator bewegt werden musste, um die Nadel auf Null zu bringen, wenn nach Herstellung des Gleichgewichtes die Capacität des Kugelcondensators plötzlich verdoppelt wurde. Nach dieser Bestimmung ist das Verhältnis der Capacität, ausgedrückt durch eine Scalenablesung, zu der Capacität, welche einer anderen Scalenablesung entspricht, bekannt.

Um die specifische Inductionscapacität eines Dielektrikums zu bestimmen, giengen Gibson und Barclay in folgender Weise vor: Der Schleifcondensator wurde bis zur Gleichheit mit dem fixen Condensator, dessen Capacität bekannt war, eingestellt; die Scalenangabe wurde abgelesen und angemerkt. Der Luftcondensator wurde sodann entfernt und ein anderer, dessen Dielektrikum zu untersuchen war, an seine Stelle gesetzt und der Schleifcondensator wieder bis zur Gleichheit mit demselben reguliert. Es ist einleuchtend, dass das Verhältnis der zwei Capacitäten des Schleifcondensators dasselbe ist, wie jenes der Capacität des Luftcondensators zu der Capacität des Condensators, der das bezügliche Dielektrikum enthielt. Daraus konnte das specifische Inductionsvermögen gerechnet werden, wobei man natürlich den Unterschied in der Gestalt und Größe des Luftcondensators und jenes, welcher die zu untersuchende dielektrische Substanz enthielt, in Rechnung zog.

Gibson und Barclay haben auf diese Weise insbesonders die Dielektricitätsconstante des Paraffins mit Sorgfalt untersucht. Sie wandten entweder Scheibencondensatoren oder Cylindercondensatoren (zwei concentrische Röhren, bei welchen der Zwischenraum mit Paraffin erfüllt war) an; im ersteren Falle ergab sich die specifische Inductionscapacität des Paraffins, das bei 11° C. die Dichte 0·908 hat, zu 1·975; im letzteren Falle erhält man für diese Größe den Wert 1·977.

528. Bestimmungen der Dielektricitätsconstante von Boltzmann. In den Jahren 1874 und 1875 wurde von Dr. L. Boltzmann eine Reihe von Untersuchungen der Dielektricitätsconstante nach voneinander verschiedenen Methoden vorgenommen und wir wenden uns der Erörterung dieser Methoden zu.

Es ist bereits in der „Theorie der Dielektrika" gezeigt worden, dass, wenn man mit m die Entfernung zweier einander parallel stehenden Platten eines Condensators, mit n die Dicke des zwischen dieselben gestellten dielektrischen Körpers, dessen specifisches Inductionsvermögen μ ist, bezeichnet, wenn man ferner die elektrischen Capacitäten des Condensators, je nachdem zwischen dessen Belegungen Luft oder das Dielektrikum sich befindet, C und C_1 nennt, für das Verhältnis der Capacitäten folgende Gleichung gilt:

$$R = \frac{C}{C_1} = \frac{m - n + \frac{n}{\mu}}{m},$$

woraus sich unmittelbar:

$$\mu = 1 + \frac{m}{n}(R - 1)$$

ergibt.

Auf diese Formel gründet sich nun eine Bestimmungsmethode(¹) der Dielektricitätsconstante verschiedener Medien, welche Boltzmann zur Anwendung brachte. Die Condensatoren bestanden aus zwei kreisförmigen parallel zueinander stehenden isolierten Metallplatten; die Entfernung der letzteren m konnte mit großer Genauigkeit bestimmt werden. Zwischen diese Platten konnten die Platten aus den dielektrischen Substanzen so gestellt werden, dass sie die Belegungen nicht berührten.

Für die Versuche wurde eine Batterie von 18 Daniell'schen Elementen und ein Thomson'sches Quadrantenelektrometer in Anwendung gebracht.

Die Vergleichung der Capacitäten von Condensatoren wurde in nachstehender Weise vorgenommen: Man verband zuerst direct die Batterie mit dem Elektrometer und notierte die Ablenkung, hierauf wurde eine Platte des Luftcondensators mit der Batterie verbunden, während die andere Platte des Condensators zur Erde abgeleitet war, sodann trennte man die geladene Condensatorplatte von der Batterie und brachte sie in leitende Verbindung mit dem Elektrometer. Die jetzige

(¹) Boltzmann, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 67, II., 1874.

Ablenkung war kleiner, als jene, welche sich zeigte, als die Batterie direct mit dem Elektrometer in Verbindung stand; aus der diesbezüglichen Differenz konnte man das Verhältnis der Capacität des Condensators zu jener des Elektrometers rechnen, und zwar in folgender leicht verständlicher Weise:

Nennen wir die Ablenkung der Elektrometernadel δ_e, wenn die Quadranten direct mit der Batterie verbunden sind, ferner die Ablenkung der Elektrometernadel, wenn die Quadranten mit der geladenen Condensatorplatte in Verbindung stehen, δ_c, seien ferner C_e und C_c die elektrischen Capacitäten des Elektrometers und Condensators, so ist, wenn V das Potential des Batteriepoles ist, δ_e jedenfalls diesem Potentiale proportional. Die Elektricitätsmenge, welche der Condensator bei der Verbindung mit diesem Pole erhält, ist jedenfalls

$$V \,.\, C_c$$

und es vertheilt sich diese Elektricitätsmenge, wenn man den Condensator mit dem Elektrometer verbindet, auf diese beiden Körper, so dass das nunmehr auf diesen herrschende Potential v gegeben ist durch:

$$v\,(C_c + C_e) = V \,.\, C_c,$$

woraus

$$v = \frac{C_c}{C_c + C_e}\, V$$

folgt; diesem Potentiale ist nun δ_c proportional und man hat demnach:

$$\frac{\delta_e}{\delta_c} = \frac{C_c + C_e}{C_c},$$

und sonach:

$$\frac{C_e}{C_c} = \frac{\delta_e}{\delta_c} - 1.$$

Das Verhältnis der Capacitäten von Elektrometer und Condensator ist also gleich dem Verhältnisse der Ablenkungen der Elektrometernadel weniger 1.

Die nun erwähnten drei Processe wurden mit einem zwischen die Platten eingeführten Dielektrikum wiederholt und es ergab sich daraus das Verhältnis der Capacität des Elek-

trometers zu jener des dielektrischen Condensators. Nennen wir die erstere C_c', die entsprechende Nadelablenkung δ_c', so ist dann analog der obigen Gleichung:

$$\frac{C_e}{C_c'} = \frac{\delta_e}{\delta_c'} - 1$$

und nun

$$\frac{C_c}{C_c'} = \left(\frac{\delta_e}{\delta_c'} - 1\right) : \left(\frac{\delta_e}{\delta_c} - 1\right) = \frac{m - n + \frac{n}{\mu}}{m},$$

aus welcher Gleichung der Wert der Dielektricitätsconstante μ folgt.

Noch einige Worte über das Arrangement der Versuche dürften hier am Platze sein: Der Draht A (Fig. 212) war mit dem einen Quadrantenpaare des Elektrometers verbunden, deren anderes Paar zur Erde abgeleitet war. Die Drähte I, II, III konnten mit A in Berührung gebracht werden; in der Figur ist diese Möglichkeit durch Spiralfedern angedeutet, in welche diese Drähte ausgehen. Zu Beginn des Versuches war I gesenkt, dadurch wurde das Elektrometer vollständig entladen; dann hob man I und senkte II; es erfolgte die Ablenkung der Elektrometernadel δ_e, da nun das Elektrometer durch die Batterie geladen war; die erwähnte Ablenkung wurde sorgfältig beobachtet und notiert. Im weiteren Verlaufe wurde II gehoben, I gesenkt und gehoben, um den Apparat für den zweiten Theil des Versuches geeignet zu machen. Nun wurde III gehoben, um den Condensator, zwischen dessen Belegungen noch kein festes Dielektrikum sich befand, zu laden, dann wurde eben derselbe Draht gesenkt, um den Condensator mit dem Elektrometer zu verbinden; die entstandene Nadelablenkung δ_c wurde notiert. Genau denselben Versuch führte man aus, nachdem die dielektrische Platte zwischen die Condensatorbelegungen eingeführt worden war; die nun hervorgerufene Ablenkung der Nadel δ_c' wurde wieder angemerkt.

Um sich zu vergewissern, dass keine störende elektrische Wirkung irgendeines Theiles des Apparates vorhanden war, wurde II mit der Erde verbunden und alle Bewegungen

wiederholt. Wurde hiebei keine Ablenkung erzeugt, so war damit nachgewiesen, dass keine zufällige Ladung vorhanden war. — Boltzmann hat überdies auch den Satz, dass die Capacität des Luftcondensators der Entfernung der Belegungen umgekehrt proportional ist und durch keine störende Ursache beeinflusst werde, sorgfältig experimentell geprüft. Der Condensator und das Elektrometer blieben genug lange in Contact, um die Ablenkung abzulesen; dann wurden beide durch Senken des Drahtes I entladen. Um die Versuche so schnell als möglich zu machen, wendete Boltzmann Federn an. — Um den Einfluss der Absorption zu studieren, wurden die Versuche zuerst so rasch als möglich gemacht, so dass die Contacte nur einen Bruchtheil einer Secunde dauerten, dann aber langsamer, so dass jede Operation bis 2 Minuten in Anspruch nahm; es zeigte sich aber keine Differenz in den erhaltenen Resultaten, wenn gute Isolatoren zur Anwendung kamen. — Der Condensator wurde auch längere Zeit geladen, dann augenblicklich entladen und mit dem Elektrometer verbunden, es zeigte sich aber keine Rückstandsbildung.

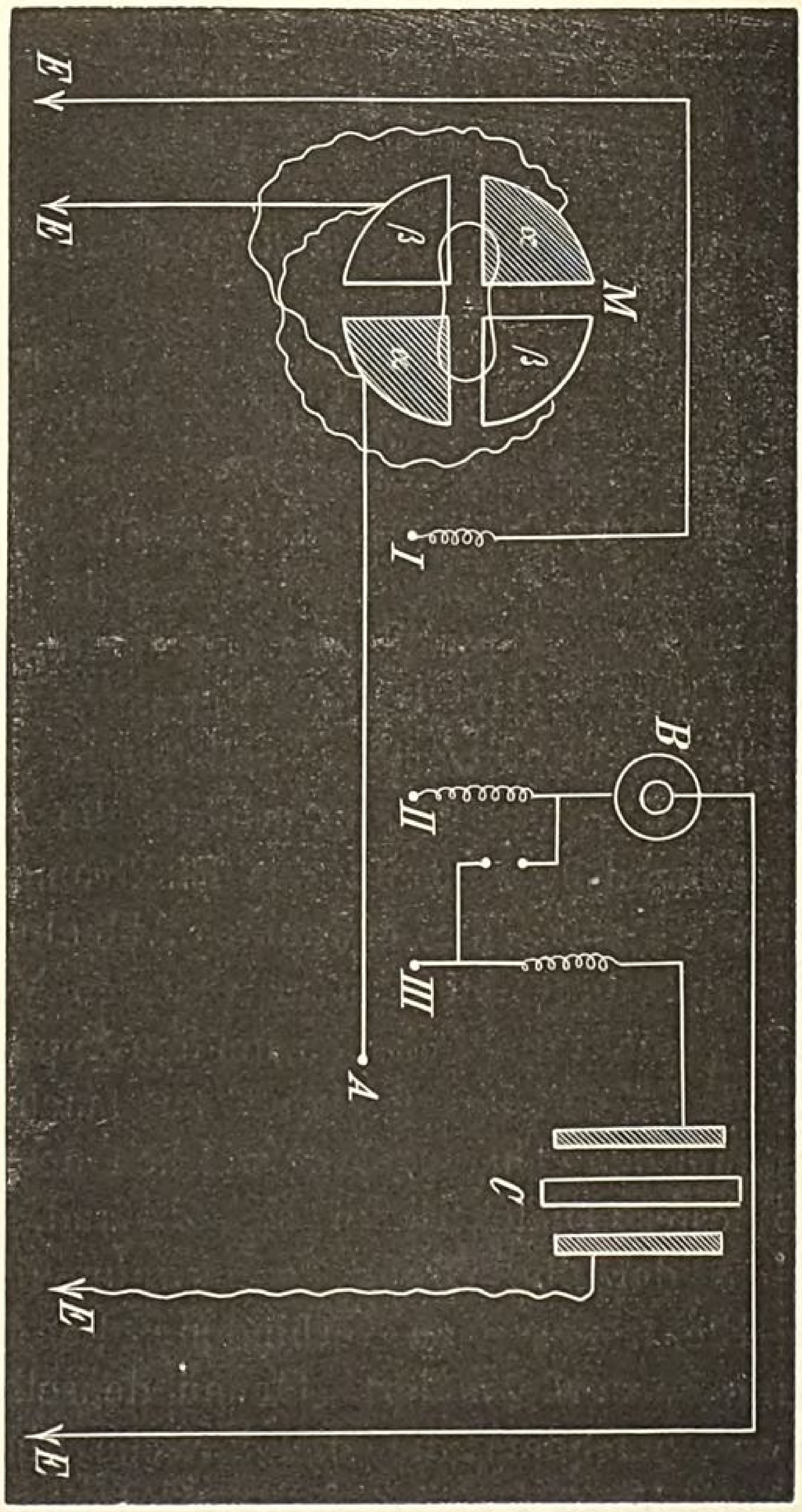


Fig. 212.

Boltzmann untersuchte drei Ebonitplatten, zwei Paraffin-,

drei Schwefel- und zwei Colophoniumplatten; die drei letztgenannten Plattengruppen wurden zwischen Glasplatten gegossen, welche mit Öl oder (wie beim Colophonium) mit Glycerin bestrichen waren. Die Dicke der Platten wurde mittelst eines am Condensator angebrachten Mikrometers bestimmt.

Es wurden im weiteren Verlaufe der Untersuchungen auch Quecksilbercondensatoren construiert, bei welchen die isolierende Platte auf Quecksilber gelegt wurde und andererseits mit Hilfe eines um sie herumgelegten, sie überragenden Papierstreifens mit Quecksilber bedeckt war. Die mit solchen Condensatoren erhaltenen Zahlen sind in guter Übereinstimmung mit anderen Resultaten. Die Dielektricitätsconstante der oben angeführten Substanzen ergab sich in folgenden Zahlen:

	μ
Ebonit	3·15
Paraffin	2·32
Schwefel	3·84
Colophonium	2·55.

Bei der Untersuchung der Dielektricitätsconstante einiger unvollkommenen Isolatoren, wie z. B. Glas, Guttapercha, Stearin u. a., zeigte sich der Einfluss der Intensität und Dauer der Ladung in so bedeutendem Maße, dass man keine übereinstimmenden Resultate erhalten konnte.

Wir wenden uns nun zur zweiten, principiell von der eben beschriebenen verschiedenen Methode, welche Professor Boltzmann in Anwendung brachte, um das specifische Inductionsvermögen einiger Körper zu bestimmen.

529. Boltzmann's zweite Methode.(1) Die zweite, von Boltzmann angewendete Methode beruht auf den früher ausgeführten theoretischen Entwicklungen, nach welchen, wenn wir die Anziehungen, welche eine Metall- und eine dielektrische Kugel von gleichem Radius von derselben Elektricitätsmenge erfahren, mit P und P' bezeichnen, das Verhältnis dieser Anziehungen ausgedrückt wird durch folgende Gleichung:

(1) „Experimentaluntersuchung über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper." Wiener Sitzungsberichte 68, II., pag. 81. Pogg. Ann. Bd. 151.

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mu + 2}{\mu - 1},$$

wenn μ die Dielektricitätsconstante der zweiten Kugel bedeutet.

Während die Intensität der Anziehung, welche eine an einem langen, feinen Faden aufgehängte unelektrisierte Metallkugel von einer fixen, elektrisierten Metallkugel erfährt, nur von der Größe der Kugeln, von ihrer gegenseitigen Entfernung und der Stärke ihrer Ladungen abhängt, wird eine Kugel aus irgendeinem Isolator (z. B. Schwefel), an die Stelle der Metallkugel gesetzt, eine Anziehung erfahren, welche nicht allein von der Entfernung und Größe der Kugeln und ihrer Elektricitätsmenge abhängt, sondern auch von dem specifischen Inductionsvermögen des betreffenden Dielektrikums.

Misst man die Anziehungen der Metallkugel und der dielektrischen Kugel oder bestimmt wenigstens deren Verhältnis, so kann man nach der obigen Gleichung μ die Dielektricitätsconstante der betreffenden Substanz rechnen.

Wir wollen zunächst die erste, leicht verständliche Methode, welche von Boltzmann angewendet wurde, aber zu nicht sehr genauen Resultaten führte, erörtern. Eine Metallkugel und eine Schwefelkugel, von denen jede einen Durchmesser von 7^{mm} hatte und die um 90^{mm} voneinander entfernt waren, wurden an Coconfäden von 2^{m} Länge aufgehängt. Eine elektrisierte Metallkugel von 26 Millimetern Durchmesser war genau in der Mitte zwischen Metall- und Schwefelkugel aufgestellt. Es wurden beide Kugeln, welche aufgehängt waren, durch Influenzwirkung von Seite der zwischengestellten Kugel elektrisch und mit Kräften angezogen, welche von der Intensität der Fernwirkung abhängen. Zur Messung der Ablenkung war hinter den Fäden eine Scala aufgestellt; die Stellungen der Fäden wurden mittelst zweier Mikroskope betrachtet. Die Fäden, an welchen die kleine Metallkugel und Schwefelkugel hieng, geriethen bei Annäherung der elektrisierten Kugel in Schwingungen, deren Grenzen beobachtet wurden; das Mittel aus den letzteren wurde als Ablenkungsstellung angenommen. Wegen der Kleinheit der Ablenkungen konnte man die Anziehungen proportional der Anzahl der Theilstriche nehmen,

über welche die Drähte giengen. Es erwies sich das obige Verhältnis $\frac{P}{P'}$ immer größer als 1.

Um die Gewichte und Volumina der beiden Kugeln genau gleich zu machen, wurden beide aus dem zu untersuchenden Dielektrikum verfertigt, aber die eine von ihnen, welche die Rolle der Metallkugel hatte, war entweder vergoldet oder mit Stanniol überklebt.

Bei den diesbezüglichen Versuchen mit einer Schwefel- und einer ebenso großen und schweren Metallkugel erhielt Boltzmann

$$\frac{P}{P'} = 1{\cdot}90,$$

und daraus ergibt sich unter Zuhilfenahme der Formel:

$$\frac{\mu + 2}{\mu - 1} = 1{\cdot}90,$$

$$\mu = 4{\cdot}3,$$

also eine Zahl, welche beträchtlich größer als jene ist, die nach der ersten Methode erschlossen wurde.

Was das Formen der Kugeln betrifft, so sei Folgendes bemerkt: Die Kugeln von Schwefel und anderen schmelzbaren Substanzen wurden auf die sorgfältigste Weise in einem Kugelgießer gegossen; die Wandungen des letzteren wurden, damit die Kugeln nicht hängen blieben, mit etwas Öl oder — wenn man Harzkugeln goss — mit destilliertem Wasser befeuchtet, welches man dann nicht abwischte, sondern verdunsten ließ. Die Schwefelkugeln wurden vor ihrem Gebrauche sorgfältig geglättet und um jede Spur der dadurch entstandenen Elektricität wegzuschaffen, durch die Flamme einer Spirituslampe gezogen. Von jeder Substanz wurden zwei Kugeln ausgewählt, die gleiches Gewicht hatten, und die eine von ihnen wurde mit Goldblatt überzogen.

Die Versuche wurden mit der abwechselnd positiv und negativ geladenen Anziehungskugel wiederholt.

Das Hauptgebrechen der eben beschriebenen Methode ist das, dass es außerordentlich schwierig ist, die Anziehungskugel genau in der Mitte zwischen der Metall- und dielektri-

schen Kugel aufzustellen. Die aufgehängten Kugeln waren zu leicht beweglich und es hatten auf sie geringe Luftströmungen großen Einfluss.

Boltzmann hat aus diesen Gründen seine Methode in folgender Weise modificiert: Die dielektrische Kugel L (Fig. 213) wurde an einem gebogenen Schellackfaden an einem horizontalen Arme GH aufgehängt, der ungefähr die Länge von 10^{cm} hatte; dieser war an dem einen Ende F einer

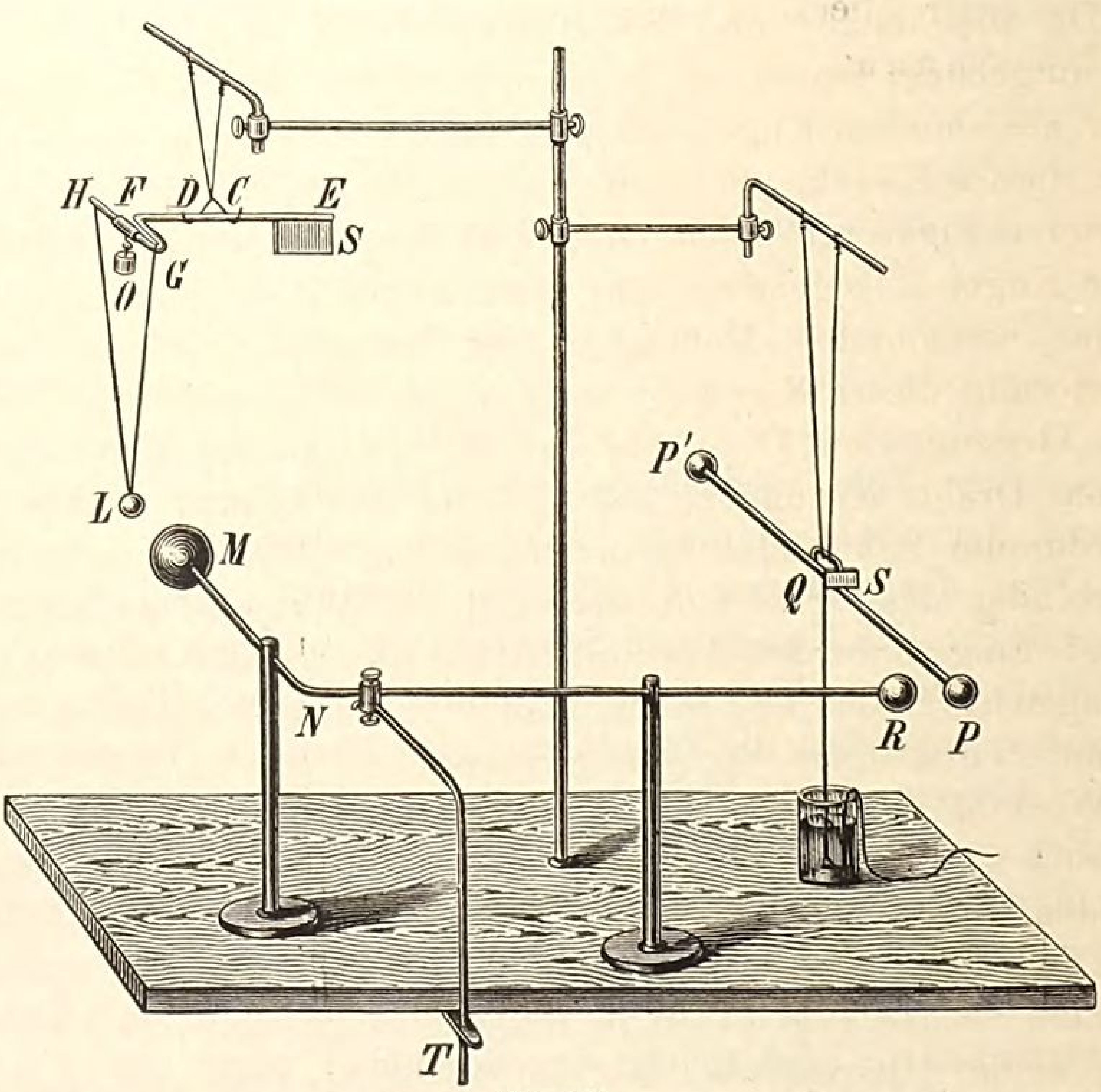


Fig. 213.

Torsionswage angebracht, welche ihrerseits an einem U-förmig gestalteten Coconfaden aufgehängt war; am anderen Ende der Torsionswage befand sich ein Spiegel S, dessen Stellung in bekannter Weise mittelst eines Fernrohres und einer Scala bestimmt werden konnte. Zur Äquilibrierung war in O ein Gegengewicht angebracht. Um den Arm vor der Wirkung elektrisierter Körper zu schützen, wird derselbe in ein drei-

seitiges, leitendes Gefäß von Goldpapier, welches mit der Erde in leitender Verbindung steht, eingeschlossen. Aus diesem Gefäße ragen nur die Cocon- und Schellackfäden heraus. An einen auf Schellackfüßen ruhenden Draht N war eine Metallkugel befestigt, welche der Kugel L genau gegenüberstand. Dieser Draht N gieng in eine zweite Kugel R aus; andererseits zweigte sich seitlich ein Draht ab, der mit der inneren Belegung einer außen abgeleiteten Leydnerflasche in leitende Verbindung gebracht werden konnte.

Da die Metall- und Schwefelkugeln nicht gleichzeitig in L aufgehängt waren, so ist es nothwendig, dass das Potential der anziehenden Kugel während der Versuche constant bleibt. Zu diesem Zwecke dient ein eigenes Elektrometer, welches in unserer Figur rechts dargestellt ist. Es befindet sich nämlich der Kugel R gegenüber eine Metallkugel P, welche am Ende eines horizontalen Metallstäbchens befestigt ist; zur Äquilibrierung dieser Kugel ist am anderen Ende des Metallstabes ein Gegengewicht P′ angebracht. PP′ ist mit der Erde durch einen Draht verbunden, der in eine Platinplatte, welche in verdünnter Schwefelsäure taucht, endigt. Ein anderer Draht verbindet das Gefäß mit der nächsten Wasserleitungs- oder Gasleitungsröhre. Die Platinplatte hat den Zweck, die Schwingungen des Stabes PP′ zu dämpfen. Die Ablenkung des letzteren konnte mittelst des Spiegels S angegeben werden.

Wird die Kugel M und die Kugel R elektrisiert, so wird sowohl L als auch P durch Influenz elektrisiert und diese beiden Kugeln werden angezogen; man kann ihre Abweichung aus der Ruhelage beobachten.

Zum Schutze gegen Luftströmungen umgibt man den Apparat mit einem Glasgehäuse, der an der Seite Spiegelglasplatten hat, um die Ablenkungen der Spiegel beobachten zu können.

Es sei bemerkt, dass man es nicht absolut nothwendig hat, in den beiden Versuchen, welche sich auf die Anziehung der Schwefel- und der Metallkugel beziehen, die Kugel M auf constantes Potential zu bringen, da man aus der Ablenkung von P kleine Differenzen der Potentiale in den verschiedenen Versuchen rechnen kann.

Zuerst machte Boltzmann den Anziehungsversuch mit der

Schwefelkugel, dann mit der Metallkugel und zuletzt wieder mit der Schwefelkugel.

Zur Regulierung der Elektricitätsmenge wurde folgendes Arrangement angewendet (Fig. 214): Die früher erwähnte Leydnerflasche, welche mit dem Leitersysteme MR verbunden war, stand in Verbindung mit der Kugel U eines Funken-

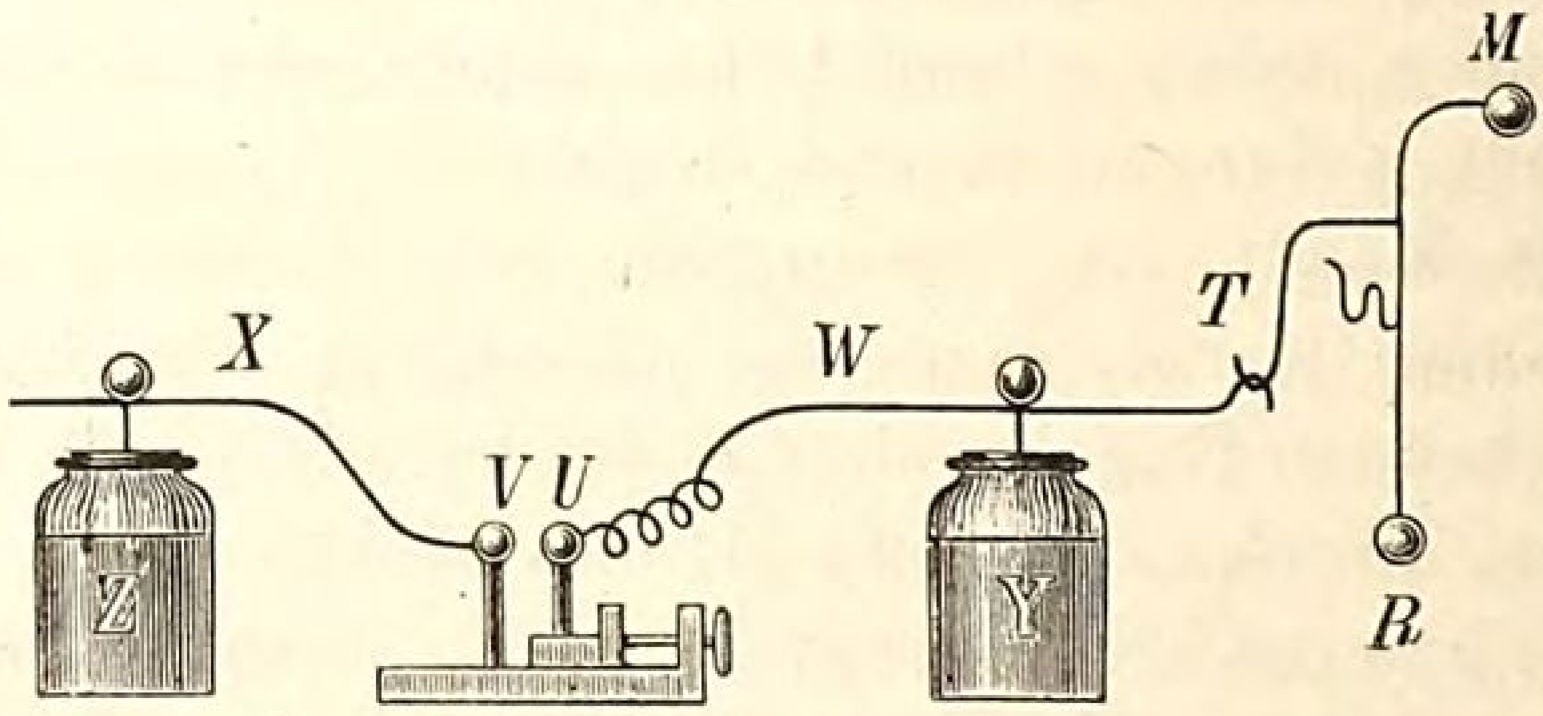


Fig. 214.

mikrometers, dessen Kugeln mittelst einer Mikrometerschraube in beliebige Distanzen gebracht werden konnten. Mit der zweiten Kugel des Funkenmikrometers ist eine Leydnerflasche Z verbunden, deren äußere Belegung ebenfalls zur Erde abgeleitet ist. Es war diese Kugel mittelst eines Schlüssels auch mit der positiven oder negativen Elektrode einer Influenzmaschine verbunden. Das Potential, auf welches die Kugeln M und R geladen sind, ist der im Funkenmikrometer auftretenden Funkenzahl proportional. Ändert man die Entfernung der beiden Kugeln des Funkenmikrometers, so lässt sich dadurch die Ladung des Leitersystemes MNR regulieren.

Boltzmann hat auch die Wirkungen von sehr kurz andauernden Ladungen studiert. Er wendete dabei folgende Versuchsanordnung an: Der von der inneren Belegung der Leydnerflasche Y (Fig. 215) zum Funkenmikrometer übergehende Draht war an zwei Stellen abgebrochen und die freien Enden dieses

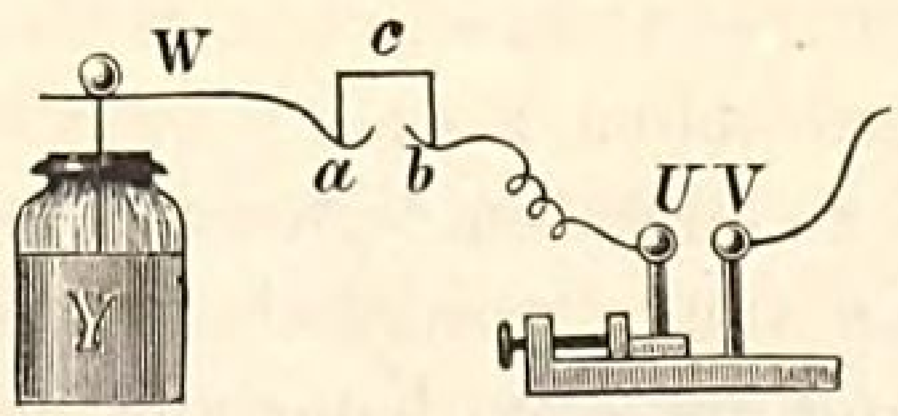


Fig. 215.

Drahtes wurden in Quecksilbernäpfchen gebracht, die mittelst eines Drahtbügels *c* verbunden werden konnten; der letztere war an dem Pendel eines Metronoms befestigt, und es konnte

auf diese Weise der Contact alternierend in kurzen Intervallen hergestellt und wieder unterbrochen werden.

Man verband zunächst *a* und *b* und es wurde das Leitersystem MNR durch einen zwischen U und V übergehenden Funken geladen; dann wurde die leitende Verbindung zwischen *a* und *b* aufgehoben und die Funkenmikrometerkugel U zur Erde abgeleitet. Sodann wurde abermals der Contact der Quecksilbernäpfchen *a* und *b* hergestellt und es konnte nun der ganze Apparat entladen werden. Diese Operationen wurden in einer Zeit vollzogen, die kleiner als $^1/_{10}$ einer Secunde war.

Es wurden, wie wir später bei Angabe der Versuchsresultate noch besprechen werden, auch Versuche angestellt, in welchen die Kugeln M und R schnell abwechselnd mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen wurden. Zu diesem Zwecke leitete Boltzmann einen Draht *g* (Fig. 216)

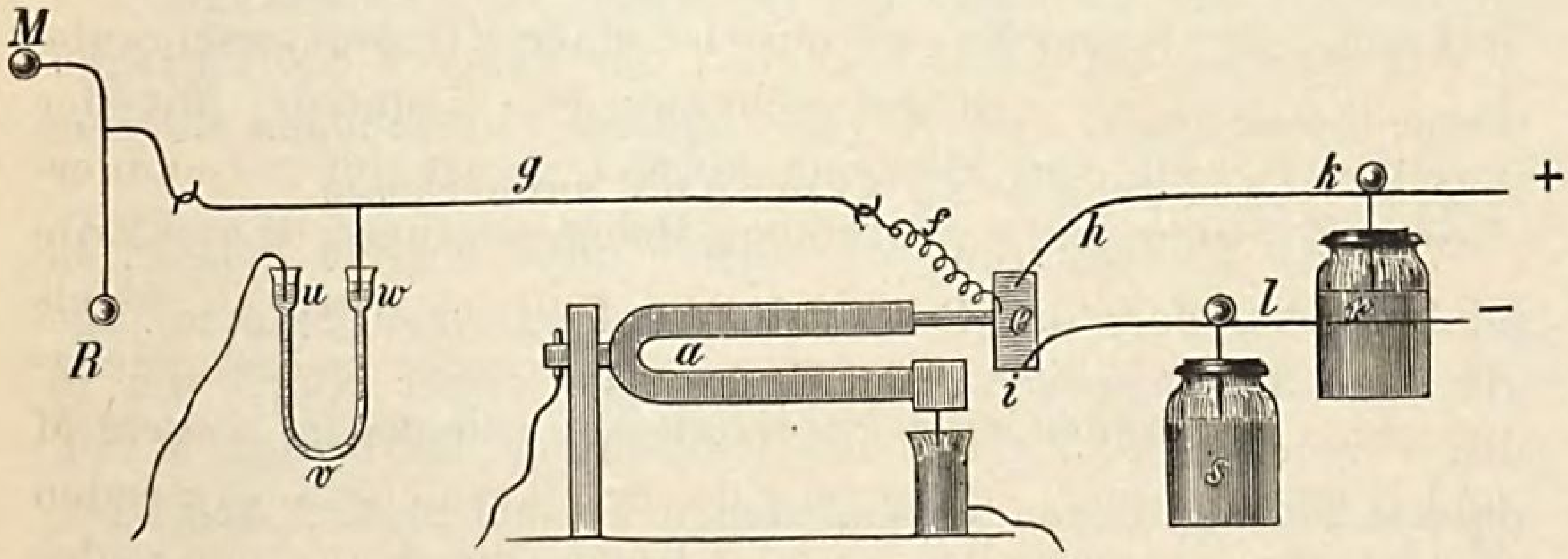


Fig. 216.

zu einer großen Stimmgabel, welche 180 Schwingungen in der Secunde ausführte. Die an der Stimmgabel isoliert befestigte Kupferplatte *e* berührte abwechselnd zwei Drähte, die mit den Elektroden einer Holtz'schen Influenzmaschine in Verbindung waren. Die beiden Leydnerflaschen *r* und *s* dienten dazu, die Ladung ziemlich constant zu erhalten. Die Stimmgabel wurde auf elektromagnetischem Wege erregt.

Um einer allzu großen Ansammlung der einen oder anderen Elektricität vorzubeugen, war der Draht, welcher die Kupferplatte *e* mit dem Leitersystem MNR verband, mit der Erde in leitender Verbindung durch eine lange und sehr dünne Glasröhre *uvw*, welche mit destilliertem Wasser erfüllt war;

eine vollständige Entladung wurde dadurch vermieden, eine übermäßige Ladung verhindert.

Nachdem wir die in den Boltzmann'schen Versuchen gebrauchten Apparate beschrieben haben, wenden wir uns zur Erläuterung einiger bei den Experimenten bemerkenswerten Umstände und zur Angabe der Resultate.

530. Boltzmann fand, dass eine langsame Leitung, welche durch die Seidenfäden, an welchen die Metallstäbe befestigt waren, Fehler in die Versuche brachte und es wurden aus diesem Grunde Schellackfäden benützt, welche sich vollständig bewährten.

Die Thatsache, dass die Metall- und Schwefelkugeln bei ihrer Anziehung durch die feststehende Metallkugel in verschiedene Lagen von der letzteren gelangten, wurde in Rechnung gezogen.

Eine Correction wurde auch gemacht wegen der kleinen Differenzen der Volumina der Schwefel- und Metallkugel.

Wir machen den Leser bezüglich der näheren Erörterungen dieser Correctionen und Angabe anderer Correctionen auf eine spätere Abhandlung[1]) Boltzmann's aufmerksam.

Was die Elektrisierung der anziehenden Kugeln betrifft, so sei bemerkt, dass das Potential derselben einer Funkenlänge von 1^{mm}—3^{mm} entsprach. Der Halbmesser dieser Kugel war in den Versuchen $20{\cdot}5^{mm}$ und die Entfernung der beiden Mittelpunkte betrug in den verschiedenen Versuchen 49^{mm} und 62^{mm}. Da sich das Potential umgekehrt mit der Entfernung ändert, so war das Potential der äquipotentialen Fläche, welche durch den Mittelpunkt der angezogenen Kugel gieng, $\frac{41}{98}$ respective $\frac{41}{124}$ oder $\frac{2}{5}$, respective $\frac{1}{3}$ des Potentiales der anziehenden Kugel.

Nach Untersuchungen von De la Rue ist das Potential, welches einen Funken von 1^{mm} hervorrufen wird, jenes von ungefähr 2000 Silberchloridelementen und jenes, welches einen Funken von 3^{mm} geben wird, entspricht der elektromotorischen Kraft von 3450 solchen Elementen. Die Potentiale, auf welche die aufgehängten Kugeln elektrisiert wurden, entsprechen

(1) Wiener Sitzungsberichte, Bd. 70, II., 1874.

somit 600, respective 800 Chlorsilberelementen mit dem kurzen Funken und 1100, respective 1400 mit dem 3^{mm} langen Funken.

Aus den Versuchen geht hervor, dass innerhalb dieser Grenzen keine beträchtliche Differenz der specifischen Inductionscapacität eintrat.

Die Zeitdauer der Elektrisierung zeigte sich in den Versuchen von Boltzmann bei einigen Substanzen von bedeutendem Einflusse auf die Anziehung. Wenn z. B. eine Paraffin- oder Harzkugel längere Zeit geladen wurde, nahm die Attraction zu. Diese Erscheinung, welche mit der von Faraday bezeichneten „elektrischen Absorption“ zusammenhängt, nennt Boltzmann das Phänomen der „dielektrischen Nachwirkung.“ Es ist bereits in der Theorie der dielektrischen Körper angegeben worden, wie man diese Erscheinung erklären könnte. Eine Paraffinkugel, welche fünf bis zehn Minuten hindurch geladen wurde, erfuhr eine ebenso starke Anziehung wie eine Metallkugel, während die Attraction einer Schwefelkugel durchaus keine Zunahme zeigte.

In der folgenden Tabelle sind die aus den Versuchen gerechneten Resultate zusammengestellt, wobei die Ladungsdauer $\frac{1''}{360}-\frac{1''}{64}$ war; es konnten somit die Erscheinungen der elektrischen Absorption außeracht gelassen werden.

Dielektrische Substanzen	Specifisches Inductionsvermögen	
	aus Attractions-versuchen	aus Condensator-versuchen
Schwefel . . .	3·90	3·84
Ebonit. . . .	3·48	3·15
Paraffin . .	2·32	2·32
Colophonium . . .	2·48	2·55

Die nachstehenden Tafeln geben das Verhältnis der Anziehungen der dielektrischen und Metallkugel $\frac{P}{P'}$ durch dieselbe Metallkugel an, wobei die Ladungsdauer variierte:

Dielektrika	Verhältnis der Anziehungen $\frac{P}{P'}$ bei der Ladungsdauer von					
	$^1/_{360}$''—$^1/_{64}$''	0·9''	1·8''	$22^1/_2$''	45''	90''
Schwefel	2·033	—	2·125	—	2·110	—
Ebonit . . .	2·211	—	2·064	—	2·094	—
Paraffin	3·269	2·980	2·920	—	1·420	—
Colophonium . .	3·025	2·140	1·927	1·730	1·700	1·650

Rechnet man nun nach der Formel:

$$\frac{P}{P'}=\frac{\mu+2}{\mu-1}$$

die Dielektricitätsconstante der verschiedenen Substanzen, so erhält man die folgende Tafel:

Dielektrika	Dielektricitätsconstante entsprechend der Ladungsdauer					
	$^1/_{360}$—$^1/_{64}$''	0·9''	1·8''	22·5''	45''	90''
Schwefel . .	3·90	—	3·66	—	3·70	—
Ebonit	3·48	—	3·82	—	3·74	—
Paraffin . . .	2·32	2·51	2·56	—	8·12	—
Colophonium . .	2·48	3·63	4·23	5·11	5·28	5·61

Die Ladung der dielektrischen Kugeln durch Influenz wächst somit mit der Zeit und demzufolge auch augenscheinlich die Dielektricitätsconstante. Das tritt insbesonders auffallend bei Paraffin und Colophonium hervor. Nur der Schwefel scheint nach der letzten Tabelle sich irregulär zu verhalten. Es ist äußerst wahrscheinlich, dass diese Irregularitäten ihren Grund in Beobachtungsfehlern haben, insoferne als die Schwefelkugel krystallinisch war und ihre Axen in den einzelnen Versuchen nicht immer gleichgerichtet waren. Ebonit besitzt nach den

obigen Versuchen eine Dielektricitätsconstante, welche bis zu einem gewissen Maximum ersichtlich zunimmt und dann constant bleibt. Paraffin besitzt anfänglich eine stetig größer werdende specifische Inductionscapacität und zwar bis zur Ladungsdauer von 1·8″, von da an wird diese Capacität sehr groß und erreicht bei 45″ bereits den oben angegebenen Wert 8·12. Am stetigsten und regulärsten ist der Verlauf der Dielektricitätsconstante des Colophoniums und zwar bis zu den längstandauernden Ladungen, die in den Versuchen angewendet wurden.

Es ist soeben erwähnt worden, dass die scheinbare Irregularität in dem Gange der Dielektricitätsconstante des Schwefels dem Umstande zugeschrieben werden kann, dass die Schwefelkugel in den aufeinanderfolgenden Versuchen nicht immer dieselbe Lage gegen die anziehende Kugel einnahm.

Boltzmann hat dieses Verhalten des Schwefels einer sorgfältigen Untersuchung(¹) unterzogen und ist dabei zu bemerkenswerten Resultaten gelangt. Er hängte Kugeln aus krystallinischem Schwefel so auf, dass die drei Hauptelasticitätsaxen, also jene drei Hauptrichtungen, längs welcher die Elasticitäten verschieden sind, verschiedene Winkel mit den Kraftlinien des elektrischen Feldes, in welchem die Kugel aufgehängt war, bildeten; die Anziehung, welche diese Kugel von der Metallkugel erfuhr, wurde nach der früher beschriebenen Methode gemessen. So fand Boltzmann, dass die specifische Inductionscapacität eines Krystalles in den verschiedenen Richtungen einen verschiedenen Wert hat. Bezeichnet man die specifischen Inductionscapacitäten des Schwefels in den drei Hauptaxen μ_g, μ_m, μ_k, so erhält Boltzmann:

$$\mu_g = 4{\cdot}773$$
$$\mu_m = 3{\cdot}970$$
$$\mu_k = 3{\cdot}811$$

Boltzmann suchte im weiteren Verlaufe seiner Untersuchungen zu erforschen, ob die Ergebnisse seiner Versuche als eine Befestigung jener Theorie betrachtet werden können,

(¹) Wiener Sitzungsberichte, Bd. 70, II., pg. 342 (1874).

durch welche Maxwell(1) zu zeigen glaubte, dass die Dielektricitätsconstante μ eines Körpers dem Quadrate des Brechungsindex n gleich ist.

Die folgende Tabelle zeigt wenigstens an, dass die beiden Größen als in demselben Sinne variierend betrachtet werden können.

Schwefel	$n = 2{\cdot}040$	$\sqrt{\mu} = 1{\cdot}960$
Colophonium . . .	„ „ 1·543	„ „ 1·587
Paraffin	„ „ 1·536 bis 1·516. .	„ „ 1·523
Ebonit		1·775

Es wurden ferner nach der Beziehung:

$$\sqrt{\mu} = n$$

aus optischen Messungen die Dielektricitätsconstanten der Schwefelkugel für die drei Hauptachsen der Elasticität gerechnet und folgende Werte für dieselben gefunden:

$$\mu_g = 4{\cdot}596$$
$$\mu_m = 3{\cdot}886$$
$$\mu_k = 3{\cdot}591.$$

Man erkennt, dass die Differenzen der gerechneten und beobachteten Werte nicht erheblich sind.

531. Versuche von Romich und Fajdiga. (2) Unter Leitung Boltzmanns suchten die zwei erwähnten Schüler desselben nachzuweisen, ob die beobachteten Attractionsunterschiede von den dielektrischen Eigenschaften der ganzen Kugel oder bloß von der Beschaffenheit ihrer Oberfläche abhängen. Würde das erstere der Fall sein, so würde eine mit einer dünnen Schichte von Paraffin überzogene Schwefelkugel wie eine Kugel ganz aus Schwefel wirken; würde der Überzug dicker sein, so würde dann die Schwefelkugel wie eine Paraffinkugel wirken.

Die in der folgenden Tafel zusammengestellten Versuche zeigen, dass die Anziehung der Kugel durch die ganze Substanz derselben und nicht durch ihre Oberfläche bestimmt ist(3); davon macht allerdings die mit Colophonium über-

(1) Phil. transact. vol. 155, part. I., pag. 459.

(2) Wiener Sitzungsberichte, Bd. 70, pag. 367.

(3) Dies deuten auch bereits frühere Versuche von Felici an (man sehe Nuovo Cimento 5 und 6, 1871).

zogene Schwefelkugel eine Ausnahme; doch geben Romich und Fajdiga an, dass die Colophoniumschichte so dick war, dass sie einen beträchtlichen Theil der Masse der Kugel ausmachte:

Natur der dielektrischen Kugel		Verhältnis der Anziehungen $\frac{P}{P_1}$	
Schwefelkugel	Nicht überzogen	2·05, 2·07	2·06
	Mit Paraffin	2·01, 2·12	2·06
	Mit Harz		2·51
	Lackiert mit Schellackfirniss		2·01
Paraffinkugel	Nicht überkleidet		3·320
	Lackiert		3·314

532. Versuche von Romich und Nowak über die elektrische Absorption in den verschiedenen Substanzen. (¹) Wir haben bereits früher der Versuche Boltzmanns gedacht, welche zeigen, dass die influencierte Ladung der dielektrischen Kugeln mit der Zeit zunimmt.

Diese Zunahme zeigt sich auch bei den Versuchen von Romich und Nowak, welche ebenfalls unter Leitung von Boltzmann angestellt wurden. Sie machten zwei Gruppen von Messungen; in der einen wurde die Ladung der anziehenden Kugel in der Minute 64mal umgekehrt, in der zweiten wurde die anziehende Kugel permanent geladen.

Die Versuche, welche wir in der nachfolgenden Tabelle zusammenstellen, lehren, dass bei unvollkommenen Isolatoren die specifische Inductionscapacität ins Unbegrenzte wächst, wenn die Ladung andauert. Es kann überhaupt nicht angegeben werden, welche Ladungsdauer genügend kurz ist, um die wahre augenblickliche specifische Inductionscapacität zu erhalten.

Bei vollkommenen Isolatoren scheint die specifische Inductionscapacität eine ziemlich constante Größe zu sein.

(¹) Wiener Sitzungsberichte, Bd. 70, II., pag. 380.

Es sei zum Verständnisse der nachfolgenden Tabelle bemerkt, dass dort, wo die specifische Inductionscapacität unendlich groß bezeichnet ist, ausgedrückt werden soll, dass die Anziehungen der Metall- und der dielektrischen Kugel fast gleich groß waren.

Dielektrika	Specifisches Inductionsvermögen	
	bestimmt durch abwechselnde Ladungen	bestimmt bei permanenter Ladung
Glas	7·5	159
Flußspath	6·7	7.1
	7·2	9·9
	6·7	7·9
Quarz	4·6	∞
	4·6	1000
Kalkspath, senkrecht zur opt. Axe	7·7	9·9
Kalkspath, parallel zur opt. Axe	7·5	8·5
Kalkspath, andere Kugel	8·4	8·6
Selen, 24 Stunden nach dem Formen	10·2	151
Selen, später	∞	35
	∞	201
	59	49
Andere Kugel von Selen:		
24 Stunden nach dem Formen	8·4	56
später	116	126
Schwefel mit Graphit[1]	4·0	4·4

533. Bestimmung der Dielektricitätsconstante nach den Methoden von A. Wüllner. Einige Jahre später als Boltzmann hat Wüllner[2] die Untersuchung der Dielektricitätsconstanten einiger Körper wieder aufgenommen, wobei er sich im wesentlichen zweier Methoden bediente.

Bei der ersten bestand der Condensator aus zwei Metallplatten, von denen die untere in leitender Verbindung mit der Erde war, während die obere Platte mittelst eines Fadens, der über eine Rolle gieng, in horizontaler Lage aufgehängt war und der unteren Platte nach Belieben genähert oder von

[1] Schwefel-Graphitkugel wurde erzeugt, indem man in geschmolzenen Schwefel Graphitpulver brachte.

[2] Sitzungsbericht der königl. bairischen Akeadmie 1877.

ihr entfernt werden konnte; die Distanz der Condensatorplatten konnte mittelst eines Mikroskopes genau bestimmt werden. Ladet man den Condensator zuerst mit der dielektrischen Platte, welche auf der unteren Condensatorplatte lag, dann ohne dieselbe und beobachtet in beiden Fällen die Potentiale V_1 und V_2, so sind die Capacitäten des Condensators in den beiden Fällen C_1 und C_2 bestimmt durch:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1} = \mu$$

und es ist nach dieser Gleichung die Dielektricitätsconstante bestimmt. Bei diesen Versuchen nahm Wüllner auch Rücksicht auf den Elektricitätsverlust.

Da die eben beschriebene Methode zu ungenauen Resultaten führte, so benützte Wüllner eine zweite Methode, bei welcher er denselben Condensator gebrauchte. Zur Ladung desselben, wandte er den Pol einer Batterie von 12 Elementen (Meidinger) an, deren anderer Pol mit der Erde in Verbindung stand; so konnte er das Potential constant erhalten. Der Condensator wurde mit der Batterie geladen und die Ladung mittelst des von Prof. Kohlrausch construierten Torsionselektrometers gemessen; es wurde dieselbe ausgedrückt durch die Anzahl Torsionsgrade, welche erforderlich waren, um die abgelenkte Nadel bis zu einer constanten Nulllage zu bringen. Zuerst wurde zwischen die beiden Condensatorplatten kein Dielektrikum gegeben, die obere Platte durch die Batterie geladen und der Ausschlag der Nadel des Elektrometers, welches mit dieser Platte in Verbindung stand, gemessen; dann wurde die Verbindung der oberen Platte mit der Batterie aufgehoben, die Platte gehoben und wieder die Nadelablenkung gemessen. Genau dieselben Versuche führte man in denselben Plattenentfernungen aus, nachdem man eine dielektrische Substanz zwischen die Condensatorplatten gebracht hatte. Man nahm im ersten Falle keine Variation der Ladung mit der Zeit wahr, wohl aber im letzteren Falle. Wüllner erhält aus seinen Versuchen folgende Werte der Dielektricitätsconstante:

Paraffin		$\mu = 1{\cdot}96$
Ebonit		„ „ 2·56
Schwefel		„ „ 2·88—3·21
Schellack { I.		„ „ 3·73
Schellack { II.		„ „ 2·95
Glas		„ „ 6·10

Über diesen Gegenstand gelangte Wüllner zu folgenden Schlüssen:

(1.) Die Dicke des Dielektrikums nimmt keinen Einfluss auf das specifische Inductionsvermögen desselben.

(2.) Die Dielektricitätsconstante wächst bei fortgesetzter Elektrisierung zuerst schnell, dann langsamer und nähert sich dann einem fixen Maximalwerte.

(3.) Die specifische Inductionscapacität, welche in einer gegebenen Zeit erreicht wird, nimmt zu bei häufiger Wiederholung der Versuche mit derselben Platte, also durch längere Ladung. Durch häufigere Ladung wird ein Zuwachs der Capacität im Schwefel hervorgerufen, welcher eine sehr lange Zeit bleibt.

(4.) Die Veränderung ist keine permanente, sondern verschwindet mit der Zeit.

(5.) Die augenblickliche Capacität oder jenes specifische Inductionsvermögen, welches erreicht wird, wenn die Ladung nur einen sehr kleinen Bruchtheil einer Secunde dauert, ist von jener Capacität verschieden, welche langsam wächst, wenn die Elektrisierung fortgesetzt wird. Die augenblickliche Capacität ist unabhängig von der Leitungsfähigkeit, die Capacität bei längerer Ladungsdauer aber nicht mehr.

Es ist darnach klar, dass jene Resultate, welche von verschiedenen Beobachtern erhalten wurden, so ungleich ausfielen; die Ladungsdauer war nämlich in den verschiedenen Versuchen nicht dieselbe. Eine Stütze dieser Ansicht mag wohl in dem Umstande enthalten sein, dass die Resultate verschiedener Experimentatoren für gute Isolatoren sich in besserer Übereinstimmung befinden, als für schlechte; in einem ausgezeichneten Isolator wird die specifische Inductionscapacität bei verschiedener Ladungsdauer begreiflicherweise nur äußerst wenig variieren.

534. Versuchsmethode von Hopkinson (¹) zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante von Flintglas. Hopkinson wendete den von Gibson und Barclay construierten, früher beschriebenen Schleifcondensator, ein Thomson'sches Elektrometer (construiert von White in Glasgow), eine Batterie von 42 Daniell'schen Elementen, deren Mitte zur Erde abgeleitet war, wodurch es möglich ist, eine vollkommene elektrische Symmetrie, d. h. gleichzeitig gleiche und entgegengesetzte Potentiale zu erhalten, endlich den Schutzringcondensator an. Bezüglich des letzteren dürften einige Bemerkungen hier am Platze sein.

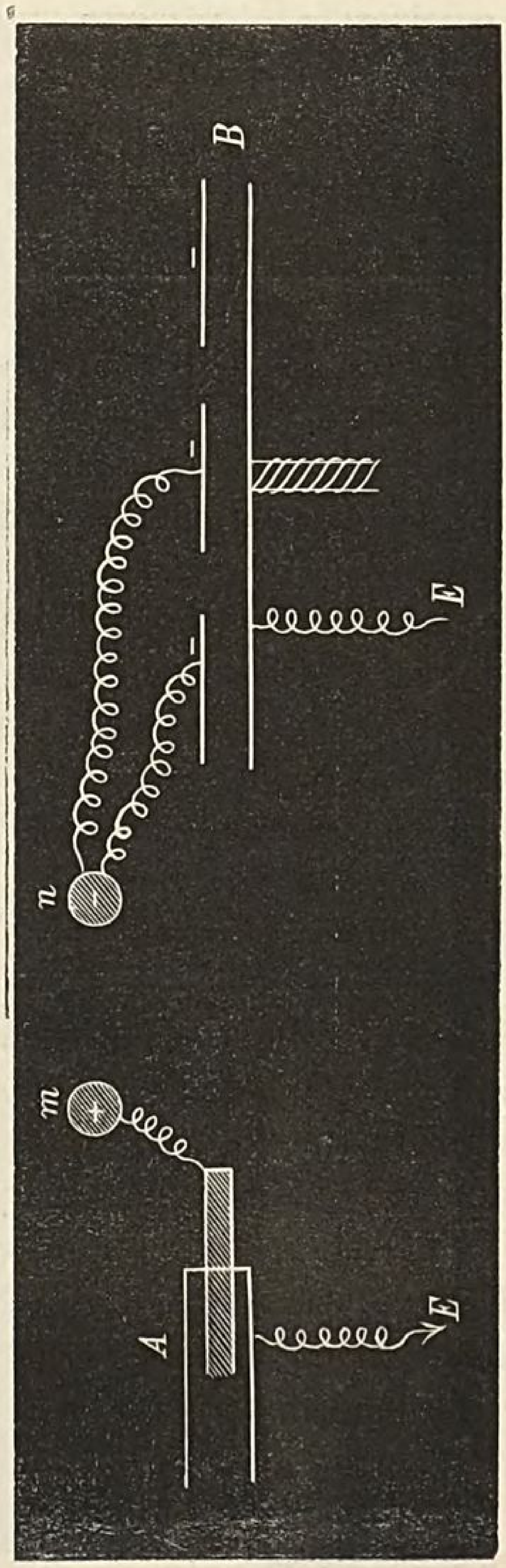


Fig. 217.

Der Schutzringcondensator besteht aus einer fixen gut isolierten Messingscheibe, welche von einem ebenen Ringe umgeben ist. Ring und centrale Scheibe bilden zusammen eine Kreisscheibe mit einem ringförmigen Raume von 1*mm* Dicke um die Scheibe. Unter der letzteren befindet sich eine andere Scheibe, welche mittelst einer Mikrometerschraube gegen den Schutzring bewegt oder von demselben entfernt werden kann. Der Gebrauch des Schutzringes erleichtert, wie bereits an anderer Stelle auseinandergesetzt wurde, wesentlich die Rechnungen, da die Vertheilung der Elektricität in der Nähe der Ränder der Scheiben complicirt, nahe dem Centrum aber gleichförmig ist. Zunächst ver-

(¹) Hopkinson „on the electrostatic capacity of glass," Phil. Trans. 1878.

band man das Elektrometer leitend mit der Erde, der positive Pol der Batterie (zuweilen wurden auch Chlorsilberbatterien von 1000 und mehr Elementen angewendet) stand mit dem Schleifcondensator, der negative Batteriepol mit dem Schutzringe und der dazwischen befindlichen Scheibe in Verbindung. Die beiden anderen Platten des Schleifcondensators und des Schutzringcondensators sind zur Erde abgeleitet. (Fig. 217.) Nun wird jeder Batteriepol durch einen Umschalter von dem betreffenden Condensator entfernt und zur Erde abgeleitet, Schleifcondensator und Schutzringcondensator miteinander und dem einen Quadrantenpaare des Elektrometers verbunden, während der Schutzring selbst zur Erde gelegt ist. (Fig. 218.)

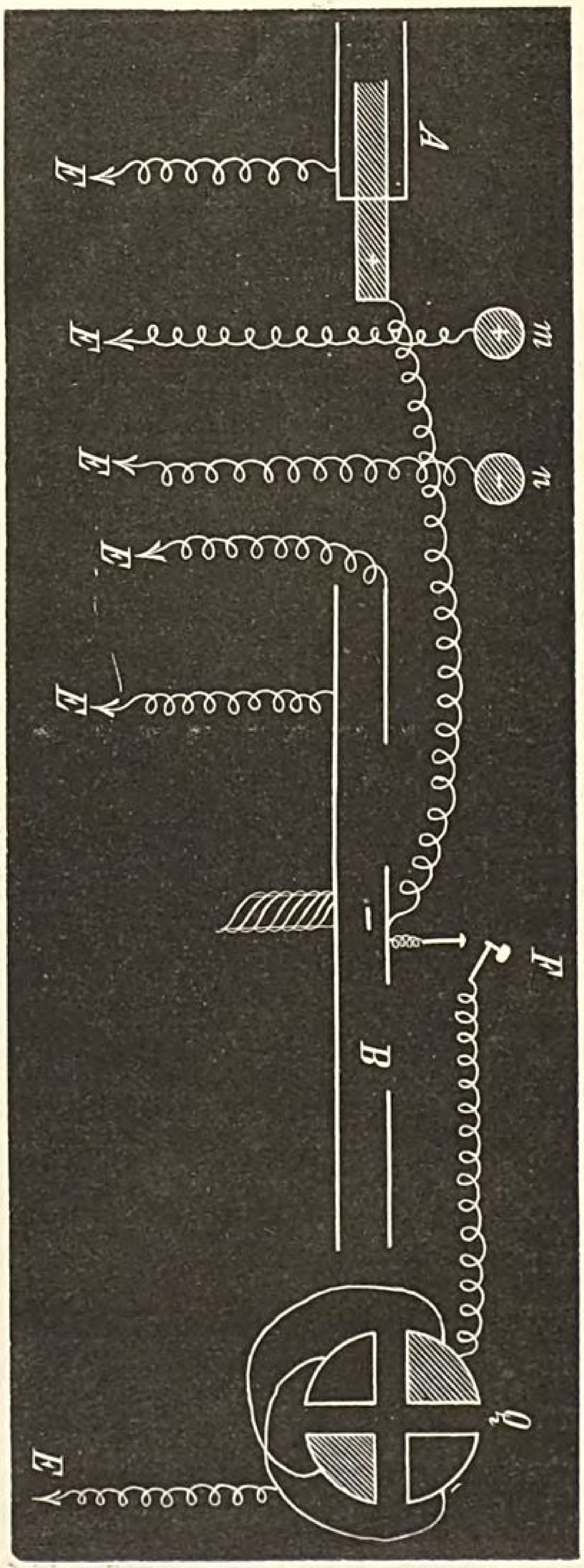


Fig. 218

Sind die Capacitäten der Condensatoren ungleich, so werden die Ladungen ungleich sein; hat z. B. der Schleifcondensator eine größere Capacität, dann wird die Elektrometernadel eine positive Ladung der Quadranten anzeigen, und es muss die untere Platte des Schutzringcondensators gehoben werden, um die Capacitäten des letzteren und des Schleifcondensators einander gleich zu machen; hat hingegen der Schutzringcondensator eine größere Capacität, dann wird eine negative Ablenkung eintreten und es muss die erwähnte Platte gesenkt werden.

Um nun die Dielektricitätsconstante eines Körpers (Glas) zu bestimmen, wird derselbe zwischen die Platten des Schutzringcondensators eingeführt, sodann der Schleifcondensator so lange bewegt, bis er und der Schutzringcondensator dieselbe Capacität haben; man liest die Stellung der Schraube ab. Das Glas wird dann entfernt, wodurch die Capacität des Schutzringcondensators vermindert wird. Die die untere Platte des letzteren tragende Schraube wird nun hinaufgedreht, bis die Capacität jetzt gleich der des Schleifcondensators ist, welche ungeändert blieb. Aus der jetzigen Stellung der Schraube und der früheren ließ sich ein Schluss auf die specifische Inductionscapacität der dielektrischen Substanz ziehen.

Hopkinson erhielt unter anderen folgende Resultate:

Dielektrika	Specifisches Gewicht	Dielektricitäts-constante	Verhältnis der beiden Grössen
Sehr leichtes Flintglas	2·87	6·57	2·29
Leichtes Flintglas .	3·2	6·85	2·14
Dichtes Flintglas .	3·66	7·4	2·02
Doppelt extra dichtes Flintglas . . .	4·5	10·1	2·25

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, dass eine Beziehung zwischen der Dichte des Flintglases und dessen specifischem Inductionsvermögen zu bestehen scheint, denn das Verhältnis der beiden Größen ist nach den Zahlen der letzten Colonne nahezu constant.

Außer diesen Stoffen hat Hopkinson auch noch Crownglas, Tafelglas und Paraffin der Untersuchung unterzogen; wir geben im Nachfolgenden die gefundenen Zahlen an:

Hartes Crownglas $\mu = 6·96$
Tafelglas $\mu = 8·45$
Paraffin $\mu = 2·29$.

535. Gordons Messungen der specifischen Inductionscapacität. Der „assistant secretary" der britischen Association J. E. H. Gordon, hat eine Reihe von Messungen der Dielektri-

citätsconstante nach einer sehr sinnreichen Methode([1]), die wir im Nachfolgenden darstellen wollen, ausgeführt.

Die größte Schwierigkeit, der die Erforscher der specifischen Inductionscapacität begegneten, ist die, dass, wenn ein Dielektrikum eine längere Zeit hindurch geladen wird, ein Theil der Ladung absorbiert wird und dass die Erscheinung der Rückstandsbildung die Beobachtungen compliciert macht. Deshalb machte Gordon die diesbezüglichen Versuche nach einer Methode, bei welcher die Wirkung der Absorption in zweifacher Weise behoben wurde:

(1.) Die elektrisierten Metallplatten des Condensators berühren nämlich nicht die Dielektrika;

(2.) die Ladung dauert ferner nur $\frac{1}{12000}$ einer Secunde.

Das gebrauchte Hauptinstrument ist ein sehr complicierter Condensator, der den Namen „Inductionswage“ führt, dessen Grundidee bereits von Thomson und Maxwell angegeben worden war.

Es besteht dieser Apparat (Fig. 219) im wesentlichen aus 5 kreisförmigen Metallplatten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, welche dieselbe Axe besitzen, von denen *b*, *c*, *d*, *e* fix sind, *a* kann parallel zu sich selbst mittelst einer Schraube bewegt werden, und es kann ihre Verschiebung durch einen Maßstab mit Nonius genau auf $\frac{1}{1000}$ Zoll abgelesen werden; *a*, *c*, *e* haben 6 Zoll im Durchmesser, *b*, *d* 4 Zoll. Ein Zwischenraum von ungefähr 1 Zoll ist zwischen jeder Platte und der nächsten.

Wir wollen die Methode der Benützung dieses Apparates schematisch darstellen, eingehendere Erläuterungen findet der Leser in der oben citierten Originalabhandlung.

Die Elektricitätsquelle (ein Inductorium) gibt gleiche und entgegengesetzte Potentiale. Wo das doppelte Zeichen angegeben ist, bedeutet dies, dass die Elektrisierung rasch gewechselt

([1]) Phil. Transact. 1879, pg. 417. Man sehe auch das treffliche Buch Gordons „a physical treatise on electricity and magnetism“ (London 1880), vol. I., pg. 109. Der Leser findet eingehende Erörterungen über die Methode in diesem Buche; die Darstellung derselben seitens des Bearbeiters schließt sich an das Original an.

werden kann. Wir wollen für den Augenblick annehmen, die Elektrisierung aller Theile des Apparates habe das obere Zeichen und die Umkehrungsvorrichtung sei nicht in Thätigkeit.

Der eine Pol des Inductoriums ist verbunden mit den äußeren Platten *a* und *e*, der andere Pol mit der Centralplatte *c*.

Die Platten *b* und *d* sind mit den Quadranten eines Elektrometers verbunden.

Die Centralplatte *c* kann niemals eine Ablenkung der Nadel hervorrufen, weil — wenn sie in der Mitte zwischen den kleinen Platten ist — auf jeder von ihnen gleiche und gleichartige Ladungen hervorgerufen werden und deshalb gleiche und

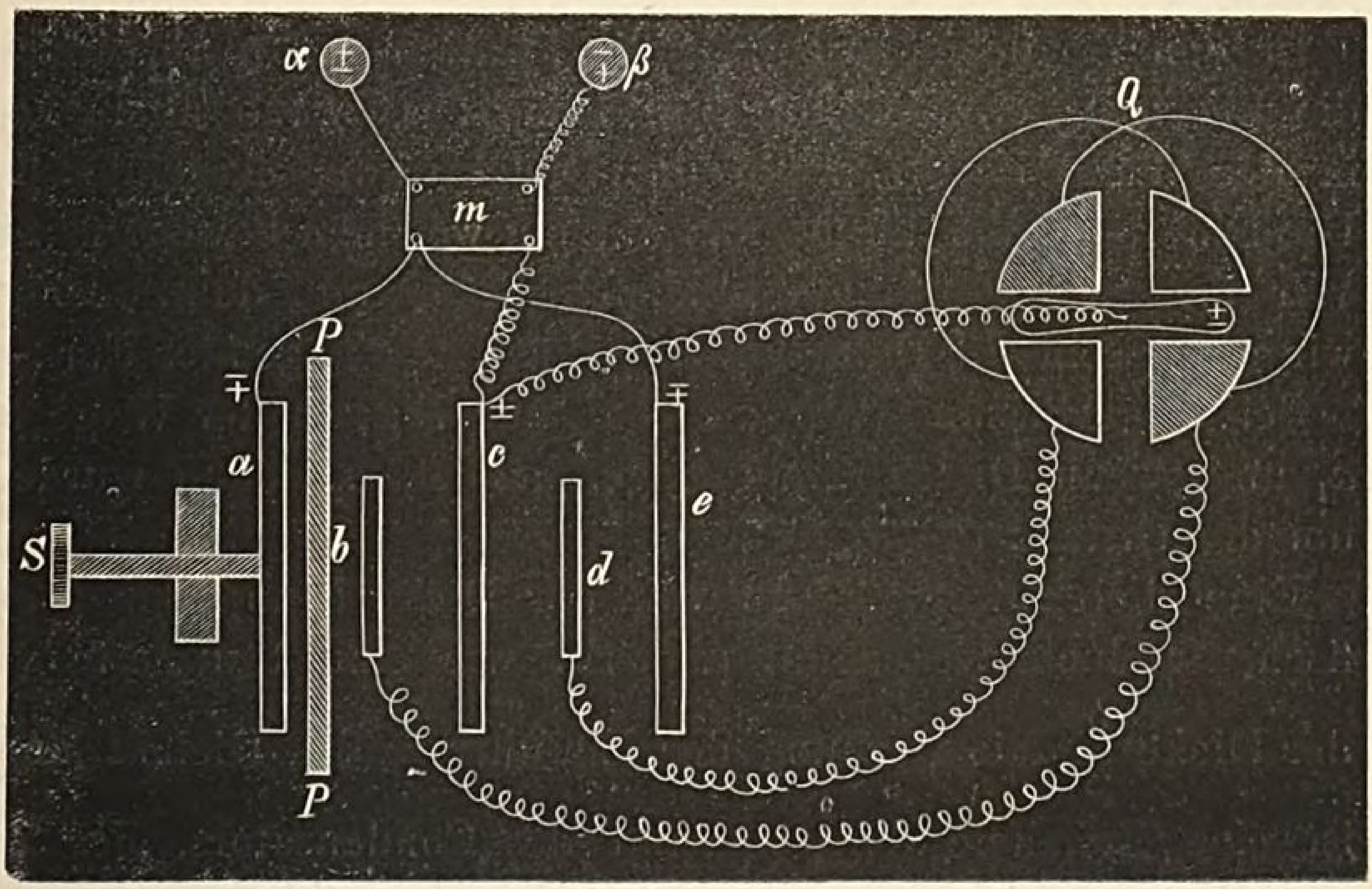


Fig. 219.

gleichartige Ladungen auf den Quadranten erzeugt werden. Die äußeren Platten werden also keine Wirkung auf die Nadel ausüben, solange Luft in der Wage ist, und solange $ab = dc$ ist.

Wenn aber *a* mittelst der Mikrometerschraube von *b* wegbewegt wird, also *ab* größer als *ed* wird, dann wird die Inductionswirkung von *a* auf *b* kleiner sein als von *e* auf *d* und die Nadel wird abgelenkt.

Wenn aber ein Dielektrikum von größerer specifischer Inductionscapacität, als sie Luft hat, zwischen *a* und *b* gestellt wird, dann wird eine größere inductive Wirkung von *a* auf *b* als

von *c* auf *d* ausgeübt, und die Nadel erleidet eine Ablenkung in der entgegengesetzten Richtung.

Es ist klar, dass, wenn wir ein Dielektrikum einführen und gleichzeitig *a* von *b* wegschrauben, wir eine Position finden können, in welcher die vermehrte Induction durch das Dielektrikum genau ausgeglichen wird durch die Abnahme, welche der größeren Entfernung entspricht, und dann wird die Nadel auf dem Nullpunkte bleiben.

Die Entfernung, um welche *a* bewegt werden muss, um eine gegebene dielektrische Platte zu compensieren, wird nur von deren Dicke und von ihrem specifischen Inductionsvermögen abhängen.

In den Versuchen lesen wir die Position von *a* ab, welche die Elektrometernadel auf Null bringt: 1. wenn allein Luft in der Wage ist; 2. wenn das Dielektrikum eingeführt ist. Die Differenz gibt die Distanz an, um welche *a* bewegt wurde. Wir messen die Dicke des Dielektrikums und dann rechnen wir die specifische Inductionscapacität nach folgender Formel:

Sei die Ablesung von *a*, wenn nur Luft in der Wage ist, a_1 und, wenn Dielektrikum eingeführt ist, a_2, dann wurde *a* um die Distanz $a_2 - a_1$ bewegt.

Eine dielektrische Platte von der Dicke *b* und der specifischen Inductionscapacität μ wirkt wie eine Luftplatte von der Dicke $\frac{b}{\mu}$. Die Wirkung der Einführung des Dielektrikums ist eine Zunahme der Capacität des Condensators, der aus den Platten *a* und *b* besteht. Aus leicht begreiflichen Gründen erhalten wir die Gleichung:

$$b - \frac{b}{\mu} = a_2 - a_1$$

und daraus:

$$\mu = \frac{b}{b - (a_2 - a_1)}.$$

Diese Formel, in welcher die auf der rechten Seite der Gleichung befindlichen Größen genau bestimmt werden können, wurde zur Rechnung der Versuche verwendet.

Der Umkehrungsapparat. Wir haben bisher vorausgesetzt,

die Nadel sei in gewöhnlicher Weise + geladen. Nehmen wir an, es sei kein Gleichgewicht vorausgesetzt, sondern die Wirkung von *a* sei größer als von *e*, und die Elektrisierungen hätten die oberen Zeichen; *a* und *e* werden positive Elektricität auf *b* und *d* inducieren und negative Elektricität wird auf allen 4 Quadranten auftreten; die Elektrisierung auf den schattierten Quadranten wird am größten sein und die Nadel wird sich im Sinne des Uhrzeigers bewegen.

Nehmen wir an, es werde die Elektrisierung von *ace* dem Zeichen nach geändert, der numerische Wert aber nicht; *a* und *e* werden negative Elektricität auf *b* und *d* und positive Elektricität auf den Quadranten influencieren. Die schattierten Quadranten werden die am stärksten elektrisierten bleiben, die Nadel geht jetzt den umgekehrten Weg. Es ist klar, dass, wenn die Commutation sehr rasch vorsichgeht, die Nadel in zwei Richtungen nur schnell abwechselnde Impulse erhalten wird und keine Störung des Gleichgewichtes eine Abweichung hervorrufen wird. Um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen, hat Professor Maxwell das Arrangement getroffen, dass die Nadel, anstatt beständig geladen zu sein, mit der Platte *c* verbunden wird. Das Zeichen der Ladung der Nadel wird dann verkehrt, wenn die Ladungen der Inductionswage umgekehrt werden. Hätten die Elektrisierungen die oberen Zeichen und wären die schattierten Quadranten am stärksten elektrisiert, so werden die Quadranten negativ elektrisch sein und die Nadel positiv elektrisch; die Nadel wird nach rechts sich bewegen. Wenn nun die Elektrisierung umgekehrt wird, so werden die Quadranten positiv elektrisch und die Nadel negativ elektrisch sein; die Kraft wird anziehend bleiben und die Ablenkung erfolgt in derselben Richtung wie zuvor.

Wenn die Elektrisierung der fünf Platten, des Dielektrikums, der Nadel und der vier Quadranten 12000mal in der Secunde gewechselt wird, so wird die Ablenkung der Nadel vollkommen erhalten bleiben. Eine Bewegung von *a* um $\frac{1}{1000}$ Zoll bewegte gewöhnlich den Lichtfleck um 1 Millimeter.

Die schnellen Umkehrungen (12000 pr. Secunde) wurden mittelst einer Inductionssäule und einem sehr raschen Unter-

brecher erzeugt. Letzterer wurde von Gordon ausführlich beschrieben. (1)

Der zweite Umkehrungsapparat wurde verwendet, um die Elektrisierungen auf ihrem Wege zur Inductionswage ungefähr 30mal in der Secunde umzukehren, falls ein Überwiegen der positiven oder negativen Elektricität nach der ersten Umkehrung sich zeigen sollte. (2)

So viel sei über das Princip der Methode und des in Anwendung gebrachten Apparates gesagt; die näheren Details und Verbindungen kann der Leser dem Werke von Gordon (I., pg. 113—117) entnehmen.

Die dielektrischen Platten hatten 7 Quadratzoll und waren $\frac{1}{4}-1$ Zoll dick; ihre Seiten waren genau planparallel; die elektromotorische Kraft war ungefähr jener von 2050 Elementen der Batterie von De la Rue (Chlorsilberelemente).

Resultate der Messungen. Wir geben im Folgenden die Werte der Dielektricitätsconstante an. Dieselbe war:

Für leichtes Flintglas . .	$\mu = 3{\cdot}013$	(Mittel)
Hartes Crownglas .	$\mu = 3{\cdot}108$	
Ebonit	$\mu = 2{\cdot}284$	(Mittel)
Beste Guttaperchaqualität .	$\mu = 2{\cdot}462$	
Chattertons Compound . .	$\mu = 2{\cdot}547$	
Festes Paraffin (Spec. Gewicht bei 11° C. = 0·9109, Schmelzpunkt 68° C.)	$\mu = 1{\cdot}9936$	(Mittel)
Schwarzer Kautschuk .	$\mu = 2{\cdot}220$	
Vulcanisierter Kautschuk	$\mu = 2{\cdot}497$	
Schellack	$\mu = 2{\cdot}74$	
Schwefel	$\mu = 2{\cdot}58$	
Schwefelkohlenstoff . . .	$\mu = 1{\cdot}81$.	

Gordon experimentierte mit vier verschieden dicken Ebonitplatten, die Übereinstimmung der diesbezüglichen Versuchsresultate (die äußerste Differenz von Mittel betrug — 1·5%) zeugt von der Genauigkeit der Methode und der Richtigkeit der Theorie.

Bezüglich Paraffins müssen einige Bemerkungen gemacht werden. Es ist nicht möglich, dicke Paraffinplatten zu erhalten,

(1) Gordon l. c. vol. II., pg. 49.

(2) Gordon I., pg. 229.

die frei von Hohlräumen sind, deshalb musste eine Correction vorgenommen werden. Gordon substituierte statt der Platte von der Dicke b eine imaginäre Platte von der Dicke b', wo b' die Dicke der Platte ist, wenn sie dieselbe Länge und Breite hätte und dieselbe Menge Paraffin enthalten würde und keine Höhlungen hätte. Zur Bestimmung der Dicke b' diente die folgende Gleichung:

$$b' = b \frac{\text{spec. Gewicht der Platte}}{\text{spec. Gewicht des Paraffins}}.$$

Bezeichnen wir das angedeutete Verhältnis φ, so ist $b' = b\varphi$. Das specifische Gewicht einer kleinen Paraffinmenge ohne Höhlungen war bei 11° C. 0·9109.

Das specifische Gewicht jeder Platte war durch Wägung im Wasser bestimmt. Bezeichnen wir den Mittelwert der specifischen Inductionscapacität, wie er aus der wirklichen Dicke b gerechnet wurde, μ und μ' den aus der corrigierten Dicke gerechneten, so ist:

$$\mu = 1·9459$$
$$\mu' = 1·9936.$$

Bezüglich des Schwefelkohlenstoffes sei noch folgende Bemerkung gemacht:

Die Flüssigkeit war in einem Glasgefäße (Glastrog) enthalten. Der Trog war 7 Zoll weit und 9 Zoll hoch; zuerst wurde die Ablesung vorgenommen bei leerem Gefäße, dann bei vollem Gefäße, und es wurde die Zahl für Schwefelkohlenstoff erhalten, indem man die Wirkung des von ihm erfüllten Glastroges subtrahierte.

Säculäre Änderung der specifischen Inductionscapacität des Glases. (1) Die erwähnten Versuche über Glas wurden um Weihnachten 1877 gemacht; Ende Juli 1879 wiederholte Gordon seine Versuche mit denselben Glasplatten und fand in allen Fällen einen bedeutenden Zuwachs in der specifischen Inductionscapacität. Das Arrangement der Apparate war genau dasselbe wie in den ersten Versuchen; die elektromotorische Kraft war so genau als möglich dieselbe; übrigens zeigten Versuche, dass geringe Variationen derselben

(1) Gordon, report of the British Association, Sheffield 1879.

keinen Einfluss auf die Resultate ausüben. Die beobachteten Differenzen der Dielektricitätsconstanten können dreierlei Ursachen haben:

1. Fehler in den Versuchen von 1879; 2. Fehler in jenen von 1877; 3. endlich eine veritable Änderung in der specifischen Inductionscapacität des Glases in dem erwähnten Zeitraume. Eine sorgfältige Wiederholung der Versuche von 1879 ergab, dass damals kein Fehler gemacht wurde; auch die Versuche von 1877 waren genug sorgfältig angestellt. Die Betrachtung der verschiedenen Zahlen leitete Gordon zu dem Schlusse, dass im Laufe von $1^1/_2$ Jahren eine wirkliche Veränderung im Glase platzgriff, welche sich in einer beträchtlichen Zunahme der specifischen Inductionscapacität zeigte. Um unsere Kenntnis von dieser neuen Erscheinung zu vervollständigen, müsste man eine Reihe von monatlichen Beobachtungen vielleicht über eine Periode von einigen Jahren ausdehnen. So viel steht fest, dass die Theorie der specifischen Inductionscapacität äußerst dunkel ist und dass die Induction, sehr weit von einer directen Wirkung in die Entfernung entfernt ist und höchst wahrscheinlich durch die Partikel des Dielektrikums durchgesendet wird.

536. Bevor wir zu der Darstellung der Methoden zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante von Flüssigkeiten und Gasen übergehen, sei noch in aller Kürze der Versuchsresultate Erwähnung gethan, welche Schiller([1]) im Jahre 1874 erhielt.

Es ist an dieser Stelle nicht möglich, auf die äußerst sinnreiche Methode einzugehen; es sei nur erwähnt, dass nach derselben die Ladungszeit des Condensators $\frac{1}{20000}$ einer Secunde sein konnte; übrigens hat Schiller auch Versuche angestellt, in welchen der Condensator 20 bis 25mal in der Secunde geladen und entladen wurde. Wir geben die nach der ersteren Methode erhaltenen Zahlen an, weil sie die instantane specifische Inductionscapacität darstellen:

Dielektrika:	μ:
Ebonit	2·21
Brauner reiner Kautschuk	2·12

([1]) Pogg. Ann. 151. „Einige experimentelle Untersuchungen über elektrische Schwingungen."

Vulcanisierter Kautschuk	2·69
Paraffin, rasch gekühlt, fast durchsichtig .	1·68
„ langsam gekühlt, milchweiß . .	1·81
„ andere langsam gekühlte Platte .	1·89
Halbweißes Glas	2·96
„ „	3·66
Weißes Spiegelglas	5·83.

537. Bestimmung der specifischen Inductionscapacität von Flüssigkeiten. Die Bestimmung der Dielektricitätsconstante von Flüssigkeiten begegnet der Hauptschwierigkeit, dass durch die Flüssigkeitsströmungen sehr leicht eine Modification der elektrischen Vertheilung eintreten kann.

Mit der Messung der Dielektricitätsconstante haben sich mehrere Physiker beschäftigt und wir erörtern zunächst die von

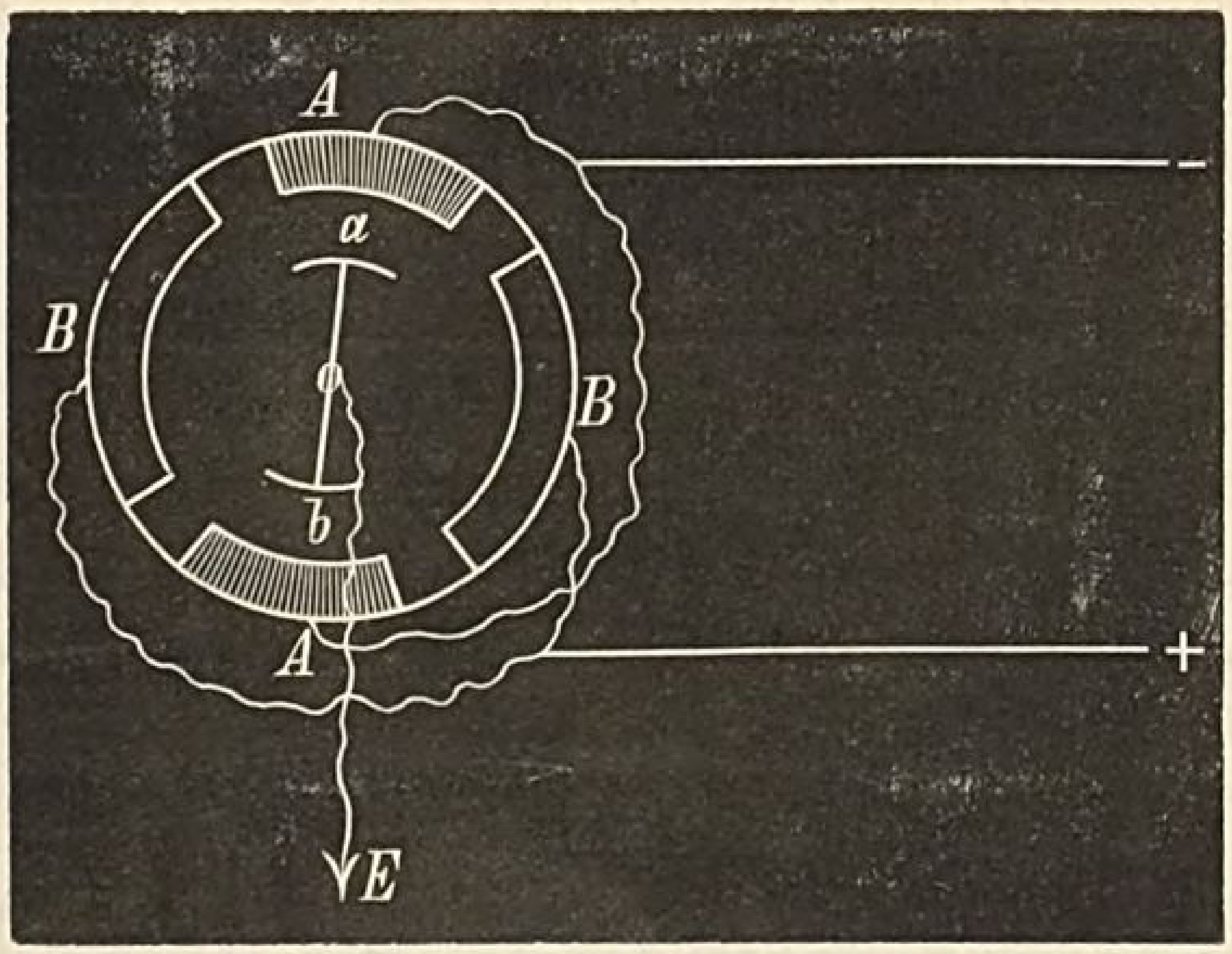


Fig. 220.

Silow(1) angegebenen Methoden. Als Elektrometer wurde ein cylindrisches Glasgefäß (Fig. 220) benützt, welches innen zum Theil mit Stanniol belegt war, wobei die Stanniolbelegung vier Quadranten bildete, die genau so wie jene des Quadrantenelektrometers von Thomson verbunden waren; die Belegungen erstreckten sich nicht nur auf die Mantelfläche des Cylinders, sondern auch auf die Bodenfläche desselben. Die Nadel dieses Elektrometers war ein leichtes Platinstäbchen, das an seinen Enden Platinbleche trug, die so gekrümmt waren, dass sie parallel mit der Wandung des Cylinders verliefen. Die Nadel

(1) Pogg. Ann. 156, 1875, pg. 389.

trug zur Messung der Ablenkung einen Spiegel und wurde constant mit der Erde in Verbindung gehalten. Der Cylinder konnte mit verschiedenen Flüssigkeiten erfüllt werden. Das eine Quadrantenpaar konnte mittelst eines Commutators mit der Erde verbunden werden, das andere wurde mit dem Pole einer galvanischen Batterie verbunden, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war. Diese letzterwähnte Verbindung konnte auch umgekehrt werden.

Zuerst wurde die Ablenkung angemerkt, wenn Luft in dem Cylinder war; dann wurde der letztere mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die Ablenkung mittelst derselben Batterie bewerkstelligt und wieder notiert. Aus dem Verhältnisse der beiden Ablenkungen kann man nun die specifische Inductionscapacität der Flüssigkeit bestimmen. Wenn nämlich das Elektrometer vollkommen symmetrisch ist, dann wird die specifische Inductionscapacität der Flüssigkeit durch das Verhältnis der Ablenkungen ausgedrückt werden. Nehmen wir das Potential desjenigen Poles, welcher mit dem einen Quadrantenpaare verbunden ist, als V an, bezeichnen ferner C die Capacität der Stanniolbelegungen, μ — wie gewöhnlich — die Dielektricitätsconstante der zu untersuchenden Flüssigkeit, so ist die Anziehung, welche die Nadel erfährt, ausgedrückt durch:

$$P = k \,.\, C \,.\, \mu \,.\, V^2,$$

wenn k einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Die Anziehung der Nadel von dem Quadrantenpaare, wenn nur Luft in dem Glascylinder ist, wird analog ausgedrückt durch:

$$Q = k \; C \,.\, V^2.$$

Die Anziehungen werden durch die Torsion des Fadens compensiert. Bezeichnen wir die Torsionswinkel bei Anwendung der Flüssigkeit respective Luft α und β, so hat man unter den obigen Voraussetzungen

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Da es unmöglich ist, gewisse Irregularitäten in der Construction des Elektrometers zu vermeiden, so wurde es mittelst

einer Reihe von Beobachtungen der Ablenkungen, die durch verschieden starke Batterien erzeugt wurden, graduiert.

Die nachstehenden Messungen wurden an zwei Sorten Terpentinöl vorgenommen; für die eine Sorte fand Silow die specifische Inductionscapacität in drei Versuchsreihen:

$$\mu = 2{\cdot}277$$
$$\mu = 2{\cdot}279$$
$$\mu = 2{\cdot}2505$$

also im Mittel . . $\mu = 2{\cdot}2688.$

Für die zweite Sorte Terpentinöl wurde die Dielektricitätsconstante zu

$$\mu = 2{\cdot}173$$

bestimmt.

In einer zweiten Methode, welche Silow(1) benützte, wurde ein Condensator, eine Batterie und ein Galvanometer gebraucht. Der Condensator bestand aus zwei kreisförmigen, vergoldeten Platten, die sehr nahe ($1{\cdot}5^{mm}$) aneinanderstanden. Die eine Condensatorplatte war zur Erde abgeleitet, die andere konnte durch einen rotierenden Commutator, der im wesentlichen eine Ebonitplatte mit Metalleinlagen war, alternierend mit dem einen Pol der Ladungsbatterie und dem andererseits zur Erde abgeleiteten Multiplicator eines Galvanometers verbunden werden. Der zweite Batteriepol war ebenfalls zur Erde abgeleitet. Es konnten die Entladungen durch das Galvanometer in der Minute 900—1500mal stattfinden, d. h. es giengen in jeder Minute 900—1500 Condensatorladungen durch den Galvanometerdraht. Da nun die Ablenkung der Nadel des Galvanometers von der gesammten Elektricitätsmenge abhängt, die durch dasselbe in einer gegebenen Zeit hindurchgeht, so wird sie, wenn die Geschwindigkeit gleichförmig ist, den Mittelwert der Ladungen des Condensators angeben. Durch abwechselnde Versuche mit Luft und anderen Dielektrika konnte die specifische Inductionscapacität der letzteren leicht gerechnet werden. Um die specifische Inductionscapacität von Flüssigkeiten nach dieser Methode bestimmen zu können, wurde die untere

(1) Pogg. Ann. Bd. 158, 1876, pag. 306.

Condensatorplatte auf drei Füßen in einen Glastrog gestellt, der innen mit Stanniol belegt und zur Erde abgeleitet war, in welchen die Flüssigkeiten gegossen wurden. Auf diese Weise erhielt Silow folgende Zahlen:

Terpentinöl (2. Sorte)	$\mu = 2{\cdot}153$
Petroleum (1. Sorte)	$\mu = 2{\cdot}071$
Petroleum (2. Sorte)	$\mu = 2{\cdot}037$
Krystallisiertes Benzol	$\mu = 2{\cdot}198$.

Spätere Untersuchungen der Dielektricitätsconstante von Flüssigkeiten rühren von J. Hopkinson(¹) her. Derselbe hat 1881 die specifischen Inductionscapacitäten nach folgender Methode bestimmt: Es wurden die Flüssigkeiten in den ringförmigen Raum eines Doppelcylinders gebracht, in welchen ein isolierter, mittelst drei Messingstäben an einer Ebonitplatte hängender, den Cylinderflächen conaxialer Cylinder gesenkt werden konnte. Die Capacität dieses Cylinders wurde mit der eines Schlittencondensators erst bei Füllung mit Luft, dann bei Füllung mit den Flüssigkeiten untersucht.

538. Bestimmung des specifischen Inductionsvermögens der Gase. Wie bereits früher erwähnt wurde, konnte Faraday in dem specifischen Inductionsvermögen der Gase keinerlei Differenzen wahrnehmen. Professor Boltzmann(²) hat die Frage nach der Dielektricitätsconstante der verschiedenen Gase zum Gegenstande einer sehr wertvollen, eingehenden Experimentaluntersuchung gemacht, die wir nun in ihren Grundzügen darstellen wollen.

Der Condensator, dessen sich Boltzmann in diesen Versuchen bediente, bestand im wesentlichen aus zwei Metallplatten *d*, *e* (Fig. 221), die voneinander wohl isoliert waren und sich in einem Glasbehälter befanden, der mit einer Luftpumpe und einem Gasbehälter in Verbindung gebracht werden konnte. Die erwähnten Metallplatten konnten mittelst zweier Drähte geladen oder mit der Erde oder dem Elektrometer in Verbindung gebracht werden. Die Drähte gehen durch Schellackpfröpfe, welche am oberen Theile des Gasbehälters in Öffnungen

(¹) Philosoph. Trans., 2, pag. 355—373, Wiedemann's Beiblätter, 1882 Nr. 2, pag. 113.

(²) Wiener Sitzungsberichte, Bd. 69, II., pag. 795 (1874).

eingeführt sind. Es sind außerdem vier Platten vorhanden, welche immer mit der Erde in Verbindung standen und den Zweck hatten, die Wärme wegzuleiten, welche durch die Reibungsverhältnisse des in den Apparat eintretenden Gases entwickelt werden konnte. Die Wärme könnte nämlich allzu leicht eine Biegung veranlassen. Die Platte *d* ruht auf drei Schellackblöckchen, welche in Messinghöhlungen eingepasst waren, die auf der Platte *b* befestigt sind.

Die Platte *e* war mittelst Schellackblöckchen an der Platte b_1 befestigt und die letztere konnte mittelst dreier Schrauben

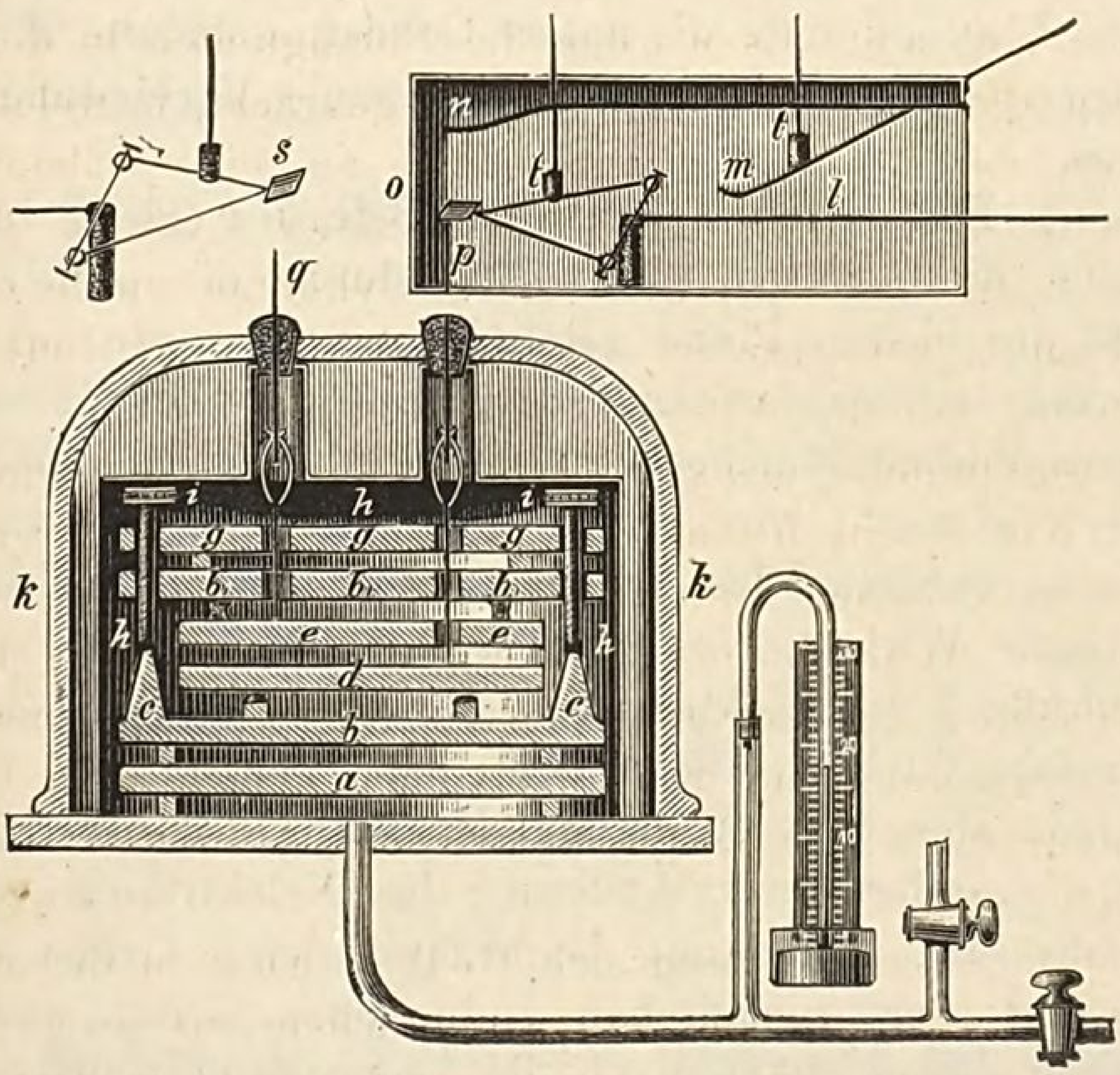


Fig. 221.

iii gehoben werden. Ein Gehäuse aus dünnem Messingblech, das zur Erde abgeleitet war, schützte den Condensator vor äußeren Wirkungen. Damit die Condensatorplatten nicht erschüttert werden konnten, waren die Drähte mit einer beweglichen Verbindung versehen.

Theorie der Versuche. Zuerst wurde die obere Condensatorplatte *e* mit der Erde verbunden und die untere *d* mit dem Elektrometer, Luft wurde aus dem Gasbehälter einge-

pumpt, es zeigte sich keine Nadelablenkung, was bewies, dass die Platten durch Luftreibung nicht elektrisiert wurden. Zu Beginn des Versuches wurde die untere Platte *d* mit der Erde und dem Elektrometer verbunden, während *e* positiv elektrisiert wurde mittelst des einen Poles einer Batterie von 300 Daniell'schen Elementen, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war. Der Ladungspol der Batterie war mit einer Metallplatte *s* verbunden, die isoliert um ein Charnier drehbar eingerichtet war; wurde diese Platte gesenkt, so kam sie auf dem Leitungsdrahte *q* zu liegen und die Platte *e* wurde geladen. — Vermittelst der in der Figur angegebenen Metallplatte bei *p* und der Drähte *l*, *m*, *n* konnte die untere Condensatorplatte *d* mit dem Elektrometer oder der Erde in leitende Verbindung gesetzt werden.

Die + Elektricität der unteren Belegung gieng zur Erde, während die negative Elektricität durch die positive Elektricität der oberen Platte gebunden war, *e* wurde nun isoliert, dies verursachte keine Änderung im elektrischen Zustande des Systems, deshalb war beständig keine Abweichung am Elektrometer.

Wurde nun ein Element zur Batterie gesetzt, so nahm die elektrische Wirkung von *e* auf *d* zu und es zeigte sich eine Ablenkung β am Elektrometer. Für eine zugefügte Zelle war β ungefähr 60 Scalentheile.

Wurde aber ohne Änderung der Batterie die Wirkung von *e* auf *d* geändert durch Änderung des Dielektrikums, so wurde ebenfalls eine Ablenkung beobachtet, deren Größe von der Änderung der specifischen Inductionscapacität und deren Richtung davon abhängt, ob die Änderung dieser Größe einen Zuwachs oder eine Abnahme darstellte.

Es war gefunden, dass ein Auspumpen der Luft, während der Druck von 760^{mm} auf 10^{mm} reduciert wurde, eine Verkleinerung der specifischen Inductionscapacität veranlasste, welche eine negative Abweichung von ungefähr 8 Scalentheilen verursachte.

Formel der Berechnung. Sei das Potential eines Daniell'schen Elementes *p*, dann wird das Potential der 300 elementigen Batterie 300 *p* oder allgemeiner (für *n* Elem.) *np* sein.

β ist die Abweichung, hervorgerufen durch ein Element vom Potential p und es ist also β proportional p.

Bezeichnen wir mit μ_1 die specifische inductive Capacität der Luft zu Beginn des Versuches, mit μ_2 jene des Gases oder der verdünnten Luft im Condensator am Ende; dann ist nach der bekannten Theorie des Condensators das Potential jedes Theiles am Ende des Versuches das $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ fache von jenem, das zu Anfang des Versuches war. Da die Platte d und das Metallgehäuse mit der Erde in leitender Verbindung sind, so ist ihr Potential Null zu Beginn des Versuches und auch am Ende desselben.

Das Potential der Platte e, welches np war, wird $\frac{\mu_1}{\mu_2} np$ d. h. es ändert sich um

$$np\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right).$$

Diese Veränderung des Potentiales von e hat eine Ablenkung von a Scalentheilen zur Folge. Wenn ein Element hinzugefügt wird, dann verursacht eine Änderung des Potentiales p von e eine Ablenkung von β Scalentheilen. Es ist daher:

$$\frac{np\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)}{p} = \frac{a}{\beta} \text{ oder } n\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) = \frac{a}{\beta},$$

d. h.

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1 + \frac{a}{n\beta}.$$

539. Einfluss der Dichte des Gases auf das specifische Inductionsvermögen desselben. Boltzmann fand, dass bei jedem Gase eine Änderung in dessen Dichte eine nahezu proportionale Änderung in der Größe hervorruft, durch welche die specifische Inductionscapacität sich von der Einheit unterscheidet. So z. B. wenn die Capacität eines gegebenen Gases bei gewöhnlichem Drucke 1·002 war, wurde sie bei halbem Drucke 1·001.

Nehmen wir die specifische Inductionscapacität des Vacuums als Einheit und die eines Gases bei dem gewöhnlichen Drucke

von 760^{mm} $1+\lambda$, dann wissen wir, dass, da die Capacitäten aller Gase sich sehr wenig von der Einheit unterscheiden, λ eine sehr kleine Größe sein wird und entweder ein positives oder negatives Zeichen haben wird, je nachdem die Capacität größer oder kleiner als diejenige des Vacuums sein wird.

Ist μ_1 die Gascapacität beim Drucke von b_1 Millimetern und μ_2 diejenige beim Drucke von b_2 Millimetern, dann ist

$$\mu_1 \text{ proportional } 1+\frac{\lambda b_1}{760}$$

$$\mu_2 \text{ proportional } 1+\frac{\lambda b_2}{760}$$

oder:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{760+\lambda b_1}{760+\lambda b_2}=1+\frac{\lambda(b_1-b_2)}{760},$$

da λ eine sehr kleine Größe ist. Combinieren wir die Formeln:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=1+\frac{a}{n\beta}$$

und

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=1+\frac{\lambda(b_1-b_2)}{760},$$

so erhalten wir:

$$\lambda=\frac{a\,.\,760}{n\beta(b_1-b_2)},$$

und diese Formel wurde in den Versuchen benützt.

Wir haben weiter für ein Gas:

$$\mu_{760}=1+\lambda,$$

wo μ_{760} die specifische Inductionscapacität des Gases bei 760 Millimeter Druck ist, wenn die specifische Inductionscapacität des Vacuums von ungefähr $5-10^{mm}$ Druck als Einheit genommen wurde.

Um die Evacuation der Luft rasch vorzunehmen, wurde eine große Kammer zwischen der Luftpumpe und dem Hahne C_1 zuerst ausgepumpt und dann der Hahn geöffnet. — Die Dicke jeder Platte war $4-5^{mm}$ und ihre Durchmesser ungefähr 160 Millimeter. Die Condensatorplatten waren 1^{mm} voneinander entfernt.

540. Isolationsvermögen der Luft. Einige vorläufige Versuche wurden gemacht, um zu sehen, ob die Luft zwischen den beiden Platten vollkommen isolierte, zum Theil bei niedrigem Drucke. Die obere Condensatorplatte wurde geladen und *d* zur Erde verbunden; dann wurden beide eine gewisse Zeit *t* isoliert und dann *d* mit dem Elektrometer verbunden. Eine Ablenkung, die sich zeigte, konnte dem Übergange der Elektricität von *e* auf *d* zugeschrieben werden.

War die Zeit *t* 5 Minuten, was viel länger als die Zeit eines Experimentes ist, so zeigte sich keine Ablenkung. War $t =$ 14 Stunden, so zeigte sich eine Ablenkung, welche angab, dass $\frac{1}{1200}$ Theil der Elektricität übergegangen war.

Wurde der Luftdruck auf ungefähr 3^{mm} vermindert, so gieng die Elektricität durch disruptive Entladung von einer Platte zur anderen; aber zwischen 3^{mm} und 760^{mm} Luftdruck konnte die Isolation als vollständig betrachtet werden.

541. Ausführung der Versuche; Zusammenstellung der Resultate. Die Operationen wurden in folgender Reihenfolge ausgeführt: 1. Die obere Platte wurde mit der Batterie verbunden, die untere Platte mit dem Elektrometer und der Erde; 2. die Verbindung des Elektrometers mit der unteren Platte und mit der Erde wurde aufgehoben; 3. das Gas wurde ausgepumpt; 4. die Verbindung des Elektrometers mit der Erde wurde nicht hergestellt, aber mit der unteren Platte und die Ablenkung des Elektrometers notiert.

Die Operationen (3) und (4) konnten umgekehrt werden, ohne eine Differenz zu erzeugen.

Resultate: Die Temperatur der Gase war 15°—17° C.; das specifische Inductionsvermögen des Vacuums wurde als Einheit genommen.

Gase bei 760^{mm} und 15°—17° C.	$\mu_{760} = 1 + \lambda$
Luft	1·000558
CO_2	1·000892
H	1·000250
CO	1·000650
NO	1·000938

Ölbildendes Gas	1·001208 1·001266
Sumpfgas	1·000890.

Aus diesen Werten rechnete Prof. Boltzmann die Werte von μ_{760} bei 0° C. Wir setzen noch die Quadratwurzeln aus diesen Zahlen und die zugehörigen Brechungsindices der Gase in diese Tabelle, um die Übereinstimmung des Experimentes mit der von Maxwell gefundenen Formel

$$n = \sqrt{\mu}$$

zu demonstrieren. Man erhielt:

	μ_{760}	$\sqrt{\mu}$	n
Luft	1·000590	1·000295	1·000294
CO_2	1·000946	1·000473	1·000449
H	1·000264	1·000132	1·000138
CO.	1·000690	1·000345	1·000340
NO	1·000994	1·000497	1·000503
C_2H_4	1·001312	1·000656	1·000678
CH_4	1·000944	1·000472	1·000443.

Um eine Vergleichung mit den Ergebnissen anderer Experimentatoren anzustellen, hat Gordon aus den oben angegebenen Tafeln die specifischen Inductionscapacitäten der verschiedenen Gase gerechnet, wenn jene der Luft bei 760^{mm} und 0° C. als Einheit angenommen wurde.

Es ist λ für Luft bei 0° C. und 760^{mm} = 0·000590.

Sei die specifische Inductionscapacität irgendeines Gases, wenn jene der Luft bei 0° C. und 760^{mm} als Einheit genommen ist, $1 + \lambda'$, so ist, wenn wir schreiben

$$\lambda' = \lambda - 0{\cdot}000590$$

und die specifische Inductionscapacität des Vacuums 0·999410 voraussetzen:

Gas	μ 760, 0° C.	μ 760, 15°—17° C.
CO_2	1·000356	. 1·000302
H	0·999674 . . .	. 0·999660
CO	. 1·000100 . . .	. 1·000060
NO	. 1·000394 . . .	. . 1·000348
C_2H_4	. 1·000722	1·000618 1·000576
CH_4	. 1·000354	. 1·000300

542. Versuche von Ayrton und Perry über die Dielektricitätsconstante der Gase. 1877 verkündeten die beiden Forscher Ayrton und Perry([1]), dass sie Unterschiede in den specifischen Inductionsvermögen gewisser Gase entdeckt und gemessen hätten und zwar waren ihnen die vorhergehenden Untersuchungen von Boltzmann über diesen Gegenstand unbekannt.

Es wurden in diesen Versuchen zwei Condensatoren, der offene und der geschlossene, gebraucht.

Der offene Condensator bestand aus einer Metallplatte die 1815 □*cm* Fläche hatte und auf einen Steinpfeiler gelegt wurde, und einer anderen Platte, welche ober der ersten Platte von 3 Ebonitschrauben getragen wurde. Die obere Platte war durch kleine Balken am Biegen verhindert.

Der geschlossene Condensator bestand aus einer Büchse, in welcher 11 Platten waren, jede von 324 □*cm* Fläche und parallel zu einander fest gemacht. Die Platten 1, 3, 5, 7, 9, 11 werden mit der Büchse verbunden; 2, 4, 6, 8, 10 mit einem Drahte, welcher durch eine lange Glasröhre herausgeht. Die Büchse konnte mit einer Quecksilberluftpumpe durch eine Röhre verbunden werden.

Das Verhältnis der Capacitäten des offenen und geschlossenen Condensators war zuerst bestimmt, wenn der letztere mit Luft bei gewöhnlicher Temperatur und Druck gefüllt war und dann, wenn er mit einem anderen Gase gefüllt war. Das Verhältnis dieser beiden Bestimmungen gab die specifische Inductionscapacität des Gases; die Methode der Vergleichung war folgende:

Eine Belegung von jedem Condensator war mit der Erde verbunden, die anderen Platten waren auf gleiche und entgegengesetzte Potentiale mittelst einer Batterie von 87 Daniell'schen Elementen und einen Umkehrungsschlüssel gebracht.

Der Schlüssel war so arrangiert, dass, wenn der + Pol mit dem einen Condensator verbunden war, der — mit der Erde in Verbindung war und umgekehrt. Die erste Stellung des

([1]) „on the specific inductive capacity of gases." (Asiatic Society of Japan 18. Apr. 1877).

Schlüssels gab Verbindungen, wie sie in folgender Figur dargestellt sind und die zweite Stellung eine Verbindung, wie sie in derselben Figur erhalten würde, wenn *b* niedergedrückt und *a* gehoben würde.

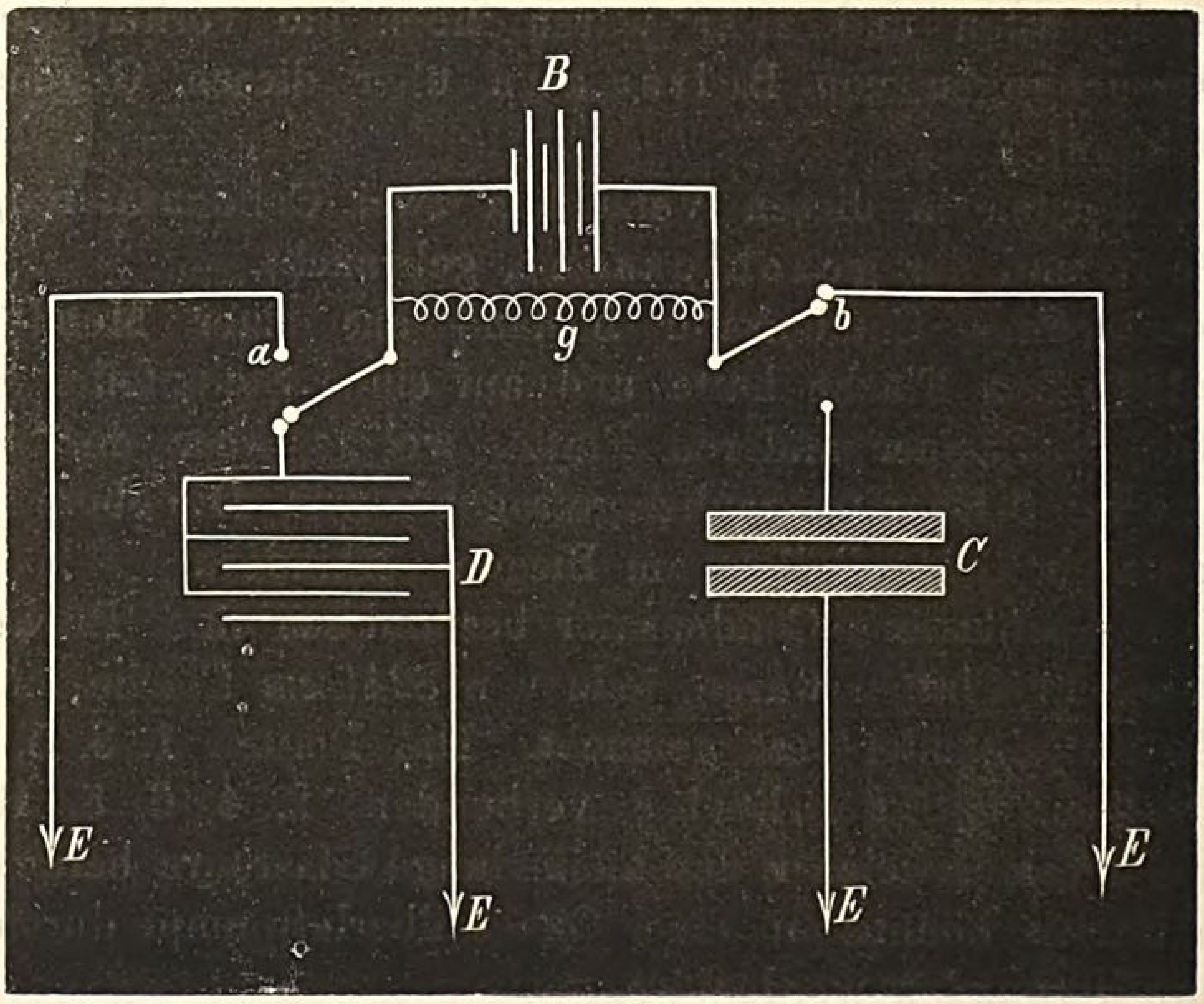


Fig. 222.

Dieses Arrangement gibt die doppelte Differenz des Potentiales, welches man erhalten würde, wenn man die beiden Pole respective mit den zwei Condensatoren verbinden würde. Der Potentialunterschied der Ladungen der beiden Condensatoren betrug 174 Daniell. Die beiden Condensatoren waren dann von der Batterie losgelöst und mit dem Elektrometer verbunden, wie es in folgender Fig. 223 dargestellt ist.

Waren die Capacitäten der Condensatoren genau gleich, so zeigte sich keine Ablenkung. Waren sie nicht gleich, so trat eine Ablenkung ein, deren Richtung angab, welcher Condensator die größere Capacität besaß und deren Größe abhängt von ihrer Differenz.

Diese Ablenkung gibt das Potential der remanenten Ladung in willkürlichen Einheiten des Elektrometers an.

Um die Capacitäten zu berechnen, ist es nothwendig, das Potential der ganzen Ladung in derselben willkürlichen Ein-

heit des Elektrometers zu kennen. Mit einer kleinen Batterie konnte das Potential der ganzen Ladung bestimmt werden durch Verbindung der Pole mit dem Elektrometer und Beobachtung der Ablenkung. Mit 87 Elementen konnte das nicht geschehen, da die Abweichung eine zu bedeutende sein würde.

Die folgende Methode war deshalb angewendet. Die zwei Pole der Batterie waren durch einen langen Draht verbunden, der eine Widerstandssäule von 10.000 Einheiten Widerstand darstellte. Es ist nach Ohm bekannt, dass das Potential gleichmäßig von einem Ende zum anderen Ende eines widerstehenden Drahtes fällt, welcher die beiden Pole einer Batterie verbindet; und deshalb können wir einen bekannten Bruch-

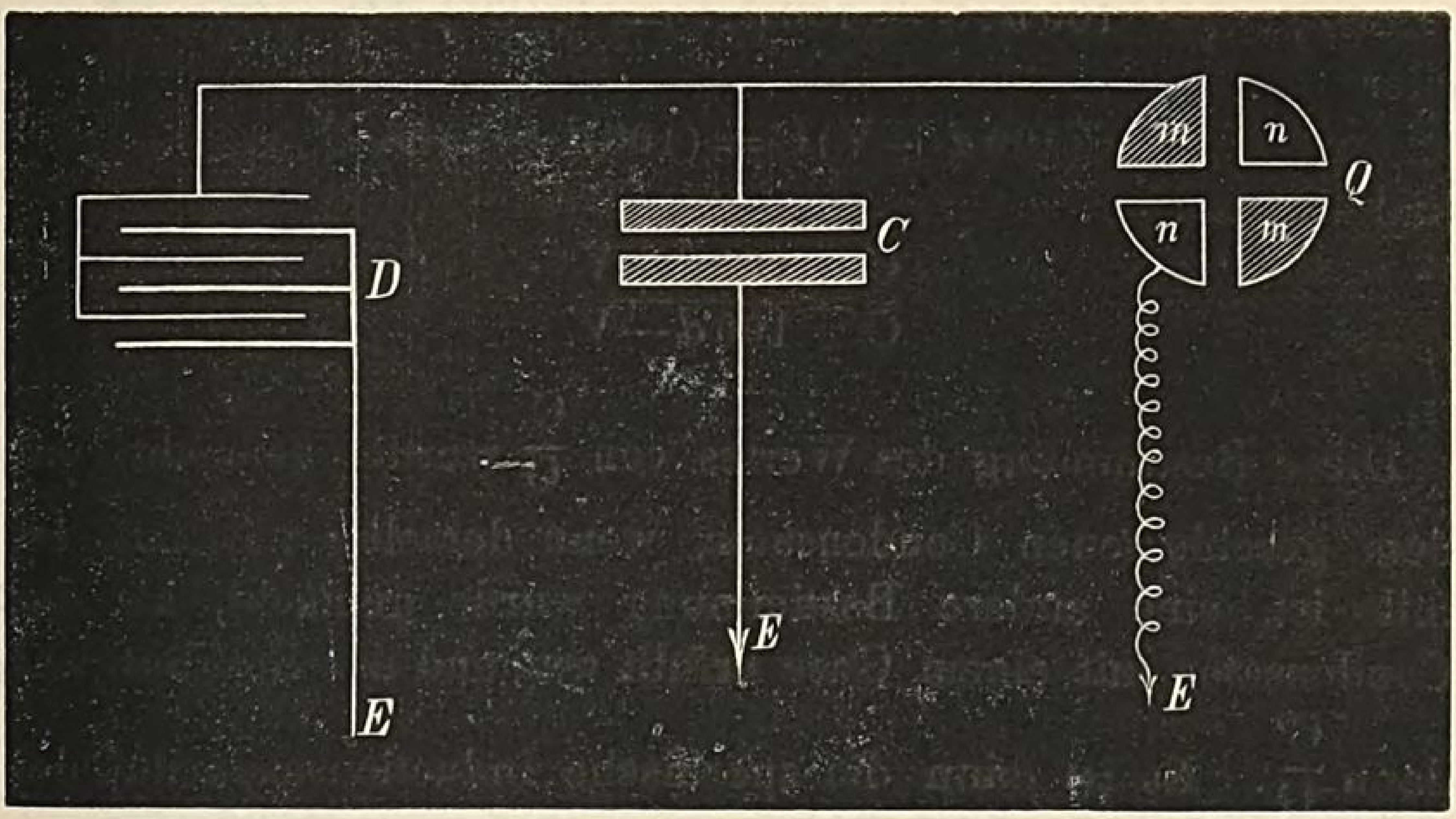


Fig. 223.

theil des Potentials in folgender Weise erhalten: Nehmen wir an, der Draht sei 100 Zoll lang; dann ist die Differenz des Potentiales zwischen einem Punkte und einem anderen, der vom ersteren 1 Zoll entfernt ist, genau $^1/_{100}$ des Unterschiedes der Potentiale zwischen den beiden Enden.

Wenn man das Elektrometer mit einem Pole der Batterie und einem Punkte verbindet, so dass der Widerstand zwischen den Elektrometerpolen $^1/_{100}$ des ganzen Widerstandes zwischen den Batteriepolen ist, so werden wir eine Ablenkung erhalten, die $^1/_{100}$ des Unterschiedes der Potentiale zwischen den Polen entspricht.

Nennen wir diese Ablenkung *d*, dann wird die Differenz des Potentiales zwischen den zwei Batteriepolen gleich 100 *d* willkürliche Einheiten des Elektrometers sein.

Wir wissen, dass die Ladung eines Condensators gleich dem Producte aus seinem Potentiale in seine Capacität ist.

Nennen wir die Capacität des geschlossenen und offenen Condensators respective C und O. Die Ladungen werden dann sein 100 *d*.C und —100 *d*.O. Wenn sie zueinander gefügt werden, so wird das System der beiden Condensatoren ein Potential V besitzen.

Die Capacität wird C+O sein, deshalb die Ladung V(C+O). Da die Ladung sich gleich blieb, so werden wir haben:

$$100\,d.\mathrm{C} - 100\,d.\mathrm{O} = \mathrm{V}\,(\mathrm{C}+\mathrm{O})$$

oder

$$(100\,d - \mathrm{V})\,\mathrm{C} = (100\,d + \mathrm{V})\,\mathrm{O}$$

und daraus:

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{O}} = \frac{100\,d + \mathrm{V}}{100\,d - \mathrm{V}}.$$

Diese Bestimmung des Wertes von $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{O}}$ wurde gemacht mit dem geschlossenen Condensator, wenn derselbe mit Luft erfüllt ist, eine andere Bestimmung wurde gemacht, als der Condensator mit einem Gase erfüllt war und das Resultat war dann $\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{O}}$. Es ist dann die specifische Inductionscapacität des zu untersuchenden Gases:

$$\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{O}} : \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}}.$$

Die beiden Forscher erhielten folgende Resultate:

Luft	1·0000	Wasserstoff	0·9998
Vacuum . . .	0·9985	Leuchtgas. . . .	1·0004
CO_2	1·0008	Schweflige Säure . .	1·0037.

Hätte Faraday so genaue Instrumente gehabt, um derart geringe Differenzen zu entdecken, so würde er unzweifelhaft diese Unterschiede in dem specifischen Inductionsvermögen der Gase gefunden haben.

Der wahrscheinliche Fehler in einer der oberen Bestimmungen wurde gerechnet und derselbe ist nicht mehr als 0·00015. Im Vereine mit den Physikern Gordon und Lodge untersuchen Ayrton und Perry das specifische Inductionsvermögen stark verdünnter Luft.

Gordon hat in übersichtlicher Weise die Werte der specifischen Inductionscapacität, wie sie von den verschiedenen Experimentatoren gefunden wurden, zusammengestellt; diese Zahlen haben in der Theorie der Elektricität eine große Wichtigkeit. Bezüglich dieser vergleichenden Übersicht sei der Leser auf das erwähnte ausgezeichnete Werk Gordons verwiesen, dessen Darstellung der Methoden zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante der Bearbeiter zum größten Theile folgte.

543. Leydnerflaschen. Es bleibt nun noch übrig einige Bemerkungen bezüglich der Leydnerflasche zu machen. Die Capacität einer solchen Flasche, nach der Methode von Faraday bestimmt, ist viel größer, als jene eines Luftlamellen-Condensators von derselben Dicke; dies zeigt aber keineswegs den Nutzen an, welchen man aus der Anwendung einer Leydnerflasche ziehen kann, welcher von der Elektricitätsmenge abhängt, die während der plötzlichen Entladung abfließt, und nicht von der gesammten Elektricitätsmenge. Riess hat die Erfahrung gemacht, dass, als er eine Batterie, deren Belegungen mit den beiden Kugeln eines Ausladers verbunden waren, unter Zwischenstellung einer Lane'schen Flasche lud, der Rückstand in der Batterie immer gleich dem sechsten Theil der gesammten Ladung ist. Ich habe diesen Versuch mit einer großen Batterie auf verschiedene Arten wiederholt und festgestellt, dass in der That das Verhältnis der Anzahl der Funken der Lane'schen Flasche, welche nöthig sind, um die erste Entladung hervorzurufen, zur Anzahl der Funken, welche für die folgenden Entladungen erforderlich sind, nur zwischen den Grenzen 1·15 und 1·35 variierte, deren Mittel 1·22 sehr nahe gleich dem vom Riess gegebenen Verhältnisse $\frac{6}{5}$ ist.

Gleichwohl scheint das Verhältnis ein wenig complicierter zu sein, denn das betrachtete Verhältnis wächst zunächst für die ersten Entladungen und wird erst von der fünften oder sechsten Entladung constant. Dieses Verhältnis wird überdies in merklicher Weise geringer, wenn man die Schlagweite vergrößert, d. h. der Rückstand wächst weniger schnell als die gesammte Ladung.

Wenn man annimmt, dass die gesammte Elektricitätsmenge gleich 1·9 mal jener eines Luftlamellencondensators von derselben Dicke ist, wie es in den Experimenten von Faraday der Fall ist, so wird die Entladung, welche gleich $\frac{5}{6}$ der gesammten Elektricitätsmenge ist, gleich $1{\cdot}9 \times \frac{5}{6}$ oder 1·6 mal der Elektricitätsmenge eines Luftlamellencondensators werden, was sich in vollständiger Übereinstimmung mit den Versuchen von Gaugain befindet.

544. In den Versuchen dieser Art ist die Ladungsdauer einer Batterie nothwendigerweise genügend groß, weil die von der Maschine gelieferte Electricitätsmenge begrenzt ist, und weil die Abgabe überdies hinlänglich langsam stattfinden muss, damit man die Funken der Lane'schen Flasche in Zählung bringen kann. Andererseits dauert die Entladung durch einen starken Funken immer eine schätzbare Zeit. Diese Versuche geben daher nicht an, was mit schwächeren Potentialen sich ereignen würde und welches dann der Einfluss der Zeit sein würde; zu diesem Behufe muss man Methoden anwenden, welche jenen von Gaugain ähnlich sind.

Man elektrisiert z. B. eine große Batterie auf ein nicht sehr großes Potential, dann hält man in der Hand jene Flasche, welche man studieren will, und bringt sie in Berührung mit der inneren Belegung der Batterie eine längere oder kürzere Zeit hindurch; man bestimmt dann mittelst eines Maßelektroskopes die Elektricitätsmenge, welche die Flasche aufgenommen hat. Ich habe in dieser Weise durch einige Probeversuche festgestellt, dass die Ladung in einer sehr schnellen Weise während der ersten Augenblicke wächst. Die Elektricitätsmenge, welche die Flasche bei einer Berührung von 10 Secunden

aufnimmt, kann 4- oder 5 mal größer sein oder sogar noch darüber, als wenn die Berührung so kurz wie möglich dauert; am Ende von 10 Secunden ist das Ladungsmaximum noch nicht erreicht.

Dieselbe Erscheinung findet für die Entladung statt. Wenn man den Knopf der elektrisierten Leydnerflasche einen Augenblick mit dem Erdboden in leitende Verbindung bringt und wenn man mittelst des Maßelektroskopes die rückständige Ladung bestimmt, so findet man, dass sie den dritten Theil der Gesammtladung übersteigen kann. Es würde nützlich sein, diese Untersuchung in einer vollständigen Weise für Leydnerflaschen wieder aufzunehmen, weil dies die am meisten in Verwendung stehende Form des Condensators ist und jener Condensator ist, welcher vom Standpunkte der Theorie das meiste Interesse darbietet.

545. Wie dem auch sei, der Einfluss der Zeit auf die Ladung und die Entladung der Batterien kann entweder einer langsamen Polarisation oder einer mittelmäßigen Leitungsfähigkeit des isolierenden Mediums zugeschrieben werden. Es ist indes nützlich zu bemerken, dass in den Leydnerflaschen guter Qualität der Einfluss der Zeit äußerst klein sein muss und dass der definitive Zustand hinlänglich schnell erreicht ist: wenn eine solche Batterie mit einem Elektroskop versehen ist, und wenn man die Batterie, nachdem sie elektrisiert wurde, isoliert, so bemerkt man, dass die Divergenz des Pendels sich in einer sehr langsamen Weise vermindert und diese Potentialverminderung rührt zum größten Theile von der Zerstreuung der Elektricität bei der Berührung mit der Luft oder längs der Oberfläche des Glases her.

Wenn die Glaslamelle eine bemerkbare Leistungsfähigkeit hat, so würde die Rückstandsladung viel größer sein, als sie im allgemeinen ist, und die sich selbst überlassene Batterie würde sich bald in vollständiger Weise entladen. In Wirklichkeit spielt der Verlust durch die Oberflächen die wichtigste Rolle und wenn man diese Fehlerquelle eliminiert, kann man die Elektricitätsmenge einer Leydnerflasche sehr lange Zeit hindurch erhalten.

Franklin[1] erwähnt z. B. ein Experiment, in welchem einer seiner Freunde eine Leydnerflasche elektrisierte, den Hals an der Lampe versiegelte, nachdem er den Haken von der inneren Belegung entfernt hatte. Diese Flasche wurde nach 7 Monaten geöffnet und fand sich noch genügend elektrisiert, um einen Funken zu geben, der allerdings viel weniger energisch war, als wenn man sie unmittelbar entladen hätte.

Canton[2] hatte schon nach Art der Leydnerflaschen eine kleine geblasene Glaskugel von 7 oder 8 Tausendstel eines Zolles Dicke elektrisiert, welche er hermetisch versiegelte. Als er diese bloßen Kugeln einem Elektrometer näherte, konnte er keine Spur von Elektricität entdecken, es genügte aber sie ein wenig zu erwärmen, indem er sie einige Zolle von einer Herdplatte hielt, um sie stark elektrisch zu machen und dieselben Effecte zeigten sich bis die Kugeln wieder kühl wurden. Dasselbe Experiment konnte mehreremale wiederholt werden, aber die Elektricität wurde allmählig geringer und geringer. Canton beobachtete, dass eine so hergestellte Kugel unter Wasser ohne Schaden mehrere Tage hindurch aufbewahrt werden konnte; schließlich lud er eine solche Kugel den 22. September 1760 und er fand sie noch stark elektrisch am folgenden 31. October, obwohl sie in diesem Zeitraume mehreremale verwendet wurde.

Diese Versuche zeigen, dass eine schwache Erhöhung der Temperatur genügt, um die Leitungsfähigkeit des Glases merklich zu vergrößern, aber sie beweisen gleichzeitig, dass diese Leitungsfähigkeit für passend gewählte Probemaße sehr schwach sein kann, und dass sie in den gewöhnlichen Experimenten von untergeordneter Bedeutung ist.

546. Erklärung des Inductionsvermögens durch Polarisation. Obwohl bereits in der Theorie der Dielektrika die Hypothese, durch welche eine Erklärung des Verhaltens derselben möglich ist, ausführlich erörtert wurde, bemerken wir nochmals zum Schlusse dieses Abschnittes, dass man, wenn man das specifische Inductionsvermögen eines isolierenden

(1) Lettre à Kinnersley.

(2) Priestley. Histoire de l'Electricité, t. II., pg. 101.

Mediums einer Polarisation der Molecüle zuschreibt, dann in einer ziemlich einfachen und elementaren Weise die Erscheinungen sich zurechtlegen kann. Wir haben schon oben gesehen, dass die Einführung einer leitenden Platte zwischen die beiden Platten eines Condensators dieselbe Wirkung hervorruft, als wenn man die Platten um eine Distanz einander nähern würde, welche gleich der Dicke dieser Lamelle ist; dies ist die eine Grundeigenschaft.

Betrachten wir nämlich eine Leydnerflasche, die eine Luftschichte von der sehr kleinen und constanten Dicke e hat, und nehmen wir an, dass zwischen den beiden Belegungen eine leitende Schichte von der Dicke ε sich befände, deren Entfernung von der inneren Belegung e_1, deren Entfernung von der äußeren Belegung e_2 wäre, so dass man haben wird:

$$e = e_1 + \varepsilon + e_2.$$

Sei V das Potential der inneren Belegung, während die andere Belegung mit dem Erdboden in leitender Verbindung sich befindet, so ist die Elektricitätsmenge auf der inneren Belegung im ersten Falle bestimmt durch:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{VS}}{4\pi e}.$$

Im zweiten Falle nimmt die innere Belegung, wenn sie auf dasselbe Potential gebracht wird, eine andere Elektricitätsmenge M' an; die zwischengestellte Lamelle ist auf der inneren Seite mit einer Schichte gleich —M', und auf der äußeren Seite mit einer gleichen Schichte +M' bedeckt: ihr Potential ist gleich V' und man hat dann:

$$\mathrm{M}' = \frac{(\mathrm{V} - \mathrm{V}')\,\mathrm{S}}{4\pi e_1} = \frac{\mathrm{V}'\mathrm{S}}{4\pi e_2}$$

und daraus erhält man:

$$\mathrm{M}' = \frac{\mathrm{VS}}{4\pi(e_1 + e_2)} = \frac{\mathrm{VS}}{4\pi(e - \varepsilon_2)}.$$

Die neue Elektricitätsmenge ist daher dieselbe, als ob man die Belegungen um eine Größe gleich der Dicke der zwischen-

gestellten Platte nahe gebracht hätte. Die Einführung einer neuen leitenden Platte würde genau dieselbe Wirkung hervorrufen.

547. Nehmen wir nun an, dass das isolierende Medium ganz fest sei, und dass zufolge der Polarisation es eine gewisse Anzahl elektrischer Schichten umfasse, die abwechselnd entgegengesetzte Zeichen besitzen; die elektrischen Massen sind untereinander gleich und gleich den Elektricitätsschichten, welche auf den Belegungen ausgebreitet sind. Indem man von der inneren Belegung ausgeht, die z. B. positiv elektrisch ist, und gegen die äußere Belegung durch das isolierende Medium vorrückt, wird man in einer gewissen Entfernung α einer negativen Schichte begegnen, in einer Entfernung β von der ersten einer positiven Schichte, in einer Distanz α' von der zweiten einer neuen negativen Schichte, dann in einer Entfernung β' einer positiven Schichte u. s. w., und man hat:

$$e = \alpha + \beta + \alpha' + \beta' \ldots = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \beta + \beta' + \beta'' + \ldots$$

Die elektrische Erscheinung ist dieselbe, als ob alle Dicken β, β', $\beta''\ldots$ durch Metalllamellen gebildet wären. Die Elektricitätsmenge M' der inneren Belegung ist daher:

$$M' = \frac{VS}{4\pi(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots)},$$

und das specifische Inductionsvermögen des betrachteten Mediums ist daher:

$$D = \frac{M'}{M} = \frac{e}{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots}$$

Bezeichnet man die Summe aller Dicken α mit a und mit b die Summe aller Dicken β, so hat man:

$$e = a + b$$

$$D = \frac{e}{a} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Nimmt man nun an, dass alle elektrischen Schichten in isolierenden Medien äquidistant gelegen sind, oder einfach,

dass die beiden Summen *a* und *b* gleich sind, so wird das specifische Inductionsvermögen D gleich 2 werden.

Da nun schließlich das Experiment für alle Fälle, in welchen die Verbindungen nur einige Secunden hergestellt werden, Ergebnisse liefern, die der Zahl 2 sehr benachbart sind, so folgt daraus, dass die vorhergehenden Betrachtungen, ohne darauf Anspruch zu haben, die Natur dieser Erscheinung zu erklären, wenigstens von letzterer ein genügendes Bild entwerfen.

Inhaltsverzeichnis des ersten Bandes.

Seite

I. Kapitel. Einleitung.

Elektrische Erscheinungen. Anziehung und Abstoßung 1
Elektrische Leitung 7
Unterscheidung der beiden Elektricitäten 13
Gleichzeitige Erzeugung der beiden Elektricitäten 17
Eintheilung der Körper vom elektrischen Standpunkte . . . 23
Auf die Natur der Elektricität bezügliche Hypothesen . . . 27
Theorie von Franklin 29
Theorie von Symmer 32
Bemerkungen über die Vorstellung vom Fluidum . . . 34

II. Kapitel. Gesetze der elektrischen Wirkungen.

Experimente von Coulomb 38
Auf die Torsion von Drähten bezügliche Formeln 40
Versuche von Coulomb über die Torsion von Metalldrähten . 44
Torsionswage von Coulomb 49
Methode der Schwingungen 62
Gesetz der Elektricitätsmengen 71
Vergleichung zweier Elektricitätsmengen mittelst der Torsionswage.
Messung einer Elektricitätsmenge 74
Versuche nach Coulomb 76

III. Kapitel. Zerstreuung der Elektricität.

Ursachen des Elektricitätsverlustes 86
Wahl eines isolierenden Trägers 87
Bestimmung des Elektricitätsverlustes durch die Luft . . . 90
Untersuchungen von Matteuci 101
Versuche von Riess und Warburg 107

IV. Kapitel. Vertheilung der Elektricität.

Verbreitung der Elektricität auf der Oberfläche der Leiter . . 111
Theoretische Folgerung aus der Vertheilung der Elektricität an der Oberfläche der Leiter 119
Experimentelle Bestimmung der electrischen Vertheilung . . . 126
Methode des Probescheibchens 127

	Seite
Correction wegen der Elektricitätszerstreuung	139
Anwendung zweier Probekörper	141
Verschiedene Methoden, das Verhältnis der elektrischen Dichten zweier Punkte und die Theilung der Elektricität unter zwei Leiter zu bestimmen	143

Beispiele der Vertheilung der Elektricität.

Kugel und Ellipsoid	147
Vertheilung der Elektricität auf einem Streifen	149
Kreisförmige Scheibe	151
Vertheilung der Elektricität auf einem Cylinder, der von zwei halbkugelförmigen Calotten begrenzt ist	153
Vertheilung der Elektricität auf einem Messingwürfel	154
Spitzen	155
Eigenschaften der Spitzen	157
Vertheilung der Elektricität auf mehreren in Berührung stehenden Körpern	159
Fall zweier Kugeln	159
Dichten in den verschiedenen Punkten während der Berührung	164
Elektrische Theilung unter mehreren Kugeln	166
Kugel und Cylinder	167

V. Kapitel. Elektrische Influenz.

Grunderscheinungen der Influenz	171
Experimentelle Demonstration	172
Elektrischer Funke	177
Elementare Erklärung der elektrischen Influenz	178
Fall concentrischer Kugeln	180
Theorem von Faraday	181
Influenzwirkung auf einen schon elektrischen Conductor	184
Versuche von Coulomb	185
Rolle der Spitzen in den Influenzerscheinungen	190
Erscheinungen der Influenz bei den elektrischen Anziehungen und Abstoßungen	193
Goldblattelektroskop	194
Erscheinungen der Influenz bei schlecht leitenden Körpern	197
Eindringen der Elektricität in isolierende Körper	204
Änderung der Influenzwirkungen durch zwischenliegende Körper	208
Specifisches Inductionsvermögen	209
Über elektrische Schirme	211
Kraftlinien von Faraday	214
Doppelinfluenz	217
Elektrische Bewegungen, durch Spitzen erzeugt	218
Elektrophor	225

Seite

Elektrische Condensation.

Elektricitätsquellen 232
Princip der elektrischen Condensation 233
Dissimulierte Elektricitäten 236
Condensierende Kraft 237
Condensator mit einer festen, isolierenden Platte 238
Langsame Entladung eines Condensators 239
Plötzliche Entladung. Rückstände 241
Entdeckung der Condensation. Leydnerflasche 243
Elektrische Batterien 250

VI. Kapitel. Theorie der elektrischen Erscheinungen. Elektrostatisches Potential. Allgemeine Theoreme.

Definition des Potentiales. Eigenschaften der ersten Derivierten desselben 254
Niveauflächen 257
Potential einer homogenen Kugelschichte 258
Allgemeinheit des ersten Theoremes 260
Bemerkungen über die Stetigkeit des Potentiales und der ersten Derivierten desselben 264
Eigenschaften der zweiten Derivierten des Potentiales . . . 267
Elektrisches Gleichgewicht in einem Systeme leitender Körper . . 274
Begriff des Elektricitätsfeldes 280
Begriff des Kraftflusses 281
Theorem von Green 282
Ableitung der Gleichungen von Laplace und Poisson . . . 286
Elektrische Capacität 288
Capacität einer Kugel 289
Capacität eines Ellipsoides, einer elliptischen und kreisförmigen Platte 290
Allgemeine Betrachtungen über die elektrische Capacität . . . 293
Elektrische Influenz 296
Allgemeine Theoreme über geschlossene Conductoren 299
Elektrische Condensation 302
Formel von Green 305
Folgerungen aus der Formel von Green 307
Elektrostatischer Druck 316
Emission und Absorption der Kräfte durch elektrische Massen . . 320
Satz von der äquivalenten Massentransposition 333
Allgemeine Bemerkungen über Elektrisierung durch Influenz . 336
Beziehungen zwischen den Ladungen und den Potentialen . . 350
Theorem von Earnshaw 354
Gleichgewichtspunkte und -Linien 357
Theorie der Leydnerflasche 360
Weitere Bemerkungen 365
Ableitung der allgemeinen Gleichungen für zwei beliebige Körper . 368

Seite
Bestimmung der Constanten a, α, β für Leydnerflaschen . . . 370
Cylindrische Condensatoren 374
Ebene Condensatoren 384
Allgemeines über elektrische Influenz. Methode von Murphy . . 386
Gegenseitige Wirkung zweier elektrisierter Conductoren . . . 390

Arbeit der elektrischen Kräfte. Elektrische Energie.

Elektrische Energie 392
Entladung einer Leydnerflasche 398
Entladung der Batterien 400
Elektrische Arbeit während der Verstellung isolierter Conductoren . 407

VII. Kapitel. Anwendung der Theorie auf die elektrische Vertheilung.

Vertheilung der Elektricität auf einer Kugeloberfläche . . . 416
Vertheilung der Elektricität auf einem dreiaxigen Ellipsoide . 417
Bestimmung des äußeren Potentiales der über ein Ellipsoid vertheilten Elektricität 418
Anwendung der Methode von Green 423
Vertheilung der Elektricität bewirkt durch Influenz 427
Berechnung des auswärtigen Potentiales einer durch Influenz von Seite eines elektrischen Massenpunktes geladenen Kugelfläche . . . 435
Influenz einer Hohlkugel durch eine punktförmige elektrische Masse . 439
Influenzwirkung zweier leitenden Kugeln (Methode von Murphy) . 442
Berechnung der Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden isolierten Kugeln nach Poisson 452
Fall zweier in Contact befindlichen Kugeln 455
Berechnungen der Dichte in jedem Punkte 460
Untersuchungen von Plana. Elektrische Capacität zweier sich berührenden Kugeln 464
Fall, wo der eine der Radien sehr klein ist im Verhältnisse zur Entfernung der beiden Kugeln 466
Allgemeiner Fall 469
Elektrische Dichten in jenen Punkten zweier benachbarten Kugeln, die einander am nächsten liegen. Tafeln von Plana 473
Elektrische Vertheilung unter mehreren Kugeln . . . 475
Rechnungen von Roche, auf den Fall zweier gleichen Kugeln bezüglich 476

Elektrische Bilder.

Niveauflächen, welche zwei elektrischen Punkten entsprechen . . 484
Elektrisierung einer nicht isolierten Kugel unter dem Einflusse eines äußeren Punktes 486
Dichte der Elektricitätsschichte in jedem Punkte 488
Elektrisierung einer isolierten Kugel unter dem Einflusse eines äußeren elektrisierten Punktes 489

Seite
Elektrisierung einer Kugel unter dem Einflusse mehrerer äußeren Punkte 491
Wirkung eines Punktes auf eine Kugel 492
Gleichgewicht einer unbegrenzten leitenden Platte unter der influencierenden Wirkung eines elektrisierten Punktes 493
Transformation der Probleme der Elektricität 496
Systeme, gebildet aus einer begrenzten Zahl succesiver Bilder . . 501
Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden 508
Influenzwirkung eines elektrisierten Punktes auf zwei sphärische concentrische Oberflächen 511
Vertheiluug der Elektricität auf zwei Kugeln, die außerhalb einander liegen 515
Vertheilung der Elektricität auf zwei im Contacte befindlichen Kugeln 520

Vergleichung der Phänomene der statischen Elektricität mit denen der Wärmeleitung.

Principien der Theorie von Fourier 525
Isothermische Flächen 529
Die isothermischen Flächen sind mit den Niveauflächen eines entsprechenden elektrischen Zustandes identisch 531
Directe Darstellung dieses Theoremes nach Thomson . . 533
Weitere Folgerungen aus dieser Wechselbeziehung 535

VIII. Kapitel. Theorie der Dielektricität.

Begriff eines Dielektrikums 541
Polarisation der dielektrischen Medien 543
Aufstellung der Grundformeln 545
Transformation der vorstehenden Formel 547
Princip der Erhaltung des Inductionsflusses 553
Umgestaltung der Formel 554
Verhältnis der zur Oberfläche des Dielektrikums normalen Kraftcomponenten in einem außerhalb und innerhalb des letzteren liegenden Punkte 556
Gleichung an der Trennungsfläche zweier verschiedenen Dielektrika . 559
Gesetz der Brechung der Kraft oder des Kraftflusses . . . 561
Andere Ableitung der charakteristischen Gleichung an der Trennungsfläche zweier dielektrischen Medien 562
Zusammenstellung der charakteristischen Gleichungen für ein Dielektrikum 565
Weitere Folgerungen aus dem Vorigen 567
Energie eines Systems im Falle eines beliebigen Dielektrikums . . 571
Vergleichung der Phänomene der Dielektricität mit denen der Wärmeleitung 572

Anwendung der allgemeinen Theorie der dielektrischen Wirkung auf einige specielle Fälle.

Berechnung der Wirkung eines Kugelcondensators, zwischen dessen Belegungen sich ein Dielektrikum befindet 574

Seite

Imitation eines dielektrischen Körpers 578
Induction in einem Medium, das aus zwei durch eine Ebene getrennten Dielektrika gebildet ist 584
Potential zweier gleichen und entgegengesetzten Elektricitätsmengen, die einander unendlich nahe sind 587
Polarisierte Kugel. Verschiebungsschichten 591
Bestimmung des Potentiales der polarisierten Kugel in einem Außenpunkte 594
Betrachtung der Wirkung einer leitenden Kugel, die sich in einem gleichförmigen elektrischen Felde befindet 595
Nähere Betrachtung der Kraftlinien 596
Fall einer nicht isolierten leitenden Kugel in einem homogenen Felde 598
Berechnung der Wirkung einer entfernten Elektricitätsmenge auf eine kleine leitende und isolierte Kugel 600
Berechnung des Falles einer dielektrischen Kugel in einem homogenen Felde 601
Verlauf der Kraftlinien 603
Hypothese von Poisson über die Beschaffenheit der dielektrischen Körper 605
Betrachtung concentrischer Kugelschichten in einem homogenen Felde 610
Specielle Fälle 612
Berechnung der Energie einer kleinen Kugel in einem elektrischen Felde 613
Verhalten von dielektrischen und leitenden Nadeln in einem variablen elektrischen Felde 617
Anwendung der obigen Betrachtungen auf die Berechnung der Gleichgewichtslage einer kleinen dielektrischen Nadel 619
Gleichgewichtslage einer leitenden Nadel 622
Anwendung der Theorie der Dielektrika auf die Theorie der Leydnerflasche 622
Ableitung der vollständigen Gleichungen für die beiden Belegungen einer Leydnerflasche bei Rücksichtnahme auf die elektrische Polarisation des isolierenden Mediums 629
Entladung der Leydnerflaschen. Rückstandsfunken 630
Leitung der Elektricität in Dielektrika 635
Ladung und Entladung eines Condensators 640
Vorstellungen von Faraday und Maxwell über den Zwangszustand, in welchen ein dielektrisches Medium durch elektrische Kräfte gelangt 642
Resultierende der elektrischen Drücke, welche auf die Oberfläche eines Leiters ausgeübt werden 644
Einige Theoreme über die Wechselwirkung elektrischer Systeme . 645
Einige Bemerkungen über die von Maxwell in seine Theorie eingeführte elektrische Verschiebung 650
Mechanische Erläuterung und Veranschaulichung des Verhaltens dielektrischer Medien 655

IX. Kapitel. Instrumente zur Beobachtung und Messung.

Idiostatische und heterostatische Instrumente 659

Seite

Elektrische Pendel.

Einfaches Pendel 661
Sinuspendel 662
Elektrometer von Henley 663
Elektrometer von August 666
Doppelpendel 669
Elektroskop von Cavallo 669
Elektrometer von Saussure 670
Condensationselektroskop von Volta 673
Elektroskop mit Doppelcondensation von Gaugain 676
Dreiplatten-Elektroskop von Peclet 681
Elektroskop von Behrens 683
Goldblattelektrometer von Hankel 687

Wageelektrometer.

Elektrisches Aräometer von Le Roy und d'Arcy 690
Entladungsschaukel von Cuthbertson 691
Elektrische Wage von Harris 692
Wage von Thomson 694
Absolute Elektrometer von Thomson 697

Drehungsapparate.

Elektrische Nadeln 709
Elektrometer von Örstedt 710
Elektrometer von Peltier 711
Sinuselektrometer von Riess 712
Modificationen der Torsionswage 713
Drehwage von Dellmann 716
Elektrometer von Thomson 719
Modificationen des Elektrometers von Thomson 731
Elektrometer von Stöhrer 736
Elektrometer von Mascart 738
Regelung und Ingangsetzung des Instrumentes für den experimentellen Gebrauch 743
Methode der Schwingungen 748

Entladungselektrometer.

Elektrometer von Lane 753
Funkenmikrometer 755
Messung der Ladung einer Batterie 756
Entladungselektrometer von Gaugain 758

Elektrische Thermometer.

Thermometer von Kinnersley 764
Thermometer von Harris 765
Thermometer von Riess 766
Selbstregistrierendes Thermometer 769

Seite

Galvanometer.

Versuche von Colladon 773
Methode von Faraday 776
Elektrodynamometer von Weber 778

X. Capitel. Versuche, welche sich auf die Influenz und Condensation beziehen. — Elektrische Capacitäten.

Anziehungen und Abstossungen.

Wirkung zweier Körper in constanter Entfernung 781
Elektrische Influenz zwischen zwei Platten 786
Wirkung zweier Kugeln 789

Elektrische Capacitäten.

Experimentelle Bestimmung der Capacität nach der Methode von Cavendish 790
Andere Methoden, um die Capacität von Condensatoren zu vergleichen 801
Methode von Thomson 803
Capacität zweier im Contacte befindlichen Kugeln 806
Capacität eines geraden Cylinders mit ebenen Grundflächen . . 807
Capacität eines Luftlamellen-Condensators 809
Anwendung von Condensatoren mit variablen Capacitäten . . . 811
Anwendung der Entladungsapparate 812

Luftcondensatoren.

Bestimmung der condensierenden Kraft der Condensatoren . . 812
Versuche von Riess 816
Versuche von Gaugain 826
Cylindrische Condensatoren 828
Sphärische Condensatoren 833
Ebene Condensatoren 835
Variabler Zustand der Condensatoren 837

Rolle des isolierenden Mediums in den Condensatoren. Specifisches Inductionsvermögen. Methoden zur Bestimmung desselben.

Bestimmung der Dielektricitätsconstante nach der Methode von Cavendish 841
Versuche von Faraday, die Messung der Dielektricitätsconstante betreffend 844
Versuche von Gaugain 851
Versuche von Gibson und Barclay über die specifische Inductionscapacität des Paraffins 866
Bestimmungen der Dielektricitätsconstante von Boltzmann . 870
Boltzmanns zweite Methode 875
Versuche von Romich und Fajdiga 886
Versuche von Romich und Nowak über die elektrische Absorption in den verschiedenen Substanzen 887

Seite

Bestimmung der Dielektricitätsconstante nach den Methoden von A. Wüllner 888
Versuchsmethode von Hopkinson zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante von Flintglas 891
Gordons Messung der specifischen Inductionscapacität . . . 893
Bestimmung der specifischen Inductionscapacität von Flüssigkeiten . 901
Bestimmung des specifischen Inductionsvermögens der Gase (nach der Methode von Boltzmann) 904
Einfluss der Dichte des Gases auf das specifische Inductionsvermögen desselben 907
Versuche von Ayrton und Perry über die Dielektricitätsconstante der Gase 911
Leydnerflaschen 915
Erklärung des Inductionsvermögens durch Polarisation . . . 919

Fr. Winiker & Schickardt, k. k. Hofbuchdrucker, Brünn.

Verlag von A. Pichler's Witwe & Sohn, Wien.

Grundzüge der Naturlehre

für die unteren Classen der Gymnasien, Realschulen und verwandten Anstalten. Von **Dr. I. G. Wallentin,** k. k. Professor am Ober-Gymnasium im IX. Bezirke Wiens.

a) Ausgabe für Realschulen. 1881. Mit 228 Holzschnitten geh. M. 2.40 = fl. 1.20; in Ganzleinwand M. 2.80 = fl. 1.40.
b) Ausgabe für Gymnasien. (Mit einem Anhange, die Elemente der mathematischen Geographie und Astronomie enthaltend.) 1881. Mit 242 Holzschnitten, geh. M. 2.60 = fl. 1.30; in Ganzleinwandband M. 3.— = fl. 1.50.

Lehrbuch der Physik

für die oberen Classen der Mittelschulen und verwandter Lehranstalten. Von **Dr. I. G. Wallentin,** k. k. Professor am Ober-Gymnasium im IX. Bezirke Wiens. 3. verbesserte Auflage. 1882. Mit 235 Holzschnitten und einer Spectraltafel in Farbendruck.

a) Ausgabe für Gymnasien. Geh. M. 3.60 = fl. 1.80; in Leinenband M. 4.— = fl. 2.—.
b) Ausgabe für Realschulen. Geh. M. 3.30 = fl. 1.65; in Leinenband M. 3.70 = fl. 1.85.

Das Lehrbuch der Physik ist durchaus wissenschaftlich gehalten, sowohl in Anordnung als in Behandlung des Lehrstoffs. ‚Klare Sichtung des Wesentlichen und Unwesentlichen einerseits, die logische Durchführung der einzelnen zur Behandlung kommenden Theile anderseits' hat der Verfasser nicht nur angestrebt, sondern geleistet. Der ehemalige ‚Privatdocent für mathematische Physik' befindet sich hier in seinem Element. Dem Referenten ist kaum ein anderes Lehrbuch der Physik bekannt, in welchem Beweise und Ableitung in so präciser, eleganter Weise geführt werden, wie hier. Schüler, die ein solches Buch wirklich durchgearbeitet haben, müssen ein sehr sicheres Urtheil in physikalischen Dingen erhalten. Alle, die sich wissenschaftlich mit der Physik beschäftigen wollen, seien auf dieses Lehrbuch aufmerksam gemacht. Es enthält sehr viel Stoff (auch die Elemente der mathematischen Geographie und Astronomie und die Grundlehren der Chemie) und ist bei guter Ausstattung nicht theuer. Seit 1879 sind drei Auflagen nöthig geworden, ein Beweis, dass das Buch lebhaften Anklang gefunden hat.

Deutsche Blätter f. erzieh. Unetr.

Die Physik in der Volks- und Bürgerschule.

Anleitung zur Behandlung des ersten Unterrichtes in der Physik und Chemie für Lehrer und Lehramtscandidaten bearbeitet von **Prof. Dr. Eugen Netoliczka.**

I. Band.

Methodik des physikalischen Unterrichts

an Volks- und Bürgerschulen. 1879. 10 Bog. geh. M. 2.— = fl. 1.—.

II. Band.

Experimentierkunde.

Anleitung zu physikalischen und chemischen Versuchen in der Volks- und Bürgerschule. Mit 140 Abbild. 1879. 10 Bog. geh. M. 2.— = fl. 1.—.

Mathematik.

Glöser, Mor., k. k. Realschul-Professor in Wien, **Das abgekürzte Rechnen in Decimalbrüchen.** Ein Hilfsbuch für Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und verwandte Anstalten. 1876. Geh. M. —80 = fl. —.40.

— **Lehrbuch der Arithmetik,** für die erste und zweite Classe der österr. Mittelschulen. 2. Auflage. 1883. M. 1.60 = fl. —.80.

— **Grundzüge der allgemeinen Arithmetik** für die dritte Classe der österr. Mittelschulen. 2. umgearb. Aufl. 1880. Geh. M. 1.— = fl. —.50.

Rossmanith, Constantin, Geometrische Formenlehre. Eine Anleitung zur Betrachtung geometrischer Körper als Vorbereitung zur Geometrie. Zunächst für die erste Realclasse. Mit Übungsaufgaben, 55 in den Text gedruckten Holzschnitten und einer Tafel. 1879. Geh. M. 1.20 = fl. —.60.

— **Die Elemente der Geometrie** im constructiven Sinne. Lehr- und Übungsbuch für die II., III., IV. Realclasse. Mit 130 Figuren. 1 Tafel und zahlreichen Constructionen und Rechenaufgaben. 1883. Geh. M. 2.— = fl. 1.—

Villicus, Franz, Professor, **Geometrische Formenlehre** in Verbindung mit dem Zeichnen ornamentaler Gebilde. Für die I. Realclasse. Mit 112 Fig. und 4 Taf. Dritte Aufl. 1882. Geh. M. 1.20 = fl. —.60.

— **Lehrbuch der ebenen Geometrie** in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen für die II. und III. Realclasse. Zweite verb. Aufl. Mit 137 Figuren und 3 Tafeln. 1881. Geh. M. 1.60 = fl. —.80.

— **Arithmetische Aufgaben** mit theoretischen Erläuterungen für die unteren Classen der Realschulen. Auf Grundlage des für die österr. Realschulen vorgeschriebenen Normal-Lehrplans methodisch geordnete Aufgabensammlung aus der Arithmetik. I. Theil (1. Classe). 1882. Geh. M. 1.20 = fl. —.60. — II. Theil (2. Classe). 1883. Geh. M. 1.70 = fl. —.85.

— — für Unter-Gymnasien. I. Theil (1. und 2. Gymn.-Classe). 1883. Geh. M. 2.— = fl. 1.—.

— **Zur Geschichte der Rechenkunst** mit besonderer Rücksicht auf Deutschland und Österreich. Enthaltend: 25 Illustrationen und zwei tabellar. vergleichende Zusammenstellungen von Zahlwörtern aus 59 Sprachen. 1883. Geh. M. 2.40 = fl. 1.20.

Wittek, Franz, Professor am Landes-Real- und Ober-Gymnasium in Horn, **Lehr- und Übungsbuch für den geometrischen Unterricht** in den unteren Gymnasialclassen. 3 Theile.

1. Abtheilung: Die geradlinige ebene Geometrie. Für die 1. und 2. Gymnasialclasse. 2. umgearb. Auflage. Mit 79 Holzschnitten im Text. 1881. Geh. M. 1.10 = fl. —.55.

2. Abtheilung: Die Kreislehre. Für die 3. Gymnasialclasse. 2. umgearb. Auflage. Mit 43 Holzschnitten im Text. 1881. Geh. M. —.60 = fl. —.30.

3. Abtheilung: Die räumliche Geometrie. Für die 4. Gymnasialclasse. 2. Aufl. 1883. Geh. M. —.90 = fl. —.45.

Fr. Winiker & Schickardt, k. k. Hofbuchdrucker, Brünn.

A.BOSE
Buchbind
MÜNCH

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mascart, Éleuthère Élie Nicolas,

Handbuch der statischen Elektricität

Bd.: 1

1883

Phys.sp. 444 sc-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11881855-0